
Allgemeines Vorwort

Die vorliegende Einführung in die Experimentalphysik entstand aus den Kursvorlesungen Physik I-III an der Universität Hamburg, die sich an Studierende der Physik, Geowissenschaften und Mathematik mit dem Studienziel Diplom oder Höheres Lehramt richten und in den ersten drei Studiensemestern gehört werden sollen. Diese Vorlesungen wurden von den drei Autoren über mehr als zwei Jahrzehnte regelmäßig gehalten und fortlaufend den Bedürfnissen dieses Hörerkreises angepasst. Der Stoff wurde in Vorlesungen von 2×2 Semesterwochenstunden angeboten; die typischerweise ca. 10 Demonstrationsversuche je Doppelstunde dienten dem qualitativen Verständnis der Phänomene. Die Studierenden erhielten vorlesungsbegleitende Skripten, die die Autoren aufeinander abstimmten, ihnen aber ansonsten ihre individuellen Stile beließen. Mathematische Herleitungen wurden nur dann geboten, wenn sie kurz und prägnant waren; ansonsten haben wir für längere Herleitungen auf die Skripten verwiesen.

Mit dem Abschluss der Lehrtätigkeiten von zwei der drei Autoren (G.Li., R.La.) wurde auch ein gewisser Abschluss in der Entwicklung der Skripten erreicht. Wir haben diesen Zeitpunkt zum Anlass genommen, die Skripten noch einmal zu überarbeiten und textlich etwas zu erweitern, so dass sie sich auch für eine Veröffentlichung in kompakter Buchform eignen, wobei jedoch der ursprüngliche Charakter nicht gelehrt werden kann und soll. Die Aufteilung des Stoffes erfolgt pragmatisch in jeweils einem Band pro Semester mit der in Hamburg - und an den meisten anderen deutschen Universitäten - üblichen Aufteilung des Stoffes.

Der Titel der drei Bände, **Physik kompakt**, ist Programm. Es ist nicht unsere Absicht, in Konkurrenz mit bewährten, umfangreicheren Lehrbüchern der Experimentalphysik zu treten. Vielmehr sollen die Studierenden ein Buch an die Hand bekommen, das sie durch seine kompakte Form und vorlesungsorientierte Stoffauswahl ermutigt, es vorlesungsbegleitend durchzuarbeiten. Das Mitschreiben in der Vorlesung kann dadurch erheblich reduziert werden, so dass dem mündlichen Vortrag und der Vermittlung von Phänomenen in Demonstrationsversuchen größere Aufmerksamkeit zuteil werden.

Die Autoren danken allen Studierenden und Kollegen für Fehlerhinweise, Anregungen und Kommentare. Unser Lektor, Herr Dr. Kölsch, hat uns unterstützt und ermutigt, die Skripten in der vorgelegten Form zu veröffentlichen.

Frau M. Berghaus danken wir für die Ausfertigung vieler Skizzen und die Übertragung der Skripten in das L^AT_EX-Layout. Allen zukünftigen Benutzern der **Physik kompakt** sind wir dankbar für Verbesserungshinweise.

Hamburg, im September 2001

R. Langkau
G. Lindström
W. Scobel

Vorwort Band 2

Der vorliegende Band 2: **Elektrodynamik und Elektromagnetische Wellen** der Serie **Physik kompakt** enthält die Einführung in die Grundlagen der Wechselwirkungen am Beispiel der Gravitation, der Elektrizitätslehre und des Magnetismus, wie sie üblicherweise im zweiten Semester angeboten werden. Die Grundlagen der elektrischen Leitung und die Betrachtungen zu den Erscheinungen des Elektromagnetismus im stoffgefüllten Raum sowie die Einführung der zeitabhängigen elektromagnetischen Felder bereiten auf Vorlesungen des Hauptstudiums vor. Die anschließende Darstellung der Wellenlehre führt ein in die Wellenoptik und Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Raum. In praktischen Beispielen werden die geometrische Strahlenoptik und Mehrstrahlinterferenzen in FRAUNHOFERScher Geometrie erörtert.

