Einleitung

Wenn wir im Titel des Buches hervorheben, daß wir die *elementare* Differentialgeometrie behandeln, so wollen wir damit einerseits den Gegenstand und andererseits die Methoden charakterisieren: Es geht um die Geometrie von ebenen und räumlichen Kurven, von Flächen und n-dimsionalen Riemannschen Gebieten. Die Methode ist insofern elementar, als daß wir direkt auf den Kenntnissen der mathematischen Grundvorlesungen aufbauen, wobei wir in Beweisen gelegentlich Basiswissen über gewöhnliche Differentialgleichungen benutzen. Wir erreichen die Einfachheit der Darstellung durch die Beschränkung auf Kurven und Flächen(stücke), die global parametrisiert werden können. Damit hoffen wir, daß neben Mathematikern auch Physiker und Ingenieure ohne Schwierigkeiten Nutzen aus dem Buch ziehen können.

Wir haben insbesondere auf den Mannigfaltigkeitsbegriff verzichtet. Trotzdem ist das Buch auch als eine Vorbereitung auf die allgemeine Riemannsche Geometrie gedacht, bieten doch die Flächen das einfachste nichttriviale Beispielmaterial dafür. Aus diesem Grund haben wir auch n-dimensionale Riemannsche Gebiete eingeschlossen – das sind Gebiete des $\mathbb{R}^n$, auf denen eine Riemannsche Metrik definiert ist; sie sind die lokalen Modelle Riemannscher Mannigfaltigkeiten. In ihnen führen wir z.B. den Levi-Civita-Ableitungsprozeß ein und behandeln in ihnen geodätische Linien.

In dem ganzen Buch bevorzugen wir eine koordinatenfreie Darstellung, weil wir überzeugt sind, daß wir dadurch die geometrischen Inhalte besser vermitteln können. Beweise, die für das Verständnis unwesentlich sind, haben wir gelegentlich überschlagen. Dafür sind differentialgeometrisch informative Schlüsse ausführlich ausgearbeitet.

Nun komme ich zu dem zweiten Anliegen des Buches: Es soll nämlich zeigen, wie ein modernes Computer-Algebra-System für das differentialgeometrische Arbeiten nutzbar gemacht werden kann. Der erste diesbezügliche Versuch begann mit einer Maple-Arbeitsgemeinschaft, die ich in Ergänzung zu meiner Vorlesung über elementare Differentialgeometrie anbot und die zum Ziel hatte, einerseits eine Beispielsammlung von Kurven und Flächen zusammenzustellen und andererseits ein Programmpaket für die Differentialgeometrie zu entwickeln. Die AG unter Leitung von Herrn K. Pawel, durch ein weit überdurchschnittliches Engagement der Teilnehmer geprägt, übertraf meine Erwartungen um ein Vielfaches. Wir fanden, daß gerade die elementare Differentialgeometrie durch ihren Reichtum an berechenbaren Beispielen und aufgrund der graphischen Darstellbarkeit ihrer Ergebnisse ein ideales Gebiet für eine derartig Computer-unterstützte Mathematik ist. Den Teilnehmern der AG gilt unser Dank für ihre Kritik und ihre Anregungen.

In ausgefeilter und erweiterter Form liegt das Ergebnis der AG diesem Buch als CD bei, und zwar in Versionen für Maple V Release 4.0 und 5.0 unter Windows 95/NT, Macintosh und Linux. Für deren Nutzung ist der Zugang zu einem Rechner mit einem dieser Betriebssysteme, auf dem Maple installiert ist, erforderlich. Der Anhang A des Buches unterstützt den Maple-Anfänger bei seinen ersten Maple-Schritten. In den übrigen Maple-Kapiteln wird zum einen das Programmpaket schrittweise entwickelt. Zum anderen werden die theoretischen Inhalte des Buches durch praktische Übungen vertieft.

Die CD kann man auch ohne vorherige Lektüre des Buches nutzen. Dazu lese man den kurzen Anhang B durch und mache mit den beiden Demo-Arbeitsblättern erste Erfahrungen. Die Online-Hilfe (vgl. Anhang A) informiert über die wesentlichen Eigenschaften der Kurven und Flächen der Beispielsammlung und über die Nutzung der einzelnen Befehle des Programmpaketes. Die Erstellung der Online-Hilfe und der Demos lag vor allem in den Händen von Herrn M. Kriener.

Die wesentliche Idee des Programmpaketes sei beispielhaft beschrieben: Flächenparametrisierungen werden in der Form $(t,s) \mapsto F(t,s)$ dargestellt. Hinter dem Befehl `Katenoid` verbirgt sich z.B. eine derartige Parametrisierung eines Katenoids. Der Befehl `gauss_curvature(Katenoid)` erzeugt eine Funktion $(t,s) \mapsto K(t,s)$, welche die Gaußsche Krümmung des Katenoids (parameterbezogen) angibt. Auf diese Weise können Sie mit geringem Aufwand Beispiele durchrechnen. Der Befehl `mean_curvature(Katenoid)` erzeugt etwa den Output 0, was besagt, daß das Katenoid eine Minimalfläche ist.

Sie können aber auch `gauss_curvature(F)` für $F : (t,s) \mapsto (x(t,s),y(t,s),z(t,s))$ berechnen lassen; der Output ist dann eine allgemeine Formel, in welcher die Funktionen x, y, z und ihre partiellen Ableitungen stehen. In Abschnitt 12.4 zeigen wir, wie man aufgrund dieser abstrakten Rechenfähigkeit beweisen kann, daß die Gaußsche Krümmung eine Größe der inneren Geometrie ist. So kann Maple den Differentialgeometer auch bei der Verifikation allgemeiner Zusammenhänge unterstützen.

An dieser Stelle möchte ich meinen herzlichen Dank an Herrn P. Dombrowski aussprechen, mit dem ich fast 20 Jahre am Kölner Mathematischen Institut in einer freundschaftlichen und fruchtbaren Atmosphäre zusammenarbeiten durfte. Sicherlich hat dies meine Sicht der Differentialgeometrie und dadurch auch dieses Buch mit geprägt.

Der Datenstation unseres Instituts danken wir für ihre technische Unterstützung. Und schließlich sei Scientific Computers GmbH, Aachen, und Waterloo Maple Inc. dafür gedankt, daß sie uns zu einem frühen Zeitpunkt Maple V Release 5.0-Versionen für die verschiedenen Betriebssysteme kostenlos zur Verfügung gestellt haben.

Köln, im August 1998 *Helmut Reckziegel*