Vorwort

Es gibt viele – vielleicht zu viele – Lehrbücher über Quantenmechnanik in englischer und auch deutscher Sprache. Daher habe ich lange gezögert, meine Vorlesungen über Quantenmechanik in Buchform einem größeren Leserkreis vorzustellen. Dazu wurde ich vor allem durch die sich über Jahrzehnte haltende Nachfrage nach dem Skriptum ermutigt, das diesem Buch zugrunde liegt. Auch wenn ich den entsprechenden Kurs nicht zu geben hatte, haben viele Studierende an meiner Universität die Grundlagen der Quantenmechanik, ihre Grundideen und die Basis ihres Formalismus nach diesem Skriptum gelernt. Daher mag dieses Buch auch für andere nützlich sein, die einen Zugang zu diesem wohl wichtigsten Gebiet der heutigen theoretischen Physik suchen.

Dieses Buch ist kein Lehrbuch mit Anspruch auf wenigstens teilweise Vollständigkeit. Sein Hauptanliegen ist es vielmehr, die innere Logik der Quantenmechanik so deutlich wie möglich darzustellen. Auch bei der Darstellung von mathematischen oder physikalischen Details ist dies sein Schwerpunkt. Diese Absicht kommt am deutlichsten in der „Axiomatik der Quantenmechnik“ zum Ausdruck, die im Kapitel 3 entwickelt wird. Dennoch habe ich es nach meinen Vorlesungserfahrungen nicht gewagt, sofort mit der abstrakten Welt der „kets“ und „bras“ zu beginnen, wie es P.A.M. Dirac in seinem klassischen Buch „Quantum Mechanics“ getan hat, obwohl meine Darstellung diesem Buch – oft explizit, aber meist unbewußt – sehr viel verdankt. Die zweite Quelle meines Weges, in die Quantenmechanik einzuführen, sind Feyman’s Lectures, wie der erfahrene Leser leicht feststellen wird. Mein Bemühen war es aber, mathematisch nicht zwingende Gedankensprünge zu vermeiden.

Daher beginnt das Buch im 1. Kapitel mit einer Skizze der philosophischen Motivation und der physikalischen Grundlagen der Quantentheorie, die auf der Dualität von Punktteilchen und Feld beruhen und über Schrödingers Materiewelle zur statistischen Deutung der φ-Funktion führen. Die δ-Funktion, das Wellenpaket und die Fouriertransformation sind die mathematischen Werkzeuge, die dieses Kapitel kennzeichnen.

Das 2. Kapitel entwickelt die „Wellenmechanik“ in einer Weise und einem Umfang, die für eine erste Einführung vielleicht als „mutig“ angesehen werden kann. Ohne der „eindimensionalen“ Wellengleichung ernsthaft Raum zu geben, behandle ich von Beginn an realistische Probleme, die sich in einem 3-dimensionalen Raum abspielen, aber drehsymmetrisch sind und entwickle die Theorie so weit, daß nicht nur gebundene Zustände, sondern auch die Streutheorie ausführlich zu ihrem Recht kommt. Der Leser erfährt von den Knotensätzen bis zur Bornschen Näherung und den Formfaktoren hin und macht auch eine erste Bekanntschaft mit den Feynman-Graphen. Dieses Kapitel endet mit einer breiteren Erläuterung der Ideen der „Eichtheorien“, die heute die Basis zum Verständnis des Großteils der fundamentalen physikalischen Wechselwirkungen sind.

Dem 3. Kapitel habe ich den Titel „Axiomatischer Aufbau“ gegeben, da dort entwickelt wird, wie nach der Konzeption des Hilbertraumes der physikalischen Zustände sämtliche Quantisierungsregeln aus einer Wurzel, nämlich den Heisenbergschen „Vertauschungsrelationen“ folgen. Abgeschlossen wird dieses – den Schwerpunkt des ersten Bandes darstellende Kapitel – mit einer Diskussion der Möglichkeiten und Schwierigkeiten, den so erfolgreichen Formalismus der Quantenmechanik physikalisch und erkenntnistheoretisch zu interpretieren.

Um diesen Band handlich und lesbar zu halten, mußten wichtige Teile der Quantenmechanik – wie der algebraische Weg zur Quantisierung des harmonischen Oszillators und die Quantentheorie des Drehimpulses – auf den zweiten Band verschoben werden. Dort wird auch die quantenmechanische Beschreibung von Mehrteilchen-Systemen, die relativisische Quantenmechanik und eine Einführung in die „Pfadintegral-Quantisierung" enthalten sein.

Dieses Buch wäre ohne die begeisternde Ermutigung von Herrn Schwarz, dem Lektor des Vieweg-Verlages, nicht erschienen. Seinem fachkundigen sympathischen Rat habe ich sehr zu danken. Viele Studierende haben mitgewirkt: Frau G. Anton und die Herren R. Blankert, B. Bock, Th. Filk, W. König, L. Köpke, J. Plingen, E. Rathske und W. Ruhm haben 1975 – noch als Studenten das ursprüngliche Skriptum erstellt, die Herren G. Giese, V. Schwarz und D. Wagner haben vor einem Jahr den „gescannten" Text des Skriptums mit TEX-Formeln versehen. Ein Buch haben daraus Herr Schwarz und meine Sekretärin Frau Faßbender erstellt, mit meiner stärkeren Mitwirkung in der letzten Phase.

Gelitten hat dabei vor allem meine Frau, die noch mehr als sonst nur meinen Rücken sah, während der Rest von mir mit dem Notebook verheiratet schien.

Allen habe ich sehr zu danken und hoffe auf wohlwollende Akzeptanz des Lesers.

Bonn, im August 1995 Horst Rollnik

Vorwort zur 2. Auflage

Es ist ein Ausdruck der tiefgreifenden Veränderungen im heutigen Verlagssystem, daß diese 2. Auflage meiner Vorlesungen über die Quantentheorie unter einem anderen Verleger und in einer geänderten äußeren Form erscheint. Das Buch mag so einen erweiterten Leserkreis finden. Sein Inhalt unterscheidet sich nicht von der ersten Auflage; nur eine Liste mit notwendigen Ergänzungen und Korrekturen (s. S. 377) ist hinzugefügt worden.

Seit dem Erscheinen der 1. Auflage haben sich die dargestellten Grundlagen der Quantenmechanik natürlich nicht geändert. Die Bemerkungen und Erläuterungen im damaligen Vorwort bleiben voll gültig.

Aufgrund von neuen und verfeinerten experimentellen Methoden wurde es jedoch möglich, ungewöhnliche Aussagen der Quantentheorie, wie sie etwa durch das Einstein-Rosen-Podolsky Paradoxon illustriert werden, in verschiedenartigen, genial ersonnenen Experimenten zu prüfen. Dieser Problemkreis ist im Abschnitt 3.16 grundsätzlich behandelt worden, und die dortigen Aussagen haben sich voll bestätigt. Während diese Fragen lange Zeit vor allem in einem kleinen Kreis von „Interpreten der Quantenmechanik" diskutiert worden, haben sie inzwischen nicht nur die Aufmerksamkeit eines großen Kreises von Physikern gefunden, sondern darüber hinaus Mathematiker, Informatiker und Ingenieurwissenschaftler in ihren Bann gezogen. Neue Begriffe wie „Quantum Computing" und „Quantum Information" kennzeichnen diese Entwicklung, durch die insbesondere eine Öffnung zur Informationstheorie geschaffen wurde. In diesem Kontext wurde auch außerhalb der Fachphysik eine breitere Öffentlichkeit durch eine Reihe von exzellenten Büchern informiert, in denen auch das entfernte Ