Vorwort

Auf die Frage nach den Nullstellen von Polynomen einer Veränderlichen gibt der „Fundamentalsatz der Algebra“ eine abschließende Antwort. Geht man zu zwei Veränderlichen über, so werden die Nullstellenmengen im allgemeinen unendlich. Man kann diese Mengen als geometrische Gebilde ansehen, genauer als ebene algebraische Kurven. Hier treffen sich also zwei Wege aus Algebra und Geometrie, und es ist nicht verwunderlich, daß über Eigenschaften solcher Kurven viele Jahrhunderte lang nachgedacht wurde.

Wenn zu den zahllosen Büchern über diesen Gegenstand nun schon wieder eines hinzukommt, bedarf das einer Rechtfertigung oder wenigstens einer Erklärung des speziellen Standpunktes. Das äußere Motiv sei nicht verschwiegen: Vor einigen Jahren wurde ich dazu angeregt, etwas über algebraische Kurven aufzuschreiben. Ich hatte sofort entgegnet, daß es darüber doch schon viele – vielleicht sogar zu viele – Bücher gibt. Dennoch konnte ich nicht der Versuchung widerstehen, darüber wiederholt Vorlesungen zu halten und deren Inhalt aufzuschreiben. Was schließlich daraus geworden ist, sei kurz erläutert.

Der Text besteht aus zwei recht verschiedenartigen Teilen. In den Kapiteln 0 bis 5 wird so elementar wie möglich die Geometrie der Kurven erklärt: Tangenten, Singularitäten, Wendepunkte, etc. Wichtigstes technisches Hilfsmittel ist die Schnittmultiplizität, die auf der Resultante beruht, und zentrales Ergebnis ist der Satz von BÉZOUT über die Anzahl der Schnittpunkte von zwei Kurven. Höhepunkt in Kapitel 5 sind die Plückerformeln, die eine Beziehung zwischen den in den vorhergehenden Kapiteln untersuchten Invarianten angeben.

Die Plückerformeln kann man mit den elementaren Techniken fast präzise beweisen, aber eben nicht ganz. Was fehlt, ist insbesondere ein tieferes Verständnis der Dualität und eine effiziente Methode zur Berechnung der auftretenden Schnittmultiplizitäten. Die dazu nötigen lokalen und globalen Techniken aus der Analysis werden in den Kapiteln 6 bis 9 nachgetragen. Während die Ergebnisse relativ einfach zu formulieren und anzuwenden sind, erfordert eine strenge Begründung doch einige Arbeit.

So enthalten die Kapitel 6 bis 8 eine Einführung in die lokale komplexe Analysis, das ist die Theorie der konvergenten Potenzreihen oder der holomorphen Funktionen von mehreren Veränderlichen, je nachdem, ob man den einen oder den anderen Standpunkt vorzieht. Hier stehen Potenzreihen und die algebraischen Eigenschaften der Potenzreihenringe im Vordergrund, was auf die bahnbrechenden Untersuchungen von RÜCKERT [R] zurückgeht.

Im letzten Kapitel werden die lokalen Parametrisierungen zu einer Riemannschen Fläche verklebt. In Anlehnung an ein berühmtes Zitat von FELIX KLEIN kann man sagen, daß die Kurven damit aus ihrem Käfig der projektiven Ebene befreit und außerhalb eines festen Raumes schwebend angesehen werden. Die Geschlechtsformel ist schließlich eine Ergänzung der elementaren Plückerformeln.

Einige technische Hilfsmittel aus Algebra und Topologie, die an mehreren Stellen verwendet werden, sowie Ergänzungen zu den vorhergehenden Kapiteln finden sich in den Anhängen.

Überall in dem Text wurde versucht, sehr konkret zu bleiben und wenn möglich Verfahren anzugeben, mit Hilfe von Polynomen und Potenzreihen etwas auszurechnen. Dabei sollen auch die zahlreichen Beispiele und Bilder helfen. Dieser lange Zeit als recht altmodisch angesehene Aspekt der algebraischen Geometrie hat wieder mehr Bedeutung gewonnen.

Wie zu erwarten ist: fast alles, was hier steht, wird man in ähnlicher Form auch anderswo finden. Ganz besonders erwähnen möchte ich WALKER [Wa], BURAU [Bu] und BRIESKORN-KNÖRRER [B-K]. Mein Ziel war ein möglichst knapper Text als Grundlage für eine einführende Vorlesung über ein oder zwei Semester. (Einer Bemerkung von Horst Knörrer folgend, könnte man dieses Büchlein als eine tragbare Ausführung des Standmodells [B-K] bezeichnen.) Vorausgesetzt werden nur Kenntnisse aus dem Grundstudium, vor allem in elementarer Algebra und Funktionentheorie. Nach vielen Mühen damit bin ich in der Überzeugung bestärkt, daß es kaum einen schöneren Einstieg in die algebraische Geometrie und komplexe Analysis gibt als über die algebraischen Kurven. Hier liegen die geometrische Intuition und die „analytische“ Methode noch sehr nahe beieinander, und jede neue Technik ist ganz und gar durch offensichtliche geometrische Probleme motiviert. Wie im Paradies vor den zahlreichen Sündenfällen.

Mein Dank gilt all denen, die beim Entstehen dieses Buches mitgewirkt haben: meinem Lehrer R. Remmert für den Anstoß dazu, meinen Studenten in Düsseldorf und UC Davis für ihre Verbesserungsvorschläge, Herrn H.-J. Stoppel für seine unermüdliche Hilfe bei zahllosen Einzelheiten und die Herstellung des TEX-Manusripts, Herrn U. Daub für das Plotten der ersten Bilder, Herrn C. Töller für die anschließende Herstellung der perfekten Abbildungen und schließlich dem Verlag Vieweg, der sich bereiterklärt hat, das Buch in deutscher Sprache und zu einem studentenfreundlichen Preis zu veröffentlichen.

Düsseldorf, im Juni 1994 Gerd Fischer