

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Vorwort</b>                                                    | <b>v</b>  |
| <b>1 Einführung</b>                                               | <b>1</b>  |
| 1.1 Wo braucht man Statistik? . . . . .                           | 1         |
| 1.2 Was macht man mit Statistik? . . . . .                        | 11        |
| 1.3 Was steht am Anfang? . . . . .                                | 14        |
| 1.3.1 Statistische Einheiten, Merkmale und Gesamtheiten . . . . . | 14        |
| 1.3.2 Merkmalstypen . . . . .                                     | 16        |
| Stetige und diskrete Merkmale . . . . .                           | 16        |
| Skalen . . . . .                                                  | 17        |
| Quantitative und qualitative Merkmale . . . . .                   | 19        |
| 1.4 Wie gewinnt man Daten? . . . . .                              | 20        |
| 1.4.1 Elemente der Versuchsplanung . . . . .                      | 21        |
| 1.4.2 Datengewinnung und Erhebungsarten . . . . .                 | 23        |
| Einfache Zufallsstichproben . . . . .                             | 25        |
| Geschichtete Zufallsstichproben . . . . .                         | 26        |
| Klumpenstichprobe . . . . .                                       | 26        |
| Mehrstufige Auswahlverfahren . . . . .                            | 27        |
| Bewußte Auswahlverfahren . . . . .                                | 27        |
| Studiendesigns . . . . .                                          | 28        |
| 1.5 Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                     | 28        |
| 1.6 Aufgaben . . . . .                                            | 29        |
| <b>2 Univariate Deskription und Exploration von Daten</b>         | <b>31</b> |
| 2.1 Verteilungen und ihre Darstellungen . . . . .                 | 31        |
| 2.1.1 Häufigkeiten . . . . .                                      | 32        |
| 2.1.2 Graphische Darstellungen . . . . .                          | 35        |
| Stab- und Kreisdiagramme . . . . .                                | 35        |
| Stamm-Blatt-Diagramme . . . . .                                   | 37        |
| Histogramme . . . . .                                             | 40        |
| Unimodale und multimodale Verteilungen . . . . .                  | 46        |

|          |                                                                               |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
|          | Symmetrie und Schiefe . . . . .                                               | 48         |
| 2.1.3    | Kumulierte Häufigkeitsverteilung und empirische Verteilungsfunktion . . . . . | 49         |
| 2.2      | Beschreibung von Verteilungen . . . . .                                       | 52         |
| 2.2.1    | Lagemaße . . . . .                                                            | 53         |
|          | Arithmetisches Mittel . . . . .                                               | 53         |
|          | Median . . . . .                                                              | 55         |
|          | Modus . . . . .                                                               | 56         |
|          | Berechnung der Lagemaße bei gruppierten Daten . . . . .                       | 58         |
|          | Lageregeln . . . . .                                                          | 60         |
|          | Das geometrische Mittel . . . . .                                             | 61         |
|          | Das harmonische Mittel . . . . .                                              | 63         |
|          | Das getrimmte Mittel . . . . .                                                | 64         |
| 2.2.2    | Quantile und Box-Plot . . . . .                                               | 64         |
| 2.2.3    | Standardabweichung, Varianz und Variationskoeffizient . . . . .               | 69         |
| 2.2.4    | Maßzahlen für Schiefe und Wölbung . . . . .                                   | 74         |
| 2.3      | Konzentrationsmaße . . . . .                                                  | 76         |
| 2.3.1    | Relative Konzentration: Lorenzkurve und Gini-Koeffizient . . . . .            | 77         |
|          | Lorenzkurve aus den geordneten Daten . . . . .                                | 77         |
|          | Lorenzkurve bei gruppierten Daten . . . . .                                   | 80         |
|          | Gini-Koeffizient . . . . .                                                    | 81         |
| 2.3.2    | Alternative Konzentrationsmaße . . . . .                                      | 85         |
|          | Konzentrationsrate $CR_g$ . . . . .                                           | 85         |
|          | Herfindahl-Index . . . . .                                                    | 86         |
| 2.4      | Dichtekurven und Normalverteilung . . . . .                                   | 87         |
| 2.4.1    | Dichtekurven . . . . .                                                        | 87         |
| 2.4.2    | Normalverteilungen . . . . .                                                  | 90         |
|          | *Normal-Quantil-Plots . . . . .                                               | 95         |
| *2.4.3   | Approximation von Dichtekurven . . . . .                                      | 98         |
| 2.5      | Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                                     | 102        |
| 2.6      | Aufgaben . . . . .                                                            | 104        |
| <b>3</b> | <b>Multivariate Deskription und Exploration</b> . . . . .                     | <b>109</b> |
| 3.1      | Diskrete und gruppierte Merkmale . . . . .                                    | 109        |
| 3.1.1    | Zweidimensionale Daten: Die Kontingenztafel . . . . .                         | 109        |
| 3.1.2    | Bedingte Häufigkeiten . . . . .                                               | 115        |
| 3.2      | Zusammenhangsanalyse in Kontingenztafeln . . . . .                            | 119        |
| 3.2.1    | Chancen und relative Chancen . . . . .                                        | 119        |
| 3.2.2    | Kontingenz- und $\chi^2$ -Koeffizient . . . . .                               | 122        |
| 3.3      | Graphische Darstellungen quantitativer Merkmale . . . . .                     | 127        |

|          |                                                                               |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3.1    | Streudiagramm . . . . .                                                       | 128        |
| 3.3.2    | Zweidimensionale Histogramme und Dichten . . . . .                            | 130        |
| 3.3.3    | Mehrdimensionale Darstellungen . . . . .                                      | 133        |
| 3.4      | Zusammenhangsmaße bei metrischen Merkmalen . . . . .                          | 134        |
| 3.4.1    | Empirischer Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson . . . . .            | 134        |
| 3.4.2    | Spearman's Korrelationskoeffizient . . . . .                                  | 141        |
| 3.4.3    | Invarianzeigenschaften . . . . .                                              | 146        |
| 3.5      | Korrelation und Kausalität . . . . .                                          | 147        |
| 3.6      | Regression . . . . .                                                          | 152        |
| 3.6.1    | Das lineare Regressionsmodell . . . . .                                       | 152        |
| 3.6.2    | Die Berechnung der Ausgleichsgeraden . . . . .                                | 153        |
| 3.6.3    | Bestimmtheitsmaß und Residualanalyse . . . . .                                | 158        |
| *3.6.4   | Nichtlineare Regression . . . . .                                             | 165        |
| 3.7      | Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                                     | 167        |
| 3.8      | Aufgaben . . . . .                                                            | 169        |
| <b>4</b> | <b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>                                            | <b>173</b> |
| 4.1      | Definition und Begriff der Wahrscheinlichkeit . . . . .                       | 174        |
| 4.1.1    | Mengen und Mengenoperationen . . . . .                                        | 175        |
| 4.1.2    | Zufallsereignisse . . . . .                                                   | 179        |
| 4.1.3    | Wahrscheinlichkeiten . . . . .                                                | 181        |
| 4.2      | Zur empirischen Interpretation von Wahrscheinlichkeiten . . . . .             | 187        |
| 4.2.1    | Die Laplace-Wahrscheinlichkeit . . . . .                                      | 188        |
| 4.2.2    | Objektive Wahrscheinlichkeiten als Grenzwert relativer Häufigkeiten . . . . . | 191        |
| 4.2.3    | Subjektive Wahrscheinlichkeiten . . . . .                                     | 194        |
| 4.3      | Zufallsstichproben und Kombinatorik . . . . .                                 | 195        |
| 4.3.1    | Modell mit Zurücklegen . . . . .                                              | 196        |
| 4.3.2    | Modell ohne Zurücklegen . . . . .                                             | 197        |
| 4.3.3    | Permutationen . . . . .                                                       | 198        |
| 4.3.4    | Modell ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge . . . . .   | 199        |
| 4.4      | Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . . .                                       | 202        |
| 4.5      | Unabhängigkeit von zwei Ereignissen . . . . .                                 | 206        |
| 4.6      | Totale Wahrscheinlichkeit . . . . .                                           | 209        |
| 4.7      | Der Satz von Bayes . . . . .                                                  | 211        |
| 4.8      | Unendliche Grundgesamtheiten . . . . .                                        | 216        |
| 4.9      | Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                                     | 219        |
| 4.10     | Aufgaben . . . . .                                                            | 220        |

|          |                                                                                     |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b> | <b>Diskrete Zufallsvariablen</b>                                                    | <b>223</b> |
| 5.1      | Zufallsvariablen . . . . .                                                          | 224        |
| 5.2      | Verteilungen und Parameter von diskreten Zufallsvariablen . . . . .                 | 227        |
| 5.2.1    | Definition und Verteilung . . . . .                                                 | 227        |
|          | Diskrete Gleichverteilung . . . . .                                                 | 234        |
|          | Geometrische Verteilung . . . . .                                                   | 234        |
| 5.2.2    | Unabhängigkeit von diskreten Zufallsvariablen . . . . .                             | 238        |
| 5.2.3    | Lageparameter, Quantile und Streuungsparameter einer diskreten Verteilung . . . . . | 242        |
|          | Erwartungswert . . . . .                                                            | 242        |
| 5.2.4    | Weitere Lageparameter . . . . .                                                     | 247        |
|          | Varianz und Standardabweichung . . . . .                                            | 248        |
| 5.3      | Spezielle diskrete Verteilungsmodelle . . . . .                                     | 252        |
| 5.3.1    | Die Binomialverteilung . . . . .                                                    | 253        |
| 5.3.2    | Die hypergeometrische Verteilung . . . . .                                          | 258        |
| 5.3.3    | Die Poisson-Verteilung . . . . .                                                    | 260        |
| 5.4      | Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                                           | 265        |
| 5.5      | Aufgaben . . . . .                                                                  | 267        |
| <b>6</b> | <b>Stetige Zufallsvariablen</b>                                                     | <b>269</b> |
| 6.1      | Definition und Verteilung . . . . .                                                 | 269        |
|          | Unabhängigkeit von stetigen Zufallsvariablen . . . . .                              | 275        |
|          | Exponentialverteilung . . . . .                                                     | 279        |
| 6.2      | Lageparameter, Quantile und Varianz von stetigen Zufallsvariablen . . . . .         | 282        |
|          | Erwartungswert . . . . .                                                            | 282        |
|          | Modus . . . . .                                                                     | 286        |
|          | Median und Quantile . . . . .                                                       | 286        |
|          | Varianz . . . . .                                                                   | 288        |
|          | Standardisierung von Zufallsvariablen . . . . .                                     | 291        |
|          | Symmetrie und Schiefe . . . . .                                                     | 291        |
| 6.3      | Spezielle stetige Verteilungsmodelle . . . . .                                      | 293        |
| 6.3.1    | Die Normalverteilung . . . . .                                                      | 293        |
|          | Quantile . . . . .                                                                  | 296        |
| 6.3.2    | Die logarithmische Normalverteilung . . . . .                                       | 301        |
| 6.3.3    | Chi-Quadrat-, Student- und Fisher-Verteilung . . . . .                              | 301        |
|          | Die Chi-Quadrat-Verteilung . . . . .                                                | 302        |
|          | Die Student-Verteilung . . . . .                                                    | 303        |
|          | Die Fisher-Verteilung . . . . .                                                     | 305        |
| 6.4      | Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                                           | 307        |
| 6.5      | Aufgaben . . . . .                                                                  | 308        |

|          |                                                                      |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>7</b> | <b>Mehr über Zufallsvariablen und Verteilungen</b>                   | <b>311</b> |