Zur Unterstützung der formalen Behandlung dieses Stoffes werden in ergänzenden Abschnitten Grundlagen der Vektoranalysis und der Wellengleichungen behandelt.

Letztendlich sei angemerkt, dass der Wellenwiderstand $Z = U_0/I_0$ bei einem realen Kabel in komplexer Schreibweise durch

$$Z = \sqrt{\frac{(R^*)^2 + (\omega L^*)^2}{(G^*)^2 + (\omega C^*)^2}} e^{i\varphi} \quad \text{mit}$$

$$\tan 2\varphi = \omega \frac{G^* L^* - R^* C^*}{R^* G^* + \omega^2 L^* C^*}$$

gegeben ist, was physikalisch bedeutet, dass die Spannungs- und die Strom-Welle phasenverschoben über das Kabel laufen.

2.7 Doppler-Effekt und Aberration bei elektromagnetischen Wellen

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen sind zwei Bezugssysteme S und S' , die von kartesischen Koordinaten x, y, z und x', y', z' aufgespannt werden und sich gegeneinander mit der **konstanten** Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegen. Ohne damit die Allgemeingültigkeit der Aussagen einzuschränken, wird angenommen,

- dass die entsprechenden Koordinatenachsen beider Systeme parallel zueinander orientiert sind,
- dass die x - und x' -Achsen zusammenfallen,
- dass die Geschwindigkeit \mathbf{v} in x -Richtung weist und
- dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Ursprünge beider Koordinatensysteme zusammenfallen.

Beantwortet werden soll die Frage, wie zwei mit S und S' fest verbundene Beobachter die Eigenschaften ein und derselben ebenen elektromagnetischen Welle beurteilen, die von S aus betrachtet parallel zur $x - y$ -Ebene und unter dem Neigungswinkel α gegen die $x - z$ -Ebene einfällt.

Die Größe von \mathbf{v} soll keinen Beschränkungen unterliegen. Sie kann hinaufreichen bis in das Gebiet der Phasengeschwindigkeiten elektromagnetischer Wellen, letztlich also bis zur Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c . Beim Übergang von einem Bezugssystem zum anderen müssen dann die Gesetzmäßigkeiten der LORENTZ-Transformation angewendet werden. Sie folgen bekanntlich aus der physikalisch gesicherten Tatsache, dass in allen sich gegeneinander mit beliebiger, aber konstanter Geschwindigkeit bewegenden Bezugssystemen die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit gleich ist. Unter den oben genannten Voraussetzungen lauten sie

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z' \quad (2.92)$$

für die Orts-Koordinaten und

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.93)$$

für die Zeit.

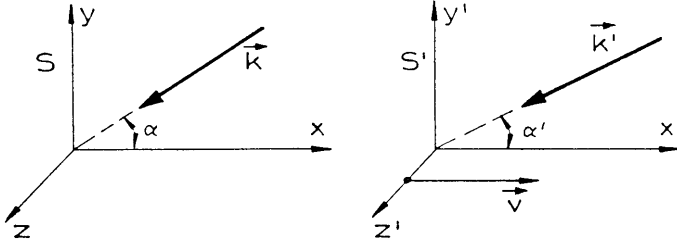


Abb. 2.19. Welle in zwei Bezugssystemen.

Im Bezugssystem S wird die einfallende ebene Welle durch die Funktion

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

beschrieben. Der magnetische Anteil kann in den weiteren Erörterungen unberücksichtigt bleiben. Unter den genannten Voraussetzungen bezüglich der Einfallrichtung folgt für die Komponenten des Wellenvektors \mathbf{k}

$$k_x = k \cos \alpha, \quad k_y = k \sin \alpha, \quad k_z = 0$$

Damit ist

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = kx \cos \alpha + ky \sin \alpha$$

und

$$\mathbf{E}(x, y, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t + kx \cos \alpha + ky \sin \alpha) \quad (2.94)$$

Von S' aus betrachtet und zunächst **rein formal** wird diese Welle durch den Ansatz

$$\mathbf{E}(x', y', t') = \mathbf{E}'_0 \sin(\omega' t' + k' x' \cos \alpha' + k' y' \sin \alpha') \quad (2.95)$$

dargestellt. Welche konkreten **physikalischen** Unterschiede gegenüber (2.94) bestehen, ergibt sich durch die Übertragung von (2.94) in das S' -System mittels der LORENTZ-Beziehungen und aus dem anschließenden Vergleich des Resultats mit dem Ansatz (2.95). Einsetzen von (2.92) und (2.93) in (2.94) führt auf

$$\mathbf{E}(x', y', t') = \mathbf{E}'_0 \sin \left\{ \omega \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + k \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cos \alpha + ky' \sin \alpha \right\}$$

$$= \mathbf{E}'_0 \sin \left\{ \frac{\omega + kv \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t' + \frac{k \cos \alpha + \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x' + ky' \sin \alpha \right\}$$

Auch das ist offensichtlich eine **ebene** Welle. Der Vergleich mit (2.95) hinsichtlich der Orts- und Zeit-Abhängigkeit ergibt die drei Gleichungen

$$k' \cos \alpha' = \frac{k \cos \alpha + \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.96)$$

$$k' \sin \alpha' = k \sin \alpha \quad (2.97)$$

$$\omega' = \frac{\omega + kv \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.98)$$

zur Bestimmung von α' , k' und ω' . Die Welle soll im Vakuum laufen. Also ist $k = \omega/c$. Wegen $\omega = 2\pi\nu$ folgt dann aus (2.98) für die Frequenzänderung (Doppler-Effekt)

$$\nu' = \nu \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.99)$$

Im nicht-relativistischen oder "klassischen" Grenzfall $v^2/c^2 \ll 1$ geht (2.99) über in

$$\nu'_k = \nu \left[1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \right]$$

Diese Formel ist vom Doppler-Effekt bei Schallwellen für den Fall eines bewegten Beobachters her bekannt. Dort ist c natürlich die Schallgeschwindigkeit. Die durch (2.99) beschriebenen Zusammenhänge sind in Bild 2.20 in halblogarithmischem Maßstab dargestellt. Aufgetragen ist das Frequenzverhältnis ν'/ν als Funktion des Geschwindigkeits-Verhältnisses v/c für verschiedene Einfallswinkel. Hervorzuheben sind hierbei zwei Aspekte. Zum einen tritt auch dann eine Frequenzänderung auf, wenn sich der Beobachter **senkrecht** zur Richtung der Welle bewegt, wenn also $\alpha = 90^\circ$ beträgt. ν' steigt hier mit v an. Diesen sogenannten **transversalen** Doppler-Effekt gibt es im klassischen Grenzfall nicht. Dagegen folgt aus (2.99) für $\alpha = 90^\circ$

$$\nu'_t = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

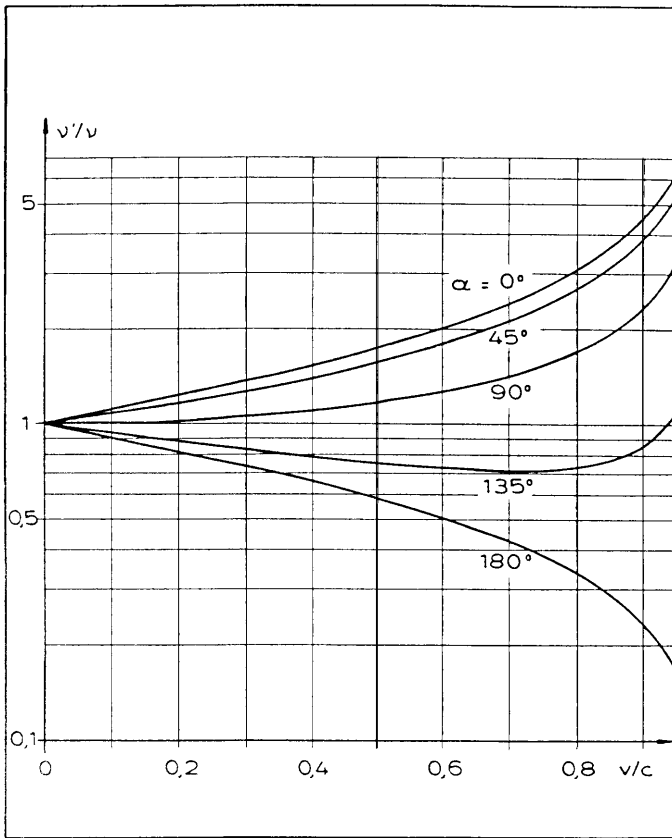


Abb. 2.20. Doppler-Effekt bei elektromagnetischen Wellen.

Mit der Frequenzänderung ist auch eine Wellenlängenänderung verknüpft. Wegen der Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit c in beiden Systemen S und S' , also wegen $\nu'\lambda' = \nu\lambda = c$ erhält man aus (2.99)

$$\lambda' = \lambda \frac{\nu}{\nu'} = \lambda \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha}$$

Zum anderen durchläuft ν' als Funktion von v für den Bereich rückwärtiger Einfallswinkel $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ein Minimum, wie es das Bild 2.20 am Beispiel $\alpha = 135^\circ$ zeigt. Dieser Punkt wird weiter unten noch genauer beleuchtet.

Ein weiterer wichtiger Zusammenhang ergibt sich aus der Division von (2.97) durch (2.96). Sie liefert

$$\frac{\sin \alpha'}{\cos \alpha'} = \tan \alpha' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{\omega v}{kc^2}}$$

oder wegen $\omega/k = c$

$$\tan \alpha' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{v}{c}} \quad (2.100)$$

Der mit S' verbundene Beobachter sieht also die Welle im allgemeinen aus einer geänderten Richtung kommend, d.h. es ist $\alpha' \neq \alpha$. "Im allgemeinen" soll heißen: Es gibt zwei Ausnahmen. Kommt im S -System die Welle direkt von vorne ($\alpha = 0^\circ$, $\sin \alpha = 0$) oder direkt von hinten ($\alpha = 180^\circ$, $\sin \alpha = 0$), dann bleibt es auch im S' -System so, d.h. es ist ebenfalls $\alpha' = 0$ bzw. $\alpha' = 180^\circ$. Abgesehen von diesen Grenzfällen nimmt α' mit wachsender Geschwindigkeit v ab, wie es das Bild 2.21 für verschiedene Einfallswinkel α zeigt.

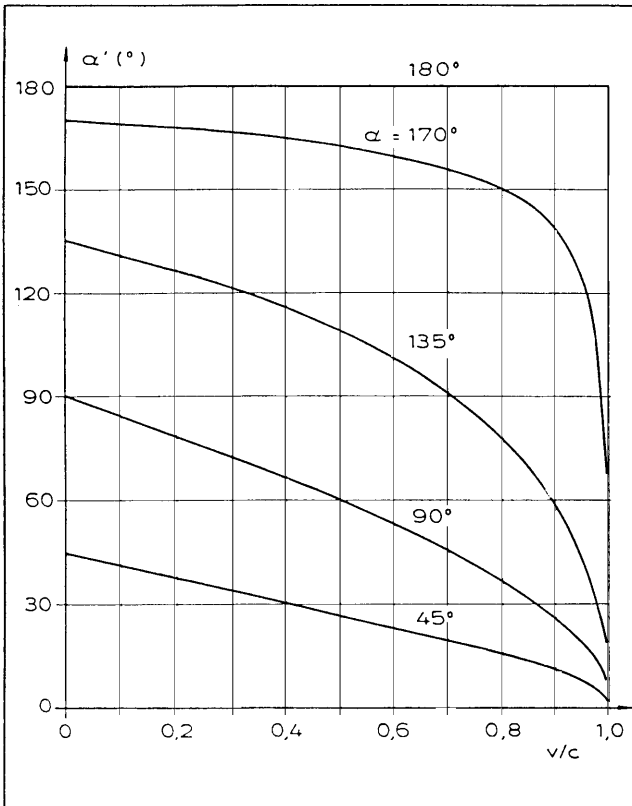


Abb. 2.21. Aberration elektromagnetischer Wellen.

Gegen jede naive Vorstellung bleibt also die Welle nicht etwa zurück, sondern kommt zunehmend von vorne. Alle Kurven münden bei $v = c$ in den Wert $\alpha' = 0^\circ$. Das bedeutet: Bei dieser Grenzgeschwindigkeit kommen im

S' -System alle Wellen von vorne, unabhängig davon, unter welchem Winkel α sie im S -System einfallen. Die hier beschriebene Erscheinung heißt die (relativistische) **Aberration** elektromagnetischer Wellen.

Zwischen dem Minimum von ν' als Funktion von v beim Doppler-Effekt, auf das bereits hingewiesen wurde, und der Aberration besteht eine einfache Verbindung, die nachfolgend erläutert wird. Die Bedingung für ein Minimum der Funktion $\nu' = f(v/c)$ – Maximum gibt es hier nicht – lautet bekanntlich

$$[d\nu'/d(v/c)]_{v=v_m} = 0 \quad (2.101)$$

v_m bezeichnet diejenige Geschwindigkeit, bei der das Minimum auftritt. Die Differentiation von (2.99) nach v/c liefert

$$\begin{aligned} \frac{d\nu'}{d(v/c)} &= \frac{\nu \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\nu \left[1 + \frac{v}{c} \cos \alpha\right] \frac{v}{c}}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}} \\ &= \frac{\nu}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos \alpha + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} \cos \alpha \right] \\ &= \frac{\nu}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}} \left[\cos \alpha + \frac{v}{c} \right] \end{aligned}$$

Die Minimums-Bedingung (2.101) führt damit auf

$$\cos \alpha + \frac{v_m}{c} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{v_m}{c} = -\cos \alpha \quad (2.102)$$

Verabredungsgemäß bewegt sich S' in Richtung wachsender x -Werte. v/c ist also positiv. Die Frequenzminima treten somit nur bei negativen Werten von $\cos \alpha$ auf, vom System S aus betrachtet, also nur bei rückwärtigem Einfall der Welle ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Die Minimalfrequenz $\nu'_m = \nu'(v_m)$ selbst erhält man mit (2.102) aus (2.99) zu

$$\nu'_m = \nu \sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}}$$

oder wegen $v_m^2/c^2 = \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ zu

$$\nu'_m = \nu \sin \alpha$$

Einsetzen von (2.102) in die Aberrationsformel (2.100) ergibt

$$\tan \alpha'_m = \infty \quad \text{oder} \quad \alpha'_m = 90^\circ$$

Das Frequenzminimum tritt somit immer genau dann auf, wenn im S' -System der Einfallswinkel die 90° -Marke passiert, wenn also die Einfallrichtung der Welle vom Rückwärts- in den Vorwärts-Bereich umschlägt. Bild 2.22 zeigt die hier geschilderten Zusammenhänge für den Fall $\alpha = 140^\circ$.

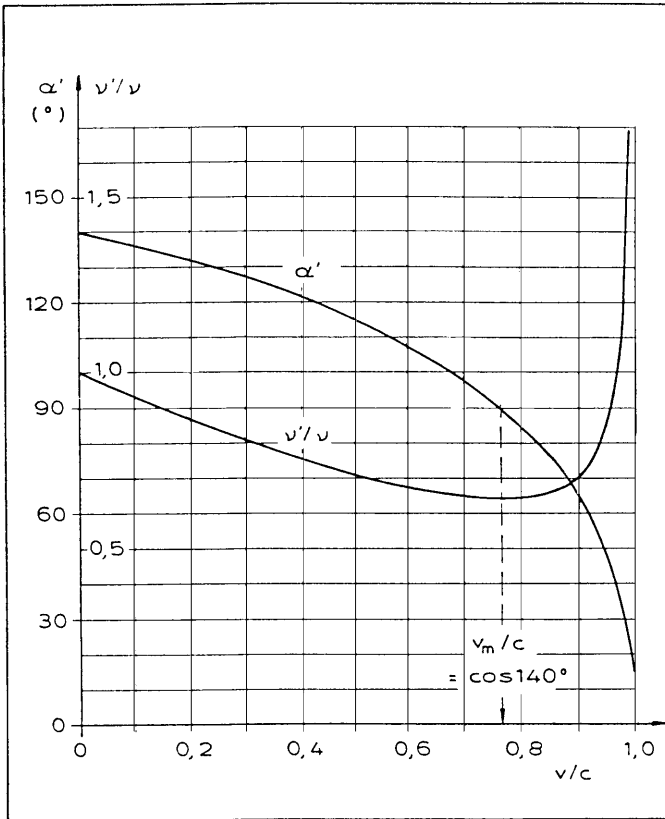


Abb. 2.22. Zusammenhang zwischen Doppler-Effekt und Aberration bei elektromagnetischen Wellen

Bild 2.23 schließlich soll anhand eines einfachen Beispiels ein anschauliches Bild zur Auswirkung der Aberration vermitteln. Dargestellt sind sechs Richtungsdiagramme. Die Punkte auf den jeweiligen Kreisen symbolisieren beispielsweise die Positionen von Sternen am Firmament. Als Folge der Aberration kontrahiert sich mit wachsender Geschwindigkeit v zunehmend der gesamte Sternenhimmel in Fahrtrichtung. Lediglich der "Rückwärts-Stern" behält seine Position. Von einem Raumfahrzeug aus, dessen Geschwindigkeit nicht mehr vernachlässigbar klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, wird aufgrund dieser Erscheinung die Navigation nach Sternposition erschwert oder gar unmöglich gemacht. Bei einer solchen Raumfahrt-Mission tritt aber noch ein weiteres grundsätzliches Problem auf: Infolge des Doppler-Effekts verschiebt sich das Emissionsspektrum des Sternenlichts. Das bedingt nicht nur eine Veränderung der "Farben" der Sterne, sondern kann soweit führen, dass ursprünglich sichtbare Sterne unsichtbar werden und ursprünglich unsichtbare sichtbar.

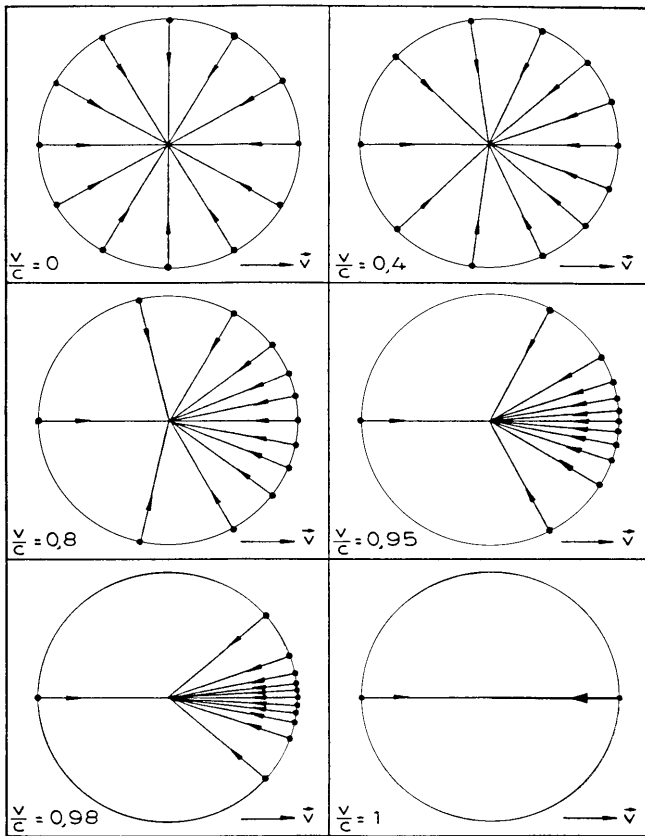


Abb. 2.23. Beispiel zur Aberration des Lichts. “Schrumpfung” des Sternenhimmels in Fahrtrichtung.

2.8 Entstehung elektromagnetischer Wellen

2.8.1 Potentiale zeitabhängiger Raumladungs- und Strom-Dichteverteilungen

Es muss nun endlich die Frage diskutiert werden, wie oder wann oder unter welchen grundsätzlichen Voraussetzungen elektromagnetische Wellen überhaupt entstehen oder technisch erzeugt werden können. Eines ist klar: Von **ruhenden** Ladungen oder von **stationären** Raumladungs- bzw. Strom-Dichteverteilungen $\rho(\mathbf{r})$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ können keine Wellen ausgehen. Sie führen zu **statischen** \mathbf{E} - bzw. \mathbf{B} -Feldern. Den Ursprung für die Ausbildung von Wellen aber können nur zeitlich veränderliche Felder bilden, wie sie von entsprechend bewegten Ladungen bzw. zeitlich variierenden Verteilungen $\rho(\mathbf{r}, t)$ oder $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ generiert werden.

Feldstärken werden im allgemeinen über geeignete Vektor-Operationen aus Potentialen berechnet. Bekanntlich kann ein wirbelfreies Vektorfeld \mathbf{a} , also

ein solches mit $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, über die Operation $\mathbf{a} = -\text{grad } \psi$ aus einem skalaren Potential ψ ermittelt werden. Beispiele solcher "Gradienten-Felder" sind das Feld konservativer Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ und das elektrostatische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Im ersten Fall ist ψ die potentielle Energie W_p , im zweiten das elektrostatische Potential φ . Wegen $\text{rot}(\text{grad } \psi) = 0$ ist die Wirbelfreiheit dann stets garantiert. Ein Magnetfeld dagegen ist selbst im statischen Fall nicht allgemein wirbelfrei. Seine Wirbelstärke ist hier nach Maßgabe des sogenannten AMPERESchen Satzes $\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{j}(\mathbf{r})$ proportional zur (stationären) Stromdichte. Allenfalls in Isolatoren oder im Vakuum, wo zwangsläufig $\mathbf{j} = 0$ sein muss und folglich $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ ist, ließe sich \mathbf{B} durch Gradientenbildung aus einem skalaren Potential gewinnen. Generell jedoch geht das nicht.

Nun ist aber grundsätzlich, also auch bei zeitabhängigen Vorgängen, das \mathbf{B} -Feld quellenfrei, d.h. es gilt stets $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Das macht es möglich, \mathbf{B} über die Beziehung

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.103)$$

aus einem Vektorfeld \mathbf{A} , dem sogenannten **Vektorpotential**, abzuleiten. Wegen $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$ bleibt die Quellenfreiheit von \mathbf{B} gewahrt. Die MAXWELL-Gleichung (2.3) führt dann auf

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{rot} \left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$$

oder

$$\text{rot} \left[\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0$$

Der Vektor $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ ist also wirbelfrei und damit gemäß

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi$$

durch ein Skalar-Potential φ darstellbar. Anders als im statischen Fall ist

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.104)$$

hier kein reines Gradientenfeld. Das kann auch nicht sein, da \mathbf{E} nicht wirbelfrei ist. Für die Quellstärke von \mathbf{E} erhält man

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = -\text{div}(\text{grad } \varphi) - \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \mathbf{A})$$

und wegen $\text{div}(\text{grad } \varphi) = \Delta \varphi$ als Zusammenhang zwischen den Potentialen und der Raumladungsdichte

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.105)$$

Für den entsprechenden Zusammenhang mit der Stromdichte ergibt sich mit (2.103) und (2.104) aus der vorangehenden MAXWELL-Gleichung (2.45)

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) &= \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \left[-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] + \mu \mathbf{j} \\ &= -\varepsilon\mu \operatorname{grad} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu \mathbf{j}\end{aligned}$$

oder wegen $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ und $\varepsilon\mu = 1/v^2$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \operatorname{grad} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v^2 \operatorname{div} \mathbf{A} \right] = -\mu \mathbf{j} \quad (2.106)$$

Durch (2.103) wird nur über die Wirbel des Vektorpotentials \mathbf{A} verfügt. Die Vektoranalysis lehrt aber, dass ein Vektorfeld erst dann eindeutig festgelegt ist, wenn seine Wirbel **und** Quellen vorgegeben sind. Über die Quellen von \mathbf{A} kann also noch frei und nach Belieben verfügt werden, ohne dass die bisher gewonnenen physikalischen Aussagen dadurch angetastet werden. In dem hier diskutierten Zusammenhang ist es üblich und zweckmäßig, die Übereinkunft

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

zu treffen. Sie heißt **Lorentz-Eichung** des Vektorpotentials oder auch **Lorentz-Konvention**. Damit gehen (2.105) und (2.106) über in

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.107)$$

und

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} \quad (2.108)$$

Beide Differentialgleichungen sind mathematisch vom selben Typ. Aus ihnen lassen sich nun bei vorgegebenen Raumladungs- bzw. Strom-Dichteverteilungen $\rho(\mathbf{r}, t)$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ die Potentiale $\varphi(\mathbf{r}, t)$ bzw. $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und anschließend gemäß (2.104) und (2.103) die Feldstärken $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ berechnen. Wie es sich gehört, gehen im **stationären**, also zeitunabhängigen Fall (2.107) und (2.108) in die vertrauten Potentialgleichungen

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (2.109)$$

aus der Elektro- bzw. Magneto-Statik über.

Die bekannten Lösungen von (2.109) einerseits und die gesuchten Lösungen von (2.107) und (2.108) andererseits weisen bezüglich ihrer äußeren Form große Ähnlichkeiten auf, wie gleich noch erläutert wird. Speziell im Hinblick auf die hinzukommende Zeitabhängigkeit allerdings gibt es einen grundlegend wichtigen und anschaulich deutbaren Unterschied. Um diesen deutlich zu machen, werde zunächst an die Lösungen von (2.109) erinnert.

Es sei \mathbf{R} der Ortsvektor eines Volumenelements dV innerhalb einer Ladungswolke mit dem Volumen V_0 und der Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{R})$. Die in dV eingeschlossene Ladung $dq(\mathbf{R}) = \rho(\mathbf{R}) \cdot dV$ liefert zum (elektrischen) Potential in einem Aufpunkt P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} den Beitrag

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}$$

wobei $\mathbf{r} - \mathbf{R}$ der von dV zum Aufpunkt P weisende Vektor ist. Die gesamte Ladungswolke erzeugt also in P das Potential

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V_0} \frac{\varrho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \cdot dV \quad (2.110)$$

Entsprechend erhält man für das von einer stationären Stromdichteverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{R})$ verursachte Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \cdot dV \quad (2.111)$$

Ist nun die Raumladungsdichte **zeitabhängig**, ist also $\varrho = \varrho(\mathbf{R}, t)$, dann sind das selbstverständlich auch die Potentialbeiträge der einzelnen Volumenelemente dV im Aufpunkt P . **Aber:** Bedingt durch die **endliche** Geschwindigkeit v , mit der sich zeitliche Änderungen in einem Medium ausbreiten, registriert der Beobachter in P die Auswirkungen der in dV ablaufenden Änderungen mit einer Verspätung von $\Delta t = |\mathbf{r} - \mathbf{R}|/v$. Die Ursache für Potentialänderungen in P liegt also zeitlich um Δt zurück, d.h. es ist

$$d\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\varrho\left[\mathbf{R}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{v}\right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \cdot dV$$

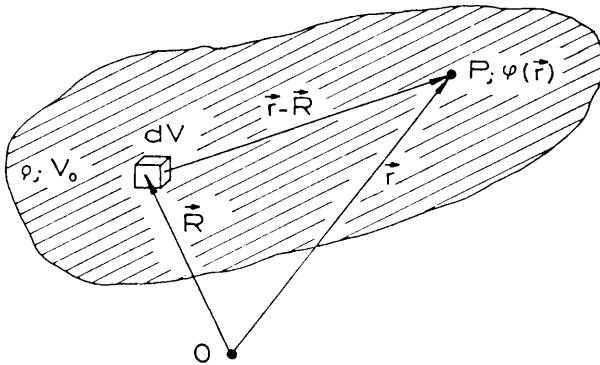


Abb. 2.24. Zum Potential einer Ladungswolke.

Entsprechendes gilt für das Vektorpotential einer zeitabhängigen Stromdichteverteilung. Damit folgt für die Potentiale