

## Vorwort der Herausgeber

Wir legen mit diesem Band zur Didaktik der Stochastik den Teil IV unseres dreibändigen Werkes zum Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II vor. Ähnlich wie in Teil II zur Didaktik der Analysis und in Teil III zur Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra knüpfen wir auch hier an die Fachdidaktischen Grundfragen aus Teil I an. Zwar ist das vorherige Studium dieser Grundfragen sehr empfehlenswert, gleichwohl kann der vorliegende Band auch ohne diese Voraussetzung gelesen werden, denn wir haben darauf geachtet, dass dieser Band in sich geschlossen ist.

Weil nicht vorausgesetzt werden kann, dass die Themen der Stochastik so vertraut sind wie die der Analysis oder der linearen Algebra, ist der Buchtext nach den mehr fachlichen gesehenen Aufgaben der Stochastik, der Erhebung und Darstellung von Daten, der Entwicklung und Anwendung von Modellen und der Überprüfung und Interpretation organisiert. Dabei werden aber vier Grundtätigkeiten des Mathematikunterrichts einer genauen Analyse unterzogen: Lernen (von Begriffen und Regeln), Problemlösen, Anwenden und Modellbilden sowie Beweisen und Begründen. Es werden Grundlagen zum Verstehen von inhaltsbezogenen Lern- und Interaktionsprozessen behandelt und Konsequenzen für das Unterrichtsmanagement, insbesondere für die Auswahl von Lehrverfahren, abgeleitet. Mit der Diskussion eines problem- und anwendungsorientierten Mathematikunterrichts und der Frage nach Art, Ziel und Umfang des Rechneinsatzes (Computer, grafikfähiger Taschenrechner, Schul- und Anwendersoftware) werden wesentlichen Gesichtspunkten der aktuellen Reformdiskussion um den Mathematikunterricht Rechnung getragen.

Wir knüpfen mit dieser dreibändigen Didaktik an das Buch „Tietze/Klika/Wolpers: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II“ von 1982 an. Die vielfältigen Veränderungen in der Schule, in den Fachwissenschaften und der Fachdidaktik haben uns veranlasst, ein neues Buch zu schreiben und nicht nur eine Neubearbeitung vorzulegen. Hervorzuheben sind insbesondere die sich verändernde gesellschaftliche Rolle des Gymnasiums, aktuelle und mögliche Veränderungen von Mathematikunterricht durch die neuen Informationstechnologien, die Neubewertung der Anwendungsorientierung (Betonung des Realitätsbezugs) und das stark gewachsene Wissen über fachspezifische Lehr-, Lern-, Verstehens- und Interaktionsprozesse.

Wichtiges Charakteristikum des gesamten Werkes ist es, dass die allgemeinen Gedanken und Theorien nicht abstrakt bleiben. Alle Teile dieser Didaktik sind mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Diese sollen das Verständnis des Textes erleichtern, zur Weiterarbeit anregen, als Übungsmaterial für didaktische Veranstaltungen in der ersten und zweiten Ausbildungsphase dienen und Anregungen für den konkreten Unterricht geben. Alle Kapitel sind in intensiven Diskussionen inhaltlich aufeinander abgestimmt worden.

Nach langer Diskussion über den Gebrauch weiblicher und männlicher Wortformen, wie Lehrerin, Lehrer und LehrerIn, haben wir uns für den traditionellen Weg der männlichen

Form entschieden. Wir bitten unsere Leser, Verständnis dafür zu haben. Auch befragte Frauen haben uns in dieser Entscheidung bestärkt.

Das Werk wendet sich an Fachdidaktiker, an Studenten des gymnasialen Lehramts, an Referendare und an Lehrer, die ihren Unterricht überdenken möchten, die nach neuen Formen des Unterrichts oder nach inhaltlichen Anregungen suchen.

*Juli 2002*

*Prof. Dr. U.-P. Tietze; Akad. Oberrat PD Dr. M. Klika; Akad. Dir. i. R. Dr. H. Wolpers  
TU Braunschweig und Universität Hildesheim*

### **Vorwort der Verfasser dieses Bandes**

Der Mathematikunterricht der Sekundarstufe II wird von drei Themenbereichen bestimmt: Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie sowie Stochastik. Dementsprechend besteht die Reihe „Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II“ aus drei Bänden, die ersten beiden sind 1997 (2., durchgesehene Auflage 2000) bzw. 2000 erschienen, der dritte zur Stochastik liegt nun vor. Die Reihenfolge des Auftretens ist nicht ganz unabhängig von der Bedeutung der jeweiligen Gebiete in der schulischen Praxis zu sehen. Kein Mathematikunterricht, der etwas auf sich hält, kommt um Fragen der Analysis herum, die fast schon berühmten Kurvendiskussionen sind oft die „Rettungsanker“ beim Abitur für manche(n) Schülerin bzw. Schüler. Auch im Studium des Lehramts Mathematik ist die Analysis der dominierende Topos des ersten Studienabschnitts, dieser Eindruck wird noch verstärkt, wenn Physik als zweites Fach gewählt worden ist. Die Analytische Geometrie kann da nicht ganz mithalten, zumal ihre Anwendungen in außermathematischen Situationen in vielen Fällen weniger bekannt sind als jene der Analysis, und eine gewisse Anwendungsorientierung aber Kennzeichen jedes modernen Mathematikunterrichts ist.

Die Stochastik hat erst in den letzten Jahrzehnten Eingang in die Studienpläne der Lehramtsausbildung in Mathematik gefunden, ihre feste Verankerung im Mathematikunterricht selbst hat aber noch nicht stattgefunden. Es ist dabei interessant festzustellen, dass einerseits oft darüber geklagt wird, die an der Universität in der Lehramtsausbildung Mathematik angebotenen (mathematischen) Inhalte seien für die Schule zu wenig brauchbar, dass aber andererseits Stochastikveranstaltungen im Studium zu wenig wahrgenommen werden. Tatsächlich zeigt sich an diesem Beispiel einmal mehr, wie wichtig das an der Universität gelehrt Wissen für den späteren Lehrberuf ist, um nämlich z. B. neue curriculare Inhalte angemessen in den bestehenden Lehrstoff einordnen zu können.

Die (stoff-)didaktische Forschung bietet ein ergänzendes Bild. Die Beiträge zu Themen der Geometrie und der Stochastik sind außerordentlich zahlreich. Den Schluss daraus zu ziehen, diese Gebiete seien im derzeitigen Mathematikunterricht sehr bedeutend, ist mindestens gewagt. Dabei sind von der Fachdidaktik sowohl allgemeine wie auch für die Stochastik spezifische Ergebnisse erzielt bzw. verifiziert worden, die es wert sind, beach-

tet zu werden. Allerdings ist das Panorama fachlicher Zusammenhänge und didaktisch-methodischer Diskussionen und Vorschläge so weitgespannt, dass es unmöglich ist, einen vollständigen und gleichzeitig ausführlichen Überblick über die fachdidaktische Forschung und ihre Ergebnisse in Bezug auf die Stochastik zu geben.

Zum Schluss bleibt noch die angenehme Pflicht, all jenen zu danken, die zur Entstehung dieses Buches beigetragen haben. Insbesondere danken wir den Professoren Joachim Bentz, Wilfried Herget und Michael Kolonko und den Studienräten Lutz Breidert, Joachim Haase und Gerd Hinrichs für ihre Durchsicht und wertvollen Hinweise. Für den „Wiener Teil“ haben in kompetenter, engagierter und geduldiger Weise (der Zweitautor hat immer wieder etwas gefunden oder ändern wollen) Frau Gudrun Kretzschmar, Frau Cornelia Bauer, Frau Waltraud Lager vom Sekretariat des Institutes für Mathematik der Universität Wien, Frau Eva Kissler [jetzt: Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics (ESI)], Frau Erika Klejna und Frau Brigitte Wendelin (beide jetzt: Studienbeihilfenbehörde) die Schreibe geleistet, was bei den Tücken, die hin und wieder bei dem zugrundeliegenden Textprogramm auftreten, keine einfache Aufgabe gewesen ist.

*Juli 2002*

*Akad. Direktor i. R. Dr. H. Wolpers  
Universität Hildesheim  
Institut für Mathematik und  
Angewandte Informatik*

*Univ.-Doz. Mag. Dr. Stefan Götz  
Universität Wien  
Institut für Mathematik*

## **Einleitung**

„Es gibt kein Stricken ohne Wolle“ heißt es, und die im Vergleich zur analytischen oder algebraischen/geometrischen nicht so vertraute stochastische „Wolle“ will sorgfältig abgewickelt werden, um bei dem Bild zu bleiben. Daher wird im *ersten* Kapitel der *fachsystematische Hintergrund* in sehr geraffter Form dargestellt. Selbstverständlich kann und will diese Schilderung kein einschlägiges Lehrbuch ersetzen, dennoch wurde auf eine gewisse Vollständigkeit, wie sie im Rahmen einer Einführung in die elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik anzustreben ist, geachtet.

Dieser fachsystematische Hintergrund beginnt mit dem (mathematischen) Konzept des *Wahrscheinlichkeitsraums* und der Idee der *Zufallsvariablen* mit ihren Beschreibungsmöglichkeiten (Verteilungen). Die *Grenzwertsätze*, welche daran anschließen und eine Beziehung zwischen gewissen Verteilungen herstellen, sind i. Allg. schwierig zu beweisen, ihre Anwendung als Approximationssätze dagegen ist oft einfach.

Die wichtigste Konfrontation der Wahrscheinlichkeitstheorie mit der Realität passiert in der *Statistik*, die zugehörige *Modellbildung* basiert auf Begriffen der *beschreibenden* Statistik. Dabei erschöpfen sich die zugehörigen Aktivitäten natürlich nicht im Berechnen allein, bedeutend erscheint aus heutiger Sicht auch das Erstellen und Interpretieren von graphischen Darstellungen des zur Verfügung stehenden Datenmaterials.

Das Aufstellen von konkreten, quantitativen *Modellen* geschieht mit Hilfe der aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannten Verteilungen von Zufallsvariablen. Eine – aus didaktischer Sicht – höchst diffizile Vereinigung der beiden Sichtweisen aus beschreibender Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie ergibt die *beurteilende Statistik*. Beim quantitativen Auswerten von Datensätzen und Überprüfen von Aussagen über sie wird im Wesentlichen zwischen dem Schätzen (von Parametern) und dem Testen (von Hypothesen) unterschieden. Neben dem *klassischen* Aufbau dieser Verfahren wird auch eine Alternative im Rahmen der *Bayes-Statistik* vorgestellt.

Durch die *Geschichte der Stochastik* zieht sich als „roter Faden“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Wandel des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Von seiner Entstehung aufgrund von Fragen, die sich im Zuge der Beschäftigung mit Glücksspielen ergeben haben bis zu seiner axiomatischen Formulierung ist es ein weiter Weg gewesen. Die Ursprünge der Statistik sind wohl in den Volkszählungen zu suchen, ihre Methoden haben sich bis heute derart verfeinert, dass sie aus kaum einer Wissenschaft, die in irgendeiner Form mit Empirie zu tun hat, mehr wegzudenken ist.

Der letzte Abschnitt des ersten Kapitels ist den Bemühungen gewidmet, mit Hilfe des Konzeptes der *Fundamentalen Ideen* ein Curriculum für den Stochastikunterricht zu strukturieren und zu entwickeln.

Das *zweite* Kapitel beginnt mit einem *historischen* Abriss über den Stochastikunterricht. Die verschiedenen Ansätze, die sich dabei ergeben haben, bestehen heute z. T. nebeneinander, allerdings sind ihre Auswirkungen auf den konkreten Stochastikunterricht sehr unterschiedlich.

Große Datenmengen, welche in stochastischen Situationen naturgemäß häufig vorkommen, rufen in natürlicher Weise zum *Einsatz des Computers* in jeder Phase der Bearbeitung auf, also von der Datenerfassung über die Strukturierung zur Modellbildung und schließlich zur Überprüfung. Routinen kommen in statistischen Verfahren viele vor, ihre Durchführung kann – im Gegensatz zur Interpretation der Ergebnisse oder dem Ziehen von Schlüssen daraus – der Computer übernehmen. Die Simulation von Zufallsexperimenten ist ebenfalls eine Indikation für den Computereinsatz im Stochastikunterricht, konkrete Hinweise auf Programm(paket)e beenden den zweiten Abschnitt dieses Kapitels.

Das *stochastische Denken* im dritten Abschnitt des zweiten Kapitels bringt uns auf die Frage zurück, warum die Stochastik im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II keine größere – nämlich die ihr nach heutiger Auffassung zustehende – Rolle spielt. Die Schwierigkeiten, eine richtige Intuition bei der Erfassung von stochastischen Situationen zu entwickeln, sind mannigfach belegt (eine Ausformung davon sind die Paradoxa, die in gewisser Weise sogar typisch für dieses Teilgebiet der Mathematik sind, obwohl auch in anderen mathematischen Gebieten welche existieren), und haben die Entwicklung von Theorien des stochastischen Denkens provoziert. Die Intuitionen und Strategien werden an einzelnen konkreten Begriffen der Stochastik diskutiert, Folgerungen für den Stochastikunterricht schließen diesen Abschnitt ab.

Das *dritte* Kapitel konkretisiert vielfach anhand von Beispielen die Themen, die im ersten Kapitel angesprochen worden sind. Dabei bedeutet „Konkretisieren“ das Heruntertransferieren mathematischer Inhalte auf *schulrelevante* Aspekte. Die Realisierung des Grund-

satzes „Vereinfachen, ohne zu verfälschen!“ ist, wie die Diskussion zeigt, gerade in der Stochastik mit ihrer starken Anwendungsorientierung nicht einfach. Es gibt keinen Königsweg, daher können nur einige Varianten aufgezeigt werden. Die Frage „Was möchte ich in dieser Stunde bzw. mit diesem Beispiel eigentlich mitteilen?“ kann nur mit Hilfe eines soliden Hintergrundwissens beantwortet werden. In diesem Sinne sind die angeführten Themen dieses Kapitels nur Hinweise, spätestens hier setzt eben die individuelle Arbeit jedes/r einzelnen Lehrers/in ein. Der gewählte Rahmen zeigt, was in einem Stochastikunterricht der Sekundarstufe II alles vorkommen kann (aber natürlich nicht zur Gänze muss!), mit ein wenig Ausblick, was es sonst noch so gibt.

Das *vierte* Kapitel schließlich bringt Themen, bei denen meist von konkreten Problemstellungen (außermathematischer Natur) ausgegangen wird und dann sukzessive Beschreibungsmöglichkeiten und mögliche Lösungswege entwickelt werden. Ein didaktischer Kommentar bzw. ein didaktisches Resümee als Hilfestellung zur Einordnung dieser nicht unbedingt gängigen Stoffgebiete beschließt jeden Abschnitt in diesem Kapitel. Neben der Problemorientierung ist der Anwendungscharakter ein weiteres Auswahlkriterium für die behandelten Themen dieses Kapitels gewesen, ganz in dem Sinne, wie sich die moderne Mathematik und ihre Vertreter bzw. Vertreterinnen heute vielfach präsentieren.

An einzelnen Stellen des in Rede stehenden Kapitels werden auch Vernetzungen der Stochastik mit der Analysis bzw. mit der Linearen Algebra deutlich, neben den spezifischen Gesichtspunkten des stochastischen Denkens gehört das Aufzeigen dieser Zusammenhänge unbedingt zu einem ergiebigen Stochastikunterricht (wobei diese Querverbindungen natürlich auch an ganz anderen Beispielen demonstriert werden können).