

Vorwort

Die Untersuchung von Singularitäten analytischer Funktionen kann als ein Teilgebiet der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher und der algebraischen/analytischen Geometrie aufgefasst werden. Sie hat sich mittlerweile zusammen mit der Theorie der Singularitäten differenzierbarer Abbildungen zu einem eigenständigen Gebiet, der Singularitätentheorie, ausgebildet. Durch ihre Beziehungen zu zahlreichen anderen mathematischen Gebieten und Anwendungen in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften und in der Technik (zum Beispiel unter dem Stichwort Katastrophentheorie) hat diese Theorie großes Interesse gefunden. Der besondere Reiz, aber auch die besondere Schwierigkeit dieser Theorie liegt darin, dass in ihr tief liegende Ergebnisse und Methoden aus verschiedenen mathematischen Gebieten zur Anwendung kommen.

Das vorliegende Buch hat zum Ziel, Grundlagen der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher darzustellen und darauf aufbauend grundlegende Konzepte der Theorie isolierter Singularitäten holomorpher Funktionen systematisch zu entwickeln. Es ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser mit dem Ziel gehalten hat, Studierende der Mathematik im Hauptstudium vom fünften Semester an in dem Gebiet der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher an aktuelle Fragen der Forschung heranzuführen. Dementsprechend ist das Buch auch aufgebaut. An Vorwissen werden nur Grundkenntnisse in der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen und in der Algebra vorausgesetzt, wie sie die Studierenden im Allgemeinen in den ersten vier Semestern ihres Studiums erwerben. Die ersten beiden Kapitel entsprechen einer weiterführenden Vorlesung über Funktionentheorie und haben Riemann'sche Flächen und Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher zum Inhalt. Sie stellen auch eine Einführung in die lokale komplexe Geometrie dar. Im dritten Kapitel werden die Ergebnisse auf die Deformation und Klassifikation von isolierten Singularitäten holomorpher Funktionen angewandt. Diese drei Kapitel sind aus einem Skriptum zu den Vorlesungen Funktionentheorie II und III, die der Verfasser im Wintersemester 1998/99 und im Sommersemester 1999 in Hannover gehalten hat, entstanden. Teile dieses Skriptums gehen auch auf entsprechende Vorlesungen im Wintersemester 1992/93 und im Sommersemester 1993 zurück.

Der restliche Teil des Buches beschäftigt sich mit der topologischen Untersuchung dieser Singularitäten, die mit dem mittlerweile klassischen Buch von J. Milnor [Mil68] begann. Ein Hilfsmittel dazu ist die Picard-Lefschetz-Theorie, die als eine komplexe Version der Morse-Theorie angesehen werden kann. Sie ist am Anfang des zweiten Bandes des umfangreichen zweibändigen Standardwerkes von V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade und A. N. Varchenko [AGV85, AGV88] dargestellt. Diese Bücher setzen allerdings viele Vorkenntnisse voraus. In den letzten beiden Kapiteln des vorliegenden Buches wird ei-

ne Einführung in diese Theorie gegeben. Im vierten Kapitel werden dazu zunächst die nötigen Grundlagen aus der algebraischen Topologie und Differentialtopologie zusammengestellt. Das fünfte Kapitel führt in die topologische Untersuchung von Singularitäten ein. Es stützt sich zum Teil auf [AGV88, Part I. The topological structure of isolated critical points of functions]. Am Ende dieses Kapitels wird ein Überblick über einige aktuellere Resultate gegeben, die zum Teil ohne Beweis dargestellt werden. Den letzten beiden Kapiteln liegt eine Vorlesung mit dem Titel "Singularitäten" zugrunde, die der Verfasser im Wintersemester 1993/94 in Hannover gehalten hat.

Das Buch kann in Teilen für eine weiterführende Vorlesung über Funktionentheorie, eine einführende Vorlesung über Differentialtopologie und für eine Spezialvorlesung/Seminar Einführung in die Singularitätentheorie benutzt werden. Als Vorlage für eine weiterführende Vorlesung über Funktionentheorie eignen sich die ersten beiden Kapitel. Der Anfang des Abschnitts 1.1, der Abschnitt 1.2, die ersten vier Abschnitte von Kapitel 3 und das Kapitel 4 behandeln Themen aus der Differentialtopologie, können unabhängig von dem Rest des Buches gelesen werden und können daher als Grundlage für eine einführende Vorlesung über Differentialtopologie dienen. Kapitel 3 und Kapitel 5 können als Lektüre für ein Seminar Einführung in die Singularitätentheorie benutzt werden, wobei je nach Kenntnisstand der Teilnehmerinnen und Teilnehmer bei Bedarf auf Resultate aus den früheren Kapiteln zurückgegriffen werden kann.

Natürlich stellen die behandelten Themen nur eine kleine Auswahl aus einer großen Vielfalt von möglichen Themen dar. Diese Auswahl ist durch die Vorlieben und die eigene Arbeit des Verfassers geprägt. Der Verfasser hofft aber, dass das Buch eine gute Grundlage für das Studium weiterführender Literatur, auf die im Literaturverzeichnis hingewiesen wird, darstellt.

Ich danke Frau S. Guttner und Herrn Dipl.-Math. Robert Wetke sehr herzlich für die sorgfältige Erstellung des größten Teils des \LaTeX -Skriptums. Besonderer Dank gebührt Herrn Wetke auch für die Anfertigung der meisten Computerzeichnungen. Herrn Dr. Michael Lönne und Herrn Dr. Jörg Zintl bin ich für Hilfe beim Korrekturlesen sehr dankbar.

Hannover, im Januar 2001

Wolfgang Ebeling