| 7.1      | Gesetz der großen Zahlen und Grenzwertsätze . . . . .                | 311        |
| 7.1.1    | Das Gesetz der großen Zahlen und der Hauptsatz der Statistik . . . . | 313        |
| 7.1.2    | Der zentrale Grenzwertsatz . . . . .                                 | 315        |
| 7.2      | Approximation von Verteilungen . . . . .                             | 318        |
| *7.3     | Zufallszahlen und Simulation . . . . .                               | 321        |
| *7.4     | Einige Ergänzungen . . . . .                                         | 324        |
| 7.4.1    | Zufallsvariablen als Abbildungen . . . . .                           | 324        |
| 7.4.2    | Verteilungsfunktion und ihre Eigenschaften . . . . .                 | 326        |
| 7.4.3    | Ungleichung von Tschebyscheff . . . . .                              | 328        |
| 7.4.4    | Maßzahlen für Schiefe und Wölbung . . . . .                          | 330        |
| 7.5      | Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                            | 331        |
| 7.6      | Aufgaben . . . . .                                                   | 332        |
| <b>8</b> | <b>Mehrdimensionale Zufallsvariablen</b>                             | <b>335</b> |
| 8.1      | Begriff mehrdimensionaler Zufallsvariablen . . . . .                 | 335        |
| 8.2      | Zweidimensionale diskrete Zufallsvariablen . . . . .                 | 338        |
| 8.3      | Zweidimensionale stetige Zufallsvariablen . . . . .                  | 344        |
| 8.4      | Unabhängigkeit von Zufallsvariablen . . . . .                        | 346        |
| 8.5      | Kovarianz und Korrelation . . . . .                                  | 349        |
| 8.6      | Die zweidimensionale Normalverteilung . . . . .                      | 357        |
| 8.7      | Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                            | 361        |
| 8.8      | Aufgaben . . . . .                                                   | 361        |
| <b>9</b> | <b>Parameterschätzung</b>                                            | <b>363</b> |
| 9.1      | Punktschätzung . . . . .                                             | 364        |
| 9.2      | Eigenschaften von Schätzstatistiken . . . . .                        | 366        |
| 9.2.1    | Erwartungstreue . . . . .                                            | 367        |
| 9.2.2    | Erwartete mittlere quadratische Abweichung und Konsistenz . . . .    | 370        |
| 9.2.3    | Wirksamste Schätzstatistiken . . . . .                               | 374        |
| 9.3      | Konstruktion von Schätzfunktionen . . . . .                          | 376        |
| 9.3.1    | Maximum Likelihood-Schätzung . . . . .                               | 376        |
| 9.3.2    | Kleinste-Quadrate-Schätzung . . . . .                                | 379        |
| 9.3.3    | Bayes-Schätzung . . . . .                                            | 380        |
| 9.4      | Intervallschätzung . . . . .                                         | 385        |
| 9.4.1    | Konfidenzintervalle für Erwartungswert und Varianz . . . . .         | 387        |
| 9.4.2    | Konfidenzintervalle für den Anteilswert . . . . .                    | 392        |
| 9.5      | Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                            | 393        |
| 9.6      | Aufgaben . . . . .                                                   | 394        |

|                                                             |            |
|-------------------------------------------------------------|------------|
| <b>10 Testen von Hypothesen</b>                             | <b>397</b> |
| 10.1 Der Binomial- und der Gauß-Test . . . . .              | 397        |
| 10.1.1 Der exakte Binomialtest . . . . .                    | 401        |
| 10.1.2 Der approximative Binomialtest . . . . .             | 404        |
| 10.1.3 Der Gauß-Test . . . . .                              | 408        |
| 10.2 Prinzipien des Testens . . . . .                       | 411        |
| 10.2.1 Fehlentscheidungen . . . . .                         | 415        |
| 10.2.2 Statistische Tests und Konfidenzintervalle . . . . . | 418        |
| 10.2.3 Überschreitungswahrscheinlichkeit . . . . .          | 419        |
| 10.2.4 Gütefunktion . . . . .                               | 420        |
| *Multiple Testprobleme . . . . .                            | 427        |
| 10.3 Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .              | 428        |
| 10.4 Aufgaben . . . . .                                     | 430        |
| <b>11 Spezielle Testprobleme</b>                            | <b>433</b> |
| 11.1 Ein-Stichproben-Fall . . . . .                         | 435        |
| 11.1.1 Tests zu Lagealternativen . . . . .                  | 435        |
| 11.1.2 Anpassungstests . . . . .                            | 445        |
| 11.2 Vergleiche aus unabhängigen Stichproben . . . . .      | 454        |
| 11.2.1 Tests zu Lagealternativen . . . . .                  | 455        |
| 11.2.2 $\chi^2$ -Homogenitätstest . . . . .                 | 462        |
| 11.3 Vergleiche aus verbundenen Stichproben . . . . .       | 465        |
| 11.4 Zusammenhangsanalyse . . . . .                         | 466        |
| 11.4.1 $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest . . . . .              | 467        |
| 11.4.2 Korrelation bei metrischen Merkmalen . . . . .       | 469        |
| 11.5 Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .              | 471        |
| 11.6 Aufgaben . . . . .                                     | 472        |
| <b>12 Regressionsanalyse</b>                                | <b>475</b> |
| 12.1 Lineare Einfachregression . . . . .                    | 476        |
| 12.1.1 Das Modell der linearen Einfachregression . . . . .  | 476        |
| 12.1.2 Schätzen, Testen und Prognose . . . . .              | 480        |
| Schätzen . . . . .                                          | 480        |
| Testen . . . . .                                            | 485        |
| Prognose . . . . .                                          | 488        |
| 12.1.3 Residualanalyse . . . . .                            | 490        |
| 12.2 Multiple lineare Regression . . . . .                  | 493        |
| 12.2.1 Das multiple lineare Regressionsmodell . . . . .     | 494        |
| 12.2.2 Schätzen, Testen und Prognose . . . . .              | 496        |
| Schätzen . . . . .                                          | 496        |

|                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------|------------|
| Testen . . . . .                                                  | 499        |
| Prognose . . . . .                                                | 502        |
| *12.2.3 Multiple lineare Regression in Matrixnotation . . . . .   | 503        |
| 12.3 Binäre Regression . . . . .                                  | 506        |
| *12.4 Nichtlineare und nichtparametrische Regression . . . . .    | 508        |
| 12.5 Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                    | 513        |
| 12.6 Aufgaben . . . . .                                           | 514        |
| <b>13 Varianzanalyse</b>                                          | <b>517</b> |
| 13.1 Einfaktorielle Varianzanalyse . . . . .                      | 519        |
| Modellformulierung (I) . . . . .                                  | 520        |
| Modellformulierung (II) . . . . .                                 | 521        |
| 13.2 Zweifaktorielle Varianzanalyse mit festen Effekten . . . . . | 528        |
| Modellformulierung (I) . . . . .                                  | 530        |
| Modellformulierung (II) . . . . .                                 | 531        |
| 13.3 Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                    | 542        |
| 13.4 Aufgaben . . . . .                                           | 543        |
| <b>14 Zeitreihen</b>                                              | <b>547</b> |
| 14.1 Indizes . . . . .                                            | 550        |
| 14.2 Komponentenmodelle . . . . .                                 | 553        |
| 14.3 Globale Regressionsansätze . . . . .                         | 555        |
| 14.3.1 Trendbestimmung . . . . .                                  | 556        |
| 14.3.2 Bestimmung der Saisonkomponente . . . . .                  | 557        |
| 14.4 Lokale Ansätze . . . . .                                     | 559        |
| 14.4.1 Trendbestimmung . . . . .                                  | 560        |
| Gleitende Durchschnitte . . . . .                                 | 560        |
| Lokale Regression . . . . .                                       | 561        |
| *Spline-Glättung . . . . .                                        | 563        |
| 14.4.2 Bestimmung der Saisonkomponente . . . . .                  | 566        |
| Gleitende Durchschnitte und lokale Regression . . . . .           | 566        |
| *Spline-Glättung . . . . .                                        | 568        |
| 14.5 Zusammenfassung und Bemerkungen . . . . .                    | 569        |
| 14.6 Aufgaben . . . . .                                           | 569        |

|                                           |            |
|-------------------------------------------|------------|
| <b>Tabellen</b>                           | <b>573</b> |
| A Standardnormalverteilung . . . . .      | 573        |
| B Binomialverteilung . . . . .            | 574        |
| C $\chi^2$ -Verteilung . . . . .          | 583        |
| D Students $t$ -Verteilung . . . . .      | 584        |
| E $F$ -Verteilung . . . . .               | 585        |
| F Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test . . . . . | 590        |
| G Wilcoxon-Rangsummen-Test . . . . .      | 591        |
| <b>Literatur</b>                          | <b>593</b> |
| <b>Verzeichnis der Beispiele</b>          | <b>597</b> |
| <b>Sachregister</b>                       | <b>603</b> |