1 Grundlagen

1.1 Einführung in die Aussagenlogik

In der Sprache der Mathematik versteht man unter einer Aussage einen Satz, der entweder **wahr** oder **falsch** ist. Man benötigt Aussagen zur präzisen Darstellung von Sachverhalten. Betrachtet man beispielsweise folgende Sätze:

(a) $3 + 5 = 8$.
(b) 12 ist eine Primzahl.
(c) Sollen die Banken in Österreich verstaatlicht werden ?
(d) Im Jänner dieses Jahres stieg die Inflationsrate in Österreich um genau 1.5 % gegenüber dem Vergleichsmonat des Vorjahres an.
(e) Lösen Sie bitte das Beispiel.

Offensichtlich ist
(a) eine wahre Aussage;
(b) eine falsche Aussage;
(c) keine Aussage, da es grundsätzlich unmöglich ist zu entscheiden, ob diese Formulierung wahr oder falsch ist;
(d) eine Aussage, von der man erst feststellen muß, ob sie wahr oder falsch ist; dazu muß man in einer Zeitung die entsprechenden Werte nachlesen;
(e) eine Aufforderung, die weder wahr noch falsch ist, und daher handelt es sich um keine Aussage im Sinne der Logik.

Definition 1.1.1 Eine Formulierung A heißt **Aussage**, wenn ihr **eindeutig** entweder der **Wahrheitswert wahr (W) oder der Wahrheitswert falsch (F)** zugeordnet werden kann. Es gibt also keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist.
(Das ist der sogenannte Satz der Zweiwertigkeit bzw. das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten.)

Beispiel 1: Folgende Sätze sind wahre Aussagen; sie erhalten den Wahrheitswert **wahr**:
(a) Rationale Zahlen sind Zahlen, die sich als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lassen.
(b) Sparen ist ein Weg zur Vermögensbildung.
(c) Gilt für drei reelle Zahlen a, b und c, daß $a < b$ und $b < c$, dann ist auch $a < c$.

Beispiel 2: Folgende Sätze sind falsche Aussagen; sie erhalten den Wahrheitswert **falsch**:

(a) Jedes Rechteck ist ein Quadrat.
(b) Der Preis sinkt mit steigenden Herstellungskosten. Kalkuliert man den Preis eines Gutes mit 150 % der Herstellungskosten, so sinkt der Preis bei steigenden Herstellungskosten.

Betrachtet man die Formulierungen

"x ist eine Primzahl" oder
"Frau ... ist am ... in ... geboren",

so kann davon offensichtlich weder Wahrheit noch Falschheit behauptet werden. Setzt man jedoch für x eine natürliche Zahl ein bzw. für die Punkte Namen, Datum und Ort, so wird aus den Formulierungen jeweils eine Aussage: Z.B. "4 ist eine Primzahl" führt zu einer falschen Aussage, aber "11 ist eine Primzahl" zu einer wahren Aussage.
x bzw. die Punkte sind Symbole für einzusetzende Objekte eines bestimmten Bereiches, **Grundbereich** oder **Grundmenge** genannt. Die beiden Formulierungen haben zwar die grammatikalische Form einer Aussage, solange sie aber sogenannte Platzhalter enthalten, nennt man sie Aussageformen. Da Platzhalter verschiedene Werte annehmen können, nennt man sie Variable oder Veränderliche. Das führt zur nächsten Definition.

Definition 1.1.2
(a) Eine **Variable** über einem Grundbereich ist ein Symbol, für das die speziellen Objekte des Grundbereichs eingesetzt werden können.
Variable werden üblicherweise mit Kleinbuchstaben, beispielsweise mit $x, y, z, \xi, \eta, \ldots,$ bezeichnet.
(b) Eine mit Hilfe mindestens einer Variablen ausgedrückte Formulierung heißt **Aussageform**, wenn beim Einsetzen eines bestimmten Objektes oder Wertes für die Variable(n) eine Aussage entsteht.

Bezeichnung: Für Aussageformen mit einer Variablen schreibt man A(x), für Aussageformen mit mehreren Variablen A(x, y,...) .

Beispiel 3: Die Aussageform: "Die Vorlesung Mathematik 1 findet im Hörsaal x statt" bleibt solange eine Aussageform A(x), bis das Symbol bzw. die Variable x durch eine entsprechende Bezeichnung ersetzt wird. Setzt man für x die Bezeichnung jenes Hörsaals ein, in dem die Vorlesung tatsächlich stattfindet, so wird A(x) zu einer wahren Aussage, sonst zu einer falschen Aussage.

Beispiel 4: Die Aussageform A(x): "x ist kleiner als 7" wird für ganz bestimmte x zu einer wahren, für andere x zu einer falschen Aussage. Man kann beispielsweise sagen, "A(x) ist eine wahre Aussage für alle negativen

Zahlen" oder "A(x) gilt für alle negativen Zahlen". In diesem Sinn können wir im folgenden den Geltungsbereich für verschiedene Aussagen untersuchen.

Mathematische Lehrsätze enthalten im Zusammenhang mit Aussageformen sehr oft Worte wie "für alle ...", oder "es gibt...". Z.B. lautet der Satz von Pythagoras: "Für alle Zahlen a, b und c, die Seitenlängen eines rechtwinkeligen Dreieckes sind, wobei c die Länge der Hypotenuse bezeichnet, gilt die Aussage $a^2 + b^2 = c^2$ ". D.h. über dem Grundbereich der Zahlen, die Seitenlängen rechtwinkeliger Dreiecke sind, ist $a^2 + b^2 = c^2$ immer eine wahre Aussage.
Fällt hingegen die Einschränkung von a, b und c als Seitenlängen rechtwinkeliger Dreiecke weg, und läßt man dafür alle reellen Zahlen zu, so ist die Aussage "Für alle Zahlen gilt $a^2 + b^2 = c^2$" falsch.

Je nachdem welche Werte man für die Variablen zuläßt, wird also die obige Aussage "Für alle Zahlen gilt $a^2 + b^2 = c^2$" eine wahre oder falsche Aussage.

Definition 1.1.3 Sei A(x) eine Aussageform über einem Grundbereich I. Dann ist

(a) $\forall\, x \in I : A(x)$ oder bei bekanntem Grundbereich $\forall\, x : (A(x))$, gelesen: "Für alle x aus I gilt A(x)" oder "Für alle x gilt A(x)" - eine **Allaussage.** Diese Aussage ist wahr, wenn A(x) beim Einsetzen **jedes** beliebigen Objekts aus dem Grundbereich I zu einer wahren Aussage führt, sonst falsch.

(b) $\exists\, x \in I : A(x)$ oder bei bekanntem Grundbereich $\exists\, x : (A(x))$, gelesen: "Es gibt ein x aus I, für das A(x) gilt" oder "Es gibt ein x, für das A(x) gilt" - eine **Existenzaussage.** Diese Aussage ist wahr, wenn A(x) beim Einsetzen **mindestens eines** Objekts aus dem Grundbereich I zu einer wahren Aussage führt, sonst falsch.

Beispiel 5: Der Grundbereich I sei die Menge der reellen Zahlen und die Aussageform A(x) sei "x ist positiv".
$\forall\, x\, (A(x))$ ist offensichtlich falsch! Es sind doch keineswegs alle Zahlen positiv.
$\exists\, x\, (A(x))$ ist offensichtlich wahr. Es gibt ja sogar unendlich viele positive Zahlen.

Im folgenden werden zwei Aussagen miteinander verbunden und ihre Wahrheitswerte für die grundlegenden Aussagenverbindungen angegeben.

Definition 1.1.4 Die klassischen Aussageverbindungen:
Seien A und B zwei Aussagen, so können daraus u.a. die folgenden Verbindungen gebildet werden:

(a) Die **Negation** ~A, gelesen "nicht A", ist wahr, wenn A falsch, und falsch, wenn A wahr ist. Die Negation ist die **Verneinung** einer Aussage. (Häufig auch ¬A geschrieben)

(b) Die **Konjunktion A ∧ B**, gelesen "A und B", ist wahr, wenn A wahr **und** B wahr ist, sonst falsch. Die Konjunktion ist die **sowohl-als-auch-Verbindung** zweier Aussagen.

(c) Die **Disjunktion A ∨ B**, gelesen "A oder B", ist falsch, wenn A falsch **und** B falsch ist, sonst wahr. Die Disjunktion ist also die **oder-Verbindung** zweier Aussagen.

(d) Die **Implikation A ⇒ B**, gelesen "wenn A, dann B", ist falsch, wenn A wahr, aber B falsch ist, sonst wahr. Die Implikation ist die **logische Schlußfolgerung von einer Aussage auf die andere.** A heißt **hinreichende** Bedingung für B, und B heißt **notwendige** Bedingung für A.

(e) Die **Äquivalenz A ⇔ B**, gelesen "genau dann B, wenn A", ist wahr, wenn A denselben Wahrheitswert besitzt wie B, sonst falsch. Die Äquivalenz ist die **logische Gleichwertigkeit zweier Aussagen.**

Zusammenfassung der Aussageverbindungen mit Hilfe der folgenden Wahrheitswerttabelle:

A	B	~A	A ∧ B	A ∨ B	A ⇒ B	A ⇔ B
W	W	**F**	**W**	**W**	**W**	**W**
W	F	**F**	**F**	**W**	**F**	**F**
F	W	**W**	**F**	**W**	**W**	**F**
F	F	**W**	**F**	**F**	**W**	**W**

Bemerkung: Sind mehrere Aussagen miteinander verknüpft, so müssen zunächst die Klammern beachtet werden. Bezüglich der Reihenfolge, in der die einzelnen logischen Operationen durchzuführen sind, falls keine Klammern vorhanden sind, unterscheidet man zwischen drei verschiedenen Stufen:

1.Stufe	~
2.Stufe	∨ , ∧
3.Stufe	⇒ , ⇔

Die logischen Operationen dieser drei Stufen müssen sukzessive aufgearbeitet werden: Demnach muß die Negation einer Aussage (1.Stufe) vor der

Konjunktion und vor der Disjunktion (2.Stufe) Beachtung finden. Schließlich behandelt man zuletzt die Implikation und die Äquivalenz. (Gewissermaßen in Anlehnung an die Rechenregel: Punktrechnung vor Strichrechnung).

Beispiel 6: Interessiert etwa der Wahrheitsgehalt der Aussage:
A oder nicht A impliziert A, (A entspricht etwa der Aussage: "Der Kandidat hat bestanden"), so kann das folgendermaßen dargestellt werden:
$A \vee \sim A \Rightarrow A$

A	$\sim A$	$A \vee \sim A$	$(A \vee \sim A) \Rightarrow A$
W	F	W	W
F	W	W	F
	1. Stufe	2. Stufe	3. Stufe

Die letzte Stufe hat unterschiedliche Wahrheitswerte; dieser Implikation läßt sich demnach nur ein Aussagewert in Abhängigkeit vom Wahrheitswert von A zuordnen.

Beispiel 7: Die Aussage A: "Huber hat Deutsch als Muttersprache" wird im folgenden als wahr (W) angenommen;
Die Aussage B: "MacIntosh hat Deutsch als Muttersprache" wird im folgenden als falsch (F) angenommen.

Damit ergeben sich für die untenstehenden Aussageverbindungen folgende Wahrheitswerte:
$\sim A$: Huber hat eine andere Muttersprache als Deutsch. (F)
$A \wedge B$: Huber und MacIntosh haben beide Deutsch als Muttersprache. (F)
$A \vee B$:(Mindest) einer von den beiden hat Deutsch als Muttersprache. (W)
$A \Rightarrow B$: Wenn Huber Deutsch als Muttersprache hat, dann auch MacIntosh. (F)
$B \Rightarrow A$: Wenn MacIntosh Deutsch als Muttersprache hat, dann auch Huber. (W)!
$A \Leftrightarrow B$: Wenn einer Deutsch als Muttersprache hat, dann auch der andere. (F)

Beispiel 8: Man sucht die Aussageverbindung, die der folgenden verbalen Formulierung entspricht:
"Weder A noch B."

Die Antwort ist: $\sim (A \vee B)$
Mit Worten: Keine von beiden Aussagen ist wahr.

A	B	$(A \vee B)$	$\sim(A \vee B)$	
W	W	W	F	
W	F	W	F	
F	W	W	F	
F	F	F	W	'weder A noch B' erhält nur hier den Wert wahr

Demnach kann der Wahrheitswerttabelle entnommen werden, daß die Aussageverbindung $\sim(A \vee B)$ ausschließlich in der vierten Zeile den Wahrheitswert W erhält.
Man kann somit auch die gleichwertige Formulierung der Aussageverbindung: "Nicht A und nicht B"
wählen.

Definition 1.1.5 Eine Aussageverbindung, die unabhängig von den Wahrheitswerten der darin vorkommenden Aussagen, immer wahr ist, heißt eine **Tautologie.**
Eine Aussageverbindung, die unabhängig von den Wahrheitswerten der darin vorkommenden Aussagen, immer falsch ist, heißt eine **Kontradiktion.**

Satz 1.1.6 Folgende Aussageverbindungen sind Tautologien
(a) $\sim(\sim A) \quad \Leftrightarrow \quad A$
(b) $\sim(A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad ((\sim A) \vee (\sim B))$
(c) $\sim(A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad ((\sim A) \wedge (\sim B))$
(d) $(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad ((\sim B) \Rightarrow (\sim A))$
(e) $(A \Leftrightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
(f) $A \vee \sim A$

Beispiel 9:
Suche unter den folgenden Aussageverbindungen diejenigen, die immer wahr, also Tautologien sind:
(a) $(\sim A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\sim B \Rightarrow A)$
(b) $(A \wedge (\sim A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
(c) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \sim B) \Rightarrow \sim A$.

Im folgenden werden mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen die Antworten auf diese Fragen von Beispiel 9 jeweils zu den Punkten (a), (b) und (c) ausgearbeitet.

Antworten zu Beispiel 9:

(a) ist eine Tautologie

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$[(\sim A) \Rightarrow B]$	$[(\sim B) \Rightarrow A]$	$\Leftrightarrow$
W	W	F	F	W	W	**W**
W	F	F	W	W	W	**W**
F	W	W	F	W	W	**W**
F	F	W	W	F	F	**W**

q.e.d.

(b) ist keine Tautologie

A	B	$\sim A$	$\sim A \Rightarrow B$	$A \wedge (\sim A \Rightarrow B)$	$\Rightarrow$	
W	W	F	W	W	W	
W	F	F	W	W	**F**	!
F	W	W	W	F	W	
F	F	W	F	F	W	

q.e.d.

(c) ist eine Tautologie

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$(A \Rightarrow \sim B)$	$\wedge$	$\Rightarrow$
W	W	W	F	F	**W**
W	F	F	W	F	**W**
F	W	W	W	W	**W**
F	F	W	W	W	**W**

q.e.d.

Satz 1.1.7 Die folgenden Implikationen sind immer wahr:

(a) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(b) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

(c) $((A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow C$

(d1) $((\sim A \Rightarrow B) \wedge (\sim A \Rightarrow \sim B)) \Rightarrow A$

(d2) $(B \wedge (\sim A \Rightarrow \sim B)) \Rightarrow A$

Dieser Satz ist die Formalisierung der folgenden **Schlußregeln**:

(a) Kettenschluß,

(b) Abtrennungsregel,

(c) Fallunterscheidung,

(d1) und (d2) Indirekter Beweis .

Nun wird der Beweis zum Kettenschluß 1.1.7 (a)

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

durch sukzessives Aufstellen der Wahrheitswerttabelle gegeben, wobei der Einfachheit wegen folgende Kurzschreibweisen Verwendung finden:

$(A \Rightarrow B)$ als Teil I,
$(B \Rightarrow C)$ als Teil II,
$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C))$ als Teil III
$(A \Rightarrow C)$ als Teil IV.

A	B	C	A⇒B	B⇒C	I ∧ II	A⇒C	III⇒IV
W	W	W	W	W	W	W	**W**
W	W	F	W	F	F	F	**W**
W	F	W	F	W	F	W	**W**
W	F	F	F	W	F	F	**W**
F	W	W	W	W	W	W	**W**
F	W	F	W	F	F	W	**W**
F	F	W	W	W	W	W	**W**
F	F	F	W	W	W	W	**W**

q.e.d.

1.2 Mengen und Elemente

Wie in der Mathematik üblich, wird im weiteren die Sprechweise der Mengenlehre verwendet. Am Beginn steht daher der Begriff der "Menge", den Georg CANTOR (1845 - 1918), der Begründer der Mengenlehre, in dem Aufsatz "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" 1895 folgendermaßen definiert hat.

Definition 1.2.1 Unter einer **Menge** versteht man eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte werden **Elemente** der Menge genannt.

Für jedes Element muß entscheidbar sein, ob es zur Menge gehört oder nicht. Die Elemente müssen klar voneinander trennbar sein; eine "Menge Arbeit" ist im Sinne obiger Definition 1.2.1 keine Menge.

Üblicherweise werden Mengen mit Großbuchstaben z.B. A, M, Ω, ... und ihre Elemente mit Kleinbuchstaben, z.B. a, m, ω, ... bezeichnet.
Gehört ein Element a einer Menge A an, so schreibt man $a \in A$, andernfalls schreibt man $a \notin A$.

Beispiel 1: Bezeichnet A die Menge der österreichischen Bundesländer und a das Burgenland, b die Steiermark, sowie c den Freistaat Bayern, so gilt:

$$a \in A, b \in A, \text{ aber offensichtlich } c \notin A .$$

Im folgenden werden zwei Arten zur **Festlegung von Mengen** angegeben:

(a) Durch Aufzählen: Man gibt sämtliche Elemente der Menge an und setzt diese in eine geschlungene Klammer. Dabei ist die Reihenfolge der Elemente unwesentlich.

Beispiel 2: $M_1 = \{2, 3, 5, 7\} = \{5, 2, 7, 3\}$
$M_2 = \{\text{Diesel, Super, Eurosuper, Normalbenzin, Heizöl}\}$

(b) Durch Beschreiben: Man gibt eine Eigenschaft der Menge an, die ausschließlich die Elemente der Menge, aber keine anderen Elemente besitzen. Dies ist vor allem bei Mengen mit sehr vielen Elementen sinnvoll.

Beispiel 3: $P = \{x \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$
$Z_7 = \{x \mid x \text{ ist eine durch 7 teilbare ganze Zahl}\}$
$X = \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl und } x \text{ ist kleiner als } 5\}$
$\Omega = \{\omega \mid \omega \text{ ist Augenzahl eines Würfels}\}$.

Bezeichnung: Häufig auftretende **Zahlenmengen** werden mit eigenen Symbolen bezeichnet:

$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\boldsymbol{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\boldsymbol{Q} = \{x \mid x = m/n, \text{ mit } m \in \boldsymbol{Z} \text{ und } n \in \boldsymbol{N}\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\boldsymbol{R} = \{x \mid x \text{ reell}\}$	Menge der reellen Zahlen
$\boldsymbol{R}_+ = \{x \mid x \in \boldsymbol{R} \text{ und } x \geq 0\}$	Menge der nichtnegativen, reellen Zahlen
$\boldsymbol{R}_{++} = \{x \mid x \in \boldsymbol{R} \text{ und } x > 0\}$	Menge der positiven, reellen Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen ist die Erweiterung der Menge der natürlichen Zahlen genau um die Menge der negativen Zahlen und um die Null. Erweitert man diese Menge um die (nicht ganzzahligen) Brüche, so erhält man die Menge der rationalen Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen enthält darüber hinaus noch zusätzlich die irrationalen Zahlen, das sind die unendlichen, nicht periodischen Dezimalzahlen, wie z.B. Wurzeln usw.. Beispiele für irrationale Zahlen: Eulersche Zahl $e = 2.71828\ldots$ und die Kreiszahl $\pi = 3.14159\ldots$.

Definition 1.2.2

(a) Zwei Mengen $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ heißen **gleich**, man schreibt kurz $M_1 = M_2$, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M_2 und jedes Element von M_2 auch Element von M_1 ist.
D.h. $M_1 = M_2 \Leftrightarrow \forall x\, (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)$.
Andernfalls nennt man sie **ungleich** und schreibt $M_1 \neq M_2$.

(b) Eine Menge $\mathbf{M_1}$ heißt **Teilmenge von $\mathbf{M_2}$**, man schreibt kurz $M_1 \subseteq M_2$, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist.
D.h. $M_1 \subseteq M_2 \Leftrightarrow \forall x\, (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2)$.
Man nennt $\mathbf{M_2}$ auch **Obermenge von $\mathbf{M_1}$** und schreibt $M_2 \supseteq M_1$.

(c) Eine Menge M_1 heißt **echte Teilmenge von $\mathbf{M_2}$** , man schreibt auch kurz $M_1 \subset M_2$, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist und wenn M_2 mindestens ein Element enthält, welches nicht Element von M_1 ist. D.h. $M_1 \subset M_2 \Leftrightarrow (M_1 \subseteq M_2 \text{ und } M_1 \neq M_2)$.

Beispiel 4:

$\{x \mid x \in \boldsymbol{N} \text{ und } x \leq 3\} \subseteq \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \subset \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

Im folgenden werden spezielle Teilmengen aus $\boldsymbol{R}$ definiert, die häufig Verwendung finden:

Definition 1.2.3 Seien $r, s \in \boldsymbol{R}$, dann nennt man die Menge

(a) $[r, s] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid r \leq x \leq s\}$ ein **abgeschlossenes Intervall** von r bis s,

(b) $\langle r, s \rangle = \{x \in \boldsymbol{R} \mid r < x < s\}$ ein **offenes Intervall** von r bis s,

(c) $[r, s\rangle = \{x \in \boldsymbol{R} \mid r \leq x < s\}$ sowie
$\langle r, s] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid r < x \leq s\}$ jeweils ein **halboffenes Intervall**.

Die spitzen Klammern deuten an, daß das Element selbst nicht mehr zur Menge gehört, während die eckigen Klammern sagen, daß das Intervallende noch der Menge angehört. In jedem Fall handelt es sich bei dieser Definition um beschränkte Intervalle, im Gegensatz dazu nun die folgende Definition.

Definition 1.2.4 Ist $r \in \boldsymbol{R}$, so nennt man die Mengen

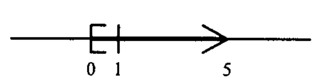
(a) $\langle r, \infty \rangle = \{x \in \boldsymbol{R} \mid r < x\}$ und $[r, \infty\rangle = \{x \in \boldsymbol{R} \mid r \leq x\}$
ein nach oben unbeschränktes Intervall,

(b) $\langle -\infty, r \rangle = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < r\}$ und $\langle -\infty, r] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \leq r\}$
ein nach unten unbeschränktes Intervall.

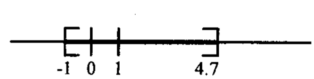
Das nach oben und unten unbeschränkte Intervall $\langle -\infty, \infty \rangle$ ist gleich $\boldsymbol{R}$ und entspricht der reellen Zahlengeraden. Jedem Punkt dieser Geraden entspricht genau eine reelle Zahl und umgekehrt.
Alle genannten Intervalle lassen sich auf dieser Zahlengeraden darstellen.

Beispiel 5:

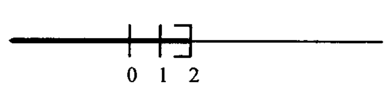
$[0, 5\rangle$ läßt sich darstellen als



$[-1, 4.7]$ läßt sich darstellen als



$\langle -\infty, 2]$ läßt sich darstellen als



Definition 1.2.5 Mengenoperationen

Seien A und B zwei Mengen, dann heißen die Mengen

(a) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Durchschnittsmenge oder **Durchschnitt von A und B.**

(b) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Vereinigungsmenge oder **Vereinigung von A und B.**

(c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Differenzmenge oder **Differenz von A und B.**

(d) Falls $A \subseteq B$ ist, so nennt man die Menge

$C_B(A) = B \setminus A$

Komplementärmenge oder **Komplement von A bezüglich B.**

Ist klar, welche Menge mit B gemeint ist, so schreibt man für $C_B(A)$ vereinfacht $\overline{\mathbf{A}}$.

Zur besseren Veranschaulichung von Mengen verwendet man häufig sogenannte **Euler-Venn-Diagramme**. Dazu werden Mengen als Teile der Ebene dargestellt, die durch Kreise oder andere geschlossene Kurven umrandet werden. Die Menge kann sowohl aus einzelnen gekennzeichneten Punkten, als auch aus allen Punkten des Flächenstückes bestehen. In den folgenden Euler-Venn-Diagrammen symbolisiert jeweils die schraffierte Fläche das Ergebnis der angeführten Mengenoperation.

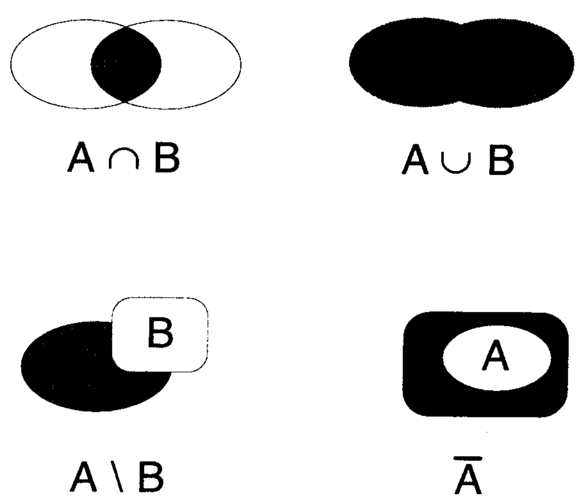


Abbildung 1: Graphische Darstellung mit Hilfe von Euler-Venn-Diagrammen

Beispiel 6:

$$\langle 1,7\rangle \cap [2,8] = [2,7\rangle$$
$$\langle 1,7\rangle \cup [2,8] = \langle 1,8]$$
$$\langle 1,7\rangle \setminus [2,8] = \langle 1,2\rangle$$
$$[2,8] \setminus \langle 1,7\rangle = [7,8]$$

Beim Bilden des Durchschnitts zweier Mengen kann es vorkommen, daß diese kein gemeinsames Element besitzen, so enthält z.B. $[1, 2] \cap [3, 4]$ kein gemeinsames Element. Um auch in diesen Fällen den Durchschnitt bilden zu können, definiert man:

Definition 1.2.6 Eine Menge, die kein Element enthält, nennt man **leere Menge**, geschrieben $\{\}$ oder $\varnothing$.
Zwei Mengen M_1 und M_2, die keine gemeinsamen Elemente haben, nennt man **elementefremd** oder **disjunkt,** und man schreibt $M_1 \cap M_2 = \{\}$.

Die leere Menge ist offensichtlich Teilmenge einer jeden Menge.

Für die Vereinigung bzw. den Durchschnitt endlich vieler Mengen wird geschrieben:

(a) $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Für die Vereinigung bzw. den Durchschnitt unendlich vieler Mengen wird geschrieben:

(b) $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$$

Beispiel 7: Gegeben sei: $A_n = \left[1 - \frac{1}{n},\ 1 + \frac{1}{n}\right]$ mit $n \in \boldsymbol{N}$

Dann ist die **Vereinigung** über alle Mengen A_n :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0,2] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right] \cup \cdots = [0,2]$$

Dann ist der **Durchschnitt** über alle Mengen A_n :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,2] \cap \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right] \cap \left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right] \cap \cdots = [1,1] = \{1\}$$

Definition 1.2.7 Eine Menge, die endlich viele Elemente besitzt, heißt **endliche** Menge, andernfalls nennt man sie eine **unendliche** Menge.

Beispiel 8:
$A = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z} \wedge x \in [0, 7]\}$ ist eine endliche Menge,
$B = \{x \mid x \in \boldsymbol{R} \wedge 0 \le x \le 7\}$ eine unendliche Menge.

Definition 1.2.8 Mächtigkeit von Mengen
Zwei (endliche oder unendliche) Mengen M_1 und M_2 heißen von **gleicher Mächtigkeit** oder **gleichmächtig**, wenn jedem Element $a \in M_1$ genau ein Element $b \in M_2$ und jedem Element $b \in M_2$ genau ein Element $a \in M_1$ zugeordnet werden kann. Man sagt, M_1 und M_2 sind aufeinander **eindeutig abbildbar**.
M_2 heißt von höherer Mächtigkeit als M_1, wenn M_1 auf eine echte Teilmenge von M_2, nicht aber auf M_2 selbst eindeutig abbildbar ist.

Beispiel 9: Jede Menge ist zu sich selbst gleichmächtig. Endliche Mengen mit gleich viel Elementen sind gleichmächtig.
Die Menge der positiven, ungeraden Zahlen ist gleichmächtig zu $\boldsymbol{N}$.

Definition 1.2.9 Ist die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M gleich n, so sagt man, die Menge M hat die **Mächtigkeit n,** und man schreibt **$|M| = n$.**

Definition 1.2.10 Eine zu der Menge der natürlichen Zahlen $\boldsymbol{N}$ gleichmächtige Menge M heißt **abzählbar unendlich**. Eine nicht abzählbare unendliche Menge nennt man **überabzählbar.**

Bemerkung: $\boldsymbol{Q}$ ist abzählbar, $\boldsymbol{R}$ ist überabzählbar.

Definition 1.2.11 Sei M eine beliebige Menge, dann heißt die Menge

$$\boldsymbol{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$$

Potenzmenge von M. Die Elemente der Potenzmenge sind ebenfalls Mengen, und zwar alle Teilmengen von M.

Satz 1.2.12 Sei M eine endliche Menge mit Mächtigkeit n, d.h. $|M| = n$, dann ist die Mächtigkeit der Potenzmenge von M also $|\boldsymbol{P}(M)| = 2^n$.

Definition 1.2.13 Eine Menge M*, die aus nichtleeren Teilmengen der Menge M besteht, heißt **Zerlegung oder Partition von M**, wenn für die Menge M* gilt, daß jedes $m \in M$ in genau einer der Teilmengen liegt.
Die Elemente von M* heißen **Klassen** (vgl. Kapitel 1.3 Relationen).

Definition 1.2.14

(a) Seien M_1 und M_2 zwei beliebige nichtleere Mengen, dann heißt die Menge

$$M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2\}$$

\- gelesen: "M_1 kreuz M_2" - **Produktmenge** oder **kartesisches Produkt** von M_1 und M_2.
(x_1, x_2) heißt **2-Tupel** oder **geordnetes Paar.** (Damit wird zum Ausdruck gebracht, daß der Reihenfolge der Elemente Bedeutung zukommt.)

(b) Seien $M_1, ..., M_n$ beliebige nichtleere Mengen, dann heißt
$M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in M_i, i = 1, ..., n\}$.
kartesisches Produkt von $M_1, M_2, ..., M_n$.
$(x_1,...,x_n)$ nennt man **n-Tupel.**

Man schreibt kürzer: $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} M_i$.
Ist $M_1 = M_2 = ... = M_n = M$, dann wird für das kartesische Produkt
$M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = M \times M \times ... \times M$ kurz M^n geschrieben.
Im allgemeinen gilt: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$.

Beispiel 10:
A = {Kopf,Zahl} $\Rightarrow$ A $\times$ A = {(Kopf,Kopf),(Kopf,Zahl),(Zahl,Kopf), (Zahl, Zahl)} .
$M_1 = \{a, b\}$; $M_2 = \{1, 3\} \Rightarrow M_1 \times M_2 = \{(a,1), (a,3), (b,1), (b,3)\}$.
$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^2$ . . . Menge der Punkte der Ebene.
$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^3$ . . . Menge der Punkte des Raumes.
Die Verallgemeinerung führt zum $\boldsymbol{R}^n$.

Definition 1.2.15 Das n-fache kartesische Produkt von $\boldsymbol{R}$, d.i. die Menge aller n-Tupel von reellen Zahlen, heißt **n-dimensionaler Raum,** kurz $\boldsymbol{R}^n$.
$\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times ... \times \boldsymbol{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \boldsymbol{R} \;\; \forall\, i=1, ..., n\}$

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n \text{ heißt } \textbf{Punkt des } \boldsymbol{R}^n.$$

Häufig interessiert, inbesonders bei ökonomischen Beispielen (vgl. Kap. 6.1, Lineare Optimierung), eine besondere Eigenschaft von Mengen, die Konvexität genannt wird und die in der Abbildung demonstriert werden soll. Die Konvexität für Teilmengen des $\boldsymbol{R}^2$ und auch $\boldsymbol{R}^3$ bedeutet anschaulich, daß mit zwei beliebigen Punkten aus der Menge auch jeder Punkt auf der Verbindungsstrecke zur Menge gehört. In der folgenden Definition wird dieser Zusammenhang für Mengen im $\boldsymbol{R}^n$ (mit n beliebig) formuliert.

Definition 1.2.16 Eine Menge $M \subseteq \boldsymbol{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für zwei beliebige Punkte $x \in M$ und $y \in M$ auch alle Punkte von

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in M \quad \text{Elemente von M sind, mit } \lambda \in [0,1] .$$

Die Definition für konvexe Mengen ist allgemein gültig im $\boldsymbol{R}^n$, veranschaulichbar aber höchstens im $\boldsymbol{R}^3$ oder noch einfacher im $\boldsymbol{R}^2$, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 11: Wie man leicht zeigen kann, ist die Menge

$$M_1 = \{(x_1, x_2) | x_1 \le 2 \wedge x_2 \le 3\}$$

eine konvexe Menge. Dagegen ist die Menge

$$M_2 = \{(x_1, x_2) | (x_1 \in [0,1] \text{ und } x_2 \text{ beliebig}) \text{oder} (x_2 \in [0,1] \wedge x_1 \ge 0)\}$$

nicht konvex. Denn es gilt beispielsweise, daß etwa die zwei Punkte x und y die Eigenschaft haben, aus der Menge M_2 zu sein, also

$$x = (3,1) \in M_2 \quad \text{und} \quad y = \left(\frac{1}{2}, 3\right) \in M_2 \quad ,$$

aber die Verbindungsstrecke verläßt die Menge M_2 !

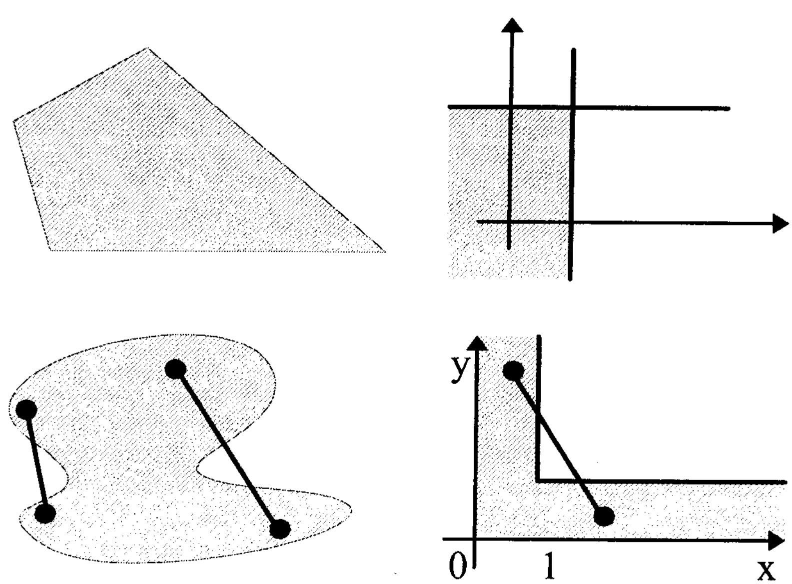


Abbildung 2: Zwei konvexe und zwei nicht konvexe Mengen im $\boldsymbol{R}^2$

Beispiel 12: Strecke, Halbgerade und Gerade sind eindimensionale, konvexe Punktmengen. Hingegen sind die Kreislinie und der Dreiecksrand nicht konvex. Die Kreisfläche, die Dreiecksfläche, sowie Halbebenen sind zweidimensionale, konvexe Punktmengen.

Bemerkung: Die konvexen Teilmengen des $\boldsymbol{R}$ sind die Intervalle.

Satz 1.2.17 Der Durchschnitt zweier nicht elementefremder, konvexer Mengen M_1 und M_2 ist wieder konvex.

Beweisskizze: Seien M_1, M_2 konvexe Punktmengen, $M_1 \neq M_2$ und P_1, P_2 zwei beliebige Punkte aus $M_1 \cap M_2$.
Da M_1 konvex ist, liegt auch die Verbindungsstrecke in M_1, also $P_1P_2 \subset M_1$ da ferner M_2 konvex ist, liegt die Verbindungsstrecke P_1P_2 in M_2, also $P_1P_2 \subset M_2$. Somit ist $P_1P_2 \subset M_1 \cap M_2$, also der Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ ist wieder konvex. □

Satz 1.2.18 Der **Durchschnitt** beliebig vieler nicht disjunkter, konvexer Mengen M_i (für i=1, ..., n)

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i$$

ist wieder konvex.

(Hingegen ist die **Vereinigung** $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ im allgemeinen **nicht konvex** !)

Bemerkung: Die n-dimensionalen Intervalle sind konvexe Teilmengen des $\boldsymbol{R}^n$; der n-dimensionale Raum $\boldsymbol{R}^n$ und die leere Menge $\varnothing$ sind konvex.

1.3 Relationen, Ordnungen und Äquivalenzrelationen

Ein in der Wirtschaft Entscheidender steht häufig vor dem Problem, unter endlich vielen möglichen Entscheidungen eine "beste" auszuwählen. Selbst wenn er für je zwei dieser Entscheidungen eindeutig sagen kann, welche davon er bevorzugt, ist damit noch nicht gewährleistet, daß es eine insgesamt "beste" Entscheidung gibt. Erst wenn die Menge aller dieser paarweisen Vergleiche zwischen den Möglichkeiten eine bestimmte Struktur besitzt, ist dies gesichert. Die Angabe solcher Beziehungen zwischen den Paaren von Elementen einer Menge, und die Feststellung, ob die damit bestimmte Struktur innerhalb der Menge der gestellten Aufgabe gerecht wird, sind mathematisch sehr einfach mit dem Begriff der Relation durchführbar.

Definition 1.3.1 Sei $\mathbf{M} \neq \{\}$ eine beliebige Menge, dann heißt eine Teilmenge $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{M} \times \mathbf{M}$ eine **Relation** oder **Beziehung in M**. Ist ein Paar $(m_1, m_2) \in R$, so schreibt man auch $\mathbf{m_1 R m_2}$ und sagt m_1 steht zu m_2 in Relation.

Beispiel 1: Für die Elemente der Menge $M = \{10, 11, 20, 21\}$ gelte $xRy \Leftrightarrow$ "x und y haben dieselbe Ziffernsumme". Die formale Angabe dieser Relation ist $R=\{(10,10), (11,11), (11,20), (20,11), (20,20), (21,21)\}$. Es gilt also 10R10, 11R11 , 11R20 u.s.w..

Relationen in endlichen Mengen kann man sehr anschaulich in der Ebene durch einen **Graphen darstellen**, indem man jedes Element von M durch einen bestimmten Punkt in der Ebene, einen sogenannten **Knoten** markiert, und für jedes Paar $(m_1, m_2) \in R$ einen **Pfeil** von m_1 nach m_2 einzeichnet.

Beispiel 2:

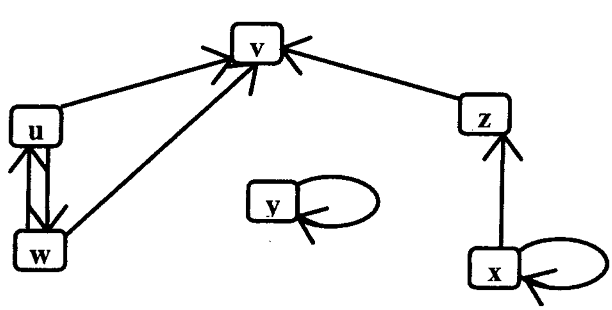


Abbildung 1: Graph einer Relation

Die formale Angabe der Relation, die in diesem Graphen dargestellt wird, ist:
$M = \{u,v,w,x,y,z\}$ und $R=\{(x,x),(y,y),(u,w),(w,u),(u,v),(w,v),(z,v),(x,z)\}$.

Durch eine Relation wird einer Menge eine bestimmte Struktur verliehen, wie beispielsweise eine Ordnung nach der Größe der Elemente, eine hierarchische Struktur oder anderes. Solche Relationen müssen jeweils bestimmte derjenigen Eigenschaften, die im Folgenden definiert werden, besitzen, da sie nur dann die mit diesem Namen verbundenen Vorstellungen erfüllen. So erwartet man von einer Relation, bei der ein Element x in Relation zu dem Element y steht, wenn "x besser als y" ist, daß, falls "a besser als b" und "b besser als c" ist, dann auch "a besser als c" ist.

Definition 1.3.2 Eigenschaften von Relationen
Eine Relation R in M ist

(a) **reflexiv**, wenn $\forall(a\in M)(aRa)$.
Jedes Element von M steht in Relation R zu sich selbst.

(b) **irreflexiv**, wenn $\forall(a\in M)(\sim aRa)$.
Kein Element von M darf zu sich selbst in Relation R stehen.

(c) **symmetrisch**, wenn $\forall(a,b\in M)(aRb \Rightarrow bRa)$.
Zwei Elemente von M, die "in der einen Richtung (aRb)" in Relation R stehen, müssen auch "in der anderen Richtung (bRa)" in Relation R stehen.

(d) **antisymmetrisch**, wenn $\forall(a,b\in M\wedge a \neq b)(aRb \Rightarrow \sim(bRa))$.
Je zwei verschiedene Elemente von M, die "in der einen Richtung" in Relation R stehen, dürfen "in der anderen Richtung" nicht in Relation R stehen.

(e) **transitiv**, wenn $\forall(a,b,c\in M)(aRb\wedge bRc \Rightarrow aRc)$.
Wenn ein Element von M zu einem zweiten und dieses zu einem dritten in Relation R steht, dann muß das erste auch zum dritten in Relation R stehen.

(f) **vollständig (konnex)**, wenn $\forall(a,b\in M\wedge a \neq b)(aRb\vee bRa)$.
Je zwei verschiedene Elemente von M müssen "in mindestens einer der beiden Richtungen (aRb oder bRa)" in Relation R stehen.

Die Relation in Beispiel 1 ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die Relation in Beispiel 2 erfüllt offensichtlich keine einzige der obigen Eigenschaften.

Beispiel 3: Die Relation "kleiner", d.h. $mRn \Leftrightarrow m < n$ in der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist offensichtlich irreflexiv, antisymmetrisch, transitiv und vollständig, da von je zwei verschiedenen natürlichen Zahlen jeweils eine kleiner als die andere ist.

Beispiel 4: Sei $M=\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}_+$ als Menge der Güterbündel mit 2 Gütern mit der folgenden Relation versehen: Ein Güterbündel $x = (x_1, x_2)$ ist mindestens so gut wie ein Güterbündel $y = (y_1, y_2)$, falls $x_1+x_2 \geq y_1+y_2$ gilt. Diese Relation besitzt nur die Eigenschaften reflexiv, transitiv und vollständig.

Beispiel 5:

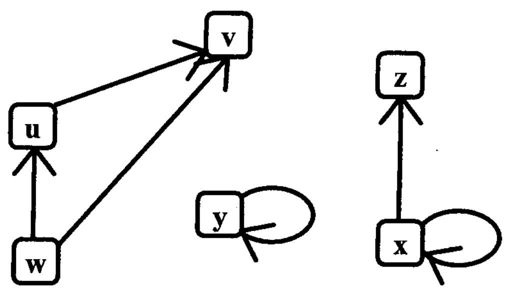


Abbildung 2: Graph einer Relation

Diese Relation ist offensichtlich antisymmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv, nicht irreflexiv, nicht symmetrisch und nicht vollständig. Wie man sieht, sind die Elemente dieser Menge durch diese Relation teilweise geordnet, denn z.B. innerhalb der drei Elemente u,v,w ist v das "oberste" Element, w das "unterste" und u liegt dazwischen, aber nicht alle Elemente sind paarweise vergleichbar. Eine solche teilweise Ordnung nennt man eine Halbordnung.

Definition 1.3.3 Eine Relation R in einer Menge M heißt

(a) **Halbordnung,** wenn sie **antisymmetrisch** und **transitiv** ist.
Bei Halbordnungen schreibt man statt aRb häufig auch $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ und sagt, a vor b .

(b) **Präordnung** oder **Quasiordnung**, wenn sie **reflexiv** und **transitiv** ist.

(c) **Ordnung** oder **strikte Ordnung**, wenn sie **irreflexiv, transitiv** und **vollständig** ist.
Bei einer Ordnung schreibt man häufig statt aRb auch $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ und sagt, a ist kleiner als b.

(d) **Reflexive Ordnung,** wenn sie **reflexiv, transitiv, antisymmetrisch** und **vollständig** ist.
Bei einer reflexiven Ordnung schreibt man häufig statt aRb auch $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ und sagt, a ist kleiner oder gleich b.

(e) **Äquivalenzrelation**, wenn sie **reflexiv**, **symmetrisch** und **transitiv** ist.
Man schreibt bei Äquivalenzrelationen statt aRb häufig auch $\mathbf{a \cong b}$ und sagt, a ist äquivalent zu b.

Alle diese speziellen Relationen sind transitiv und unterscheiden sich durch die zusätzlich erfüllten Eigenschaften. Eine Übersicht über den Zusammenhang zwischen diesen Relationen kann man Abb. 3 entnehmen. Beispielsweise ist eine Präordnung, die zusätzlich symmetrisch ist, eine Äquivalenzrelation, und eine Halbordnung, die zusätzlich irreflexiv und vollständig ist, eine strikte Ordnung. Die Antisymmetrie wird für die strikte Ordnung in Def. 1.3.3 (c) nicht explizit gefordert, weil sie sich aus der Transitivität und Irreflexivität ergibt.

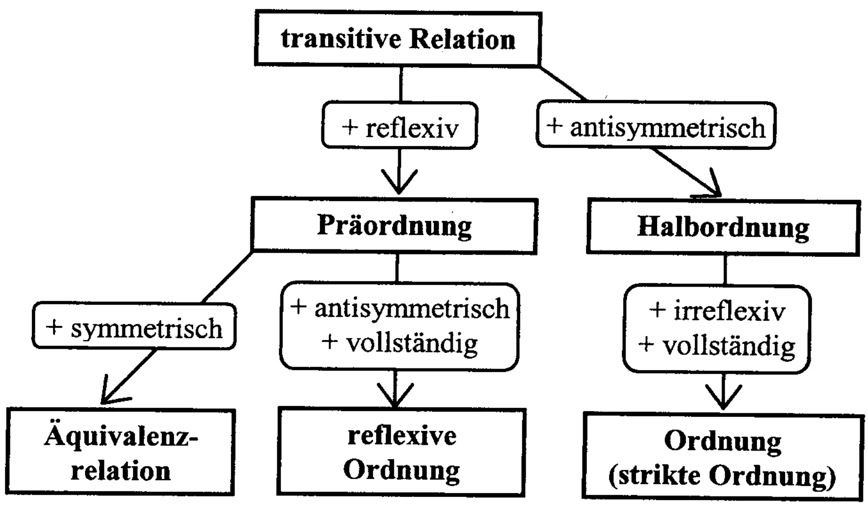


Abbildung 3: Darstellung der Relationen und ihrer Eigenschaften

Die Relationen in den bisherigen Beispielen sind in Beispiel 1 eine Äquivalenzrelation, in Beispiel 3 eine strikte Ordnung, in Beispiel 4 eine Präordnung, die vollständig ist, und in Beispiel 5 eine Halbordnung.

Beispiel 6: Die Menge der reellen Zahlen ist in natürlicher Weise durch den Größenvergleich mit Ordnungsstrukturen versehen, denn die Relation $x \leq y$ ist eine reflexive Ordnung, und die Relation $x < y$ ist eine strikte Ordnung. Benutzt man diese Größenvergleiche analog für n-Tupel von reellen Zahlen, also als Relation im $\boldsymbol{R}^n$ für $n>1$, d.h. $x \leq y$ falls $x_i \leq y_i$ für alle $i = 1,\ldots, n$, so ist diese Relation nur eine Präordnung, die zusätzlich antisymmetrisch ist, und damit ist sie auch eine Halbordnung, die zusätzlich reflexiv ist. Sie ist nicht vollständig, da beispielsweise die beiden

Punkte (2, 3, 1) und (3, 2, 1) nicht vergleichbar sind. Ebenso gilt für das strikte Ungleichheitszeichen im $\boldsymbol{R}^n$, d.h. $x < y$, falls $x \leq y$ und $x \neq y$, daß diese Relation für n>1 nur eine Halbordnung ist. Man nennt sie auch die **natürliche Halbordnung** im $\boldsymbol{R}^n$.
Bei geordneten oder (bzgl. einer Halb- oder Präordnung) teilweise geordneten Mengen interessiert man sich häufig für größte oder kleinste, bzw. beste oder schlechteste Elemente in dieser Menge oder in Teilmengen dieser Menge.

Definition 1.3.4 Sei R eine Halbordnung oder Präordnung in der Menge M, dann heißt ein Element $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$

(a) ein **maximales Element von M (bzgl. R)**, wenn für jedes Element $x \in M$, für das $(a,x) \in R$ ist, auch $(x,a) \in R$ ist,

(b) ein **minimales Element von M (bzgl. R)**, wenn für jedes Element $x \in M$, für das $(x,a) \in R$ ist, auch $(a,x) \in R$ ist.

Die prägeordnete Menge $M=\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+$ der Güterbündel in Beispiel 4 besitzt offensichtlich das (einzige) minimale Element a = (0, 0) und kein maximales Element, da man zu jedem Element ein anderes finden kann, dessen Koordinatensumme größer ist.
Ob eine Menge überhaupt ein maximales oder minimales Element besitzt, hängt natürlich wesentlich von der speziellen Struktur der Halb- oder Präordnung ab. Ist die Menge M jedoch endlich, so kann man sich leicht überlegen, daß sie z.B. maximale Elemente besitzen muß. Denn für ein beliebiges Element a, das nicht maximal ist, muß es ein von a verschiedenes Element b geben, mit aRb und nicht bRa (sonst wären beide maximal). Ist b nun auch nicht maximal, so muß es ein weiteres Element c geben mit bRc, usw.. Da die Menge endlich ist, findet man bei dieser Vorgangsweise nach endlich vielen Schritten ein maximales Element. Analoges gilt für minimale Elemente.

Folgerung 1.3.5 Ist M eine endliche, halb- oder prägeordnete Menge, so besitzt M mindestens ein minimales und mindestens ein maximales Element.

Das durch den Graph in Abb. 2 dargestellte Beispiel besitzt die maximalen Elemente v,y,z, weil kein Pfeil von diesen Elementen zu einem anderen Element existiert, sowie die minimalen Elemente w,y,x. Das Element y ist sowohl maximales als auch minimales Element, da es nur zu sich selbst in Relation steht.
Die Frage nach maximalen oder minimalen Elementen kann man natürlich auch für vollständig geordnete Mengen stellen, da eine strikte Ordnung

auch eine Halbordnung bzw. eine reflexive Ordnung auch eine Präordnung ist. Die "kleiner" Relation aus Beispiel 6 in der Menge $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen wurde schon in Beispiel 3 benutzt, um die Menge $\boldsymbol{N}$ der natürlichen Zahlen mit einer strikten Ordnung zu versehen. In $\boldsymbol{N}$ ist die 1 das einzige minimale Element, maximale Elemente gibt es keine. Diese Eigenschaft, daß es in geordneten Mengen bzw. in Teilmengen von solchen wenn überhaupt nur ein einziges maximales oder minimales Element gibt, gilt allgemein. Deshalb spricht man dort statt von minimalem bzw. maximalem Element von dem Minimum bzw. dem Maximum.

Definition 1.3.6 Sei M eine bezüglich R geordnete Menge und $L \subseteq M$ eine Teilmenge von M, dann heißt **a** $\in$ **M**

(a) eine **obere Schranke von L**, wenn $\forall(x \in L)$ (a nicht kleiner als x),

(b) eine **untere Schranke von L**, wenn $\forall(x \in L)$ (x nicht kleiner als a).

Beispiel 7: Sei die Menge $M = \boldsymbol{R}^2$ mit der **lexikographischen Ordnung** versehen, d.h. für je zwei Punkte $x^1, x^2 \in \boldsymbol{R}^2$ gilt:

$$x^1 <_{\text{lex}} x^2 \Leftrightarrow (x_1^1 < x_1^2) \vee ((x_1^1 = x_1^2) \wedge (x_2^1 < x_2^2)),$$

man vergleicht also zunächst die ersten Komponenten der beiden Punkte und falls diese gleich sind, die zweiten Komponenten. Als Teilmenge von M wird die Menge $L = \{\, x \in \boldsymbol{R}^2 \mid |x| < 1 \,\}$, die Menge der inneren Punkte des Einheitskreises betrachtet.. Wie man in der Skizze in Abb. 4 sieht, ist jeder Punkt $a = (a_1, a_2)$ mit $a_1 \leq -1$ eine untere Schranke von L und jeder Punkt mit $a_1 \geq 1$ eine obere Schranke von L. Es gibt jedoch keine untere oder obere Schranke, die auch ein Element von L ist. Wäre L um die Punkte auf dem Rand des Einheitskreises erweitert, so wäre der Punkt (1, 0) die einzige obere Schranke, die auch ein Element von L ist. Ebenso wäre (–1, 0) die einzige untere Schranke, die auch ein Element von L ist.

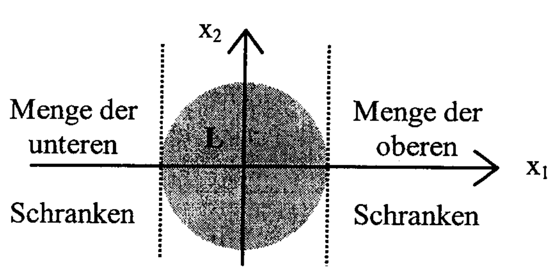


Abbildung 4: Skizze zu Beispiel 7

Satz 1.3.7 Eine Teilmenge L einer geordneten Menge M enthält höchstens eine ihrer oberen, sowie höchstens eine ihrer unteren Schranken.

Definition 1.3.8 Es sei L eine Teilmenge einer geordneten Menge M.

(a) Ist die Menge der oberen Schranken von L nicht leer, so heißt eine obere Schranke $a \in M$ das **Supremum von L**, falls a ein **minimales Element in der Menge der oberen Schranken**, also die kleinste obere Schranke ist. Ist a auch Element vom L, so heißt a **Maximum von L**.

(b) Ist die Menge der unteren Schranken von L nicht leer, so heißt eine untere Schranke $a \in M$ das **Infimum von L**, falls a ein **maximales Element in der Menge der unteren Schranken**, also die größte untere Schranke ist. Ist a auch Element vom L, so heißt a **Minimum von L**.

In Beispiel 7 gibt es kein Maximum und kein Minimum. Es existiert aber auch weder das Supremum noch das Infimum, denn z.B. ist jeder Punkt (1,y) für bliebig kleine y eine obere Schranke von L. Somit existiert keine kleinste obere Schranke. Hätte man die Menge M z.B. auf die Menge der Punkte (x_1, x_2) mit $-2 \leq x_2 \leq 2$ eingeschränkt, dann wäre $(1, -2)$ das Supremum und $(-1, 2)$ das Infimum von L gewesen.

Beispiel 8: Es sei $M = \boldsymbol{R}$ mit der natürlichen Ordnung versehen, d.h. xRy, wenn $x<y$ ist, und $L = \langle 0, 1]$ das halboffene Intervall. Dann sind alle $x \geq 1$ obere Schranken, und $x = 1$ ist die kleinste obere Schranke und somit das Supremum, aber auch das Maximum von L, da $1 \in L$ ist. Analog sind alle $x \leq 0$ untere Schranken, somit ist $x = 0$ als größte untere Schranke das Infimum von L, aber das Minimum existiert nicht, da $0 \notin L$ ist.

Bemerkung: Wenn das Maximum oder das Mimimum einer Teilmenge einer geordneten Menge existiert, dann ist dieses Element jeweils auch das Supremum bzw. Infimum dieser Teilmenge. Existiert das Maximum bzw. Minimum nicht, dann kann das Supremum bzw. Infimum trotzdem existieren.

Definition 1.3.9 Sei R eine Äquivalenzrelation in M und a ein Element von M, dann heißt die folgende Teilmenge von M

$$[a]_R = \{x \in M \mid x \equiv a \quad \text{bzgl. } R\}$$

eine **Äquivalenzklasse**.

Beispiel 9: Die in Abb. 5 durch den Graphen angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation. Die drei Äquivalenzklassen sind $[x]_R = \{x, z\} = [z]_R$ $[y]_R = \{y\}$, und $[u]_R = \{u, v, w\} = [v]_R = [w]_R$. Wie man sieht, bilden die drei Äquivalenzklassen eine Zerlegung der Menge M. Diese Eigenschaft hat jede Äquivalenzrelation.

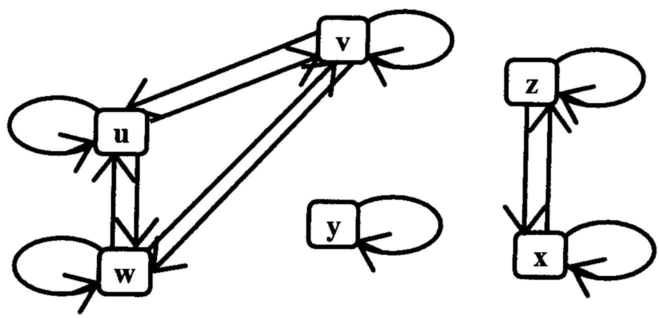


Abbildung 5: Graph einer Äquivalenzrelation

Bemerkung: Die Menge aller Äquivalenzklassen ist eine Zerlegung der Menge M. Ebenso ist umgekehrt durch eine gegebene Zerlegung von einer Menge M eindeutig eine solche Äquivalenzrelation in M bestimmt, die genau die Zerlegungsmengen als Äquivalenzklassen besitzt, indem man festlegt, daß je zwei Elemente $a,b \in M$ genau dann äquivalent sind, wenn sie beide ein Element derselben Zerlegungsmenge sind.

In der Konsumtheorie bzw. der Entscheidungstheorie werden Präferenzvorstellungen zwischen den Elementen von Mengen betrachtet. Für die mathematische Formulierung solcher Präferenzen benutzt man die folgenden Relationen:

Definition 1.3.10 Präferenz- und Indifferenzrelation in M
Eine **Präferenzrelation** $P \subseteq M \times M$ **ist eine vollständige Präordnung.** Sie heißt **Präferenzordnung**, wenn sie **eine reflexive Ordnung ist**. Man schreibt $a \preceq b$ für $(a,b) \in P$ und sagt, "b wird gegenüber a präferiert oder als gleichwertig betrachtet". Durch eine Präferenzrelation sind die beiden folgenden, damit zusammenhängenden Relationen erklärt.

(a) **Indifferenzrelation** $\quad I = \left\{(a,b) \in P \,\middle|\, (a,b) \in P \wedge (b,a) \in P\right\} \subseteq P$.

Die Indifferenzrelation ist eine Äquivalenzrelation. Man bezeichnet hier die Äquivalenzklassen als **Indifferenzklassen.**

(b) **Strikte Präferenzrelation** $\quad SP = P \setminus I \subseteq M \times M$.

Diese hat offensichtlich die Eigenschaften transitiv und antisymmetrisch, und ist somit eine Halbordnung in M. Zwischen den Indifferenzklassen ist durch diese strikte Präferenzrelation eine strikte Ordnung gegeben.

Die Relation in Beispiel 4 war eine vollständige Präordnung in der Menge der Güterbündel und kann somit als Präferenzrelation interpretiert werden. Ein Güterbündel x wird einem Güterbündel y gegenüber strikt präferiert, wenn $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$ ist, und man ist indifferent zwischen zwei Güterbündeln, wenn ihre jeweiligen Koordinatensummen gleich sind.

Beispiel 10:

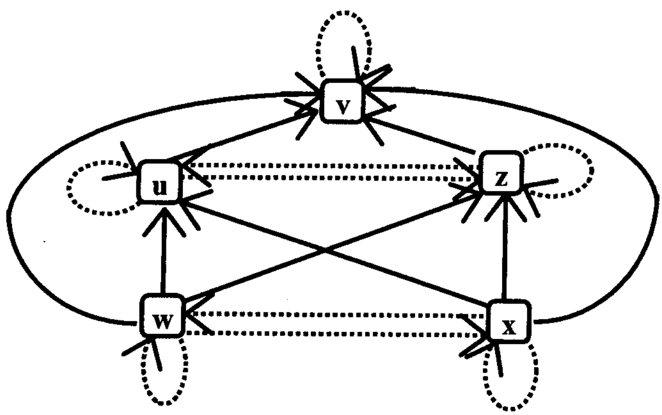


Abbildung 6: Graph eine Präferenzrelation

Die strichlierten Pfeile geben die Indifferenzrelation I an, diese besitzt die drei Indifferenzklassen $[w]_I = \{w,x\}$, $[u]_I = \{u,z\}$ und $[v]_I = \{v\}$. Die strikte Präferenzrelation ist hier mit den durchgezogenen Pfeilen angegeben und ordnet die drei Indifferenzklassen wie folgt: $[w]_I < [u]_I < [v]_I$. In der Menge M gibt es bzgl. dieser Präferenzrelation genau ein maximales Element, das Element v, und die zwei minimalen Elemente w und x.

Bemerkung: Nach Satz 1.3.5 besitzt eine Präferenzrelation in einer endlichen Menge mindestens ein maximales Element, sowie mindestens ein minimales Element. Ist die Präferenzrelation eine Präferenzordnung, so gibt es sogar genau ein minimales und genau ein maximales Element in M.

Die dieses Kapitel einleitende Frage, auf welcher Basis ein in der Wirtschaft Entscheidender unter endlich vielen Möglichkeiten eine "beste" Entscheidung treffen kann, ist also damit zu beantworten, daß in der Menge aller möglichen Entscheidungen zumindest eine Präferenzrelation gegeben sein muß. Dann gibt es mindestes eine "beste" Entscheidung, u.U. mehrere, unter denen er indifferent ist. Besser wäre natürlich eine Präferenzordnung, denn dann gäbe es genau eine "beste" Entscheidung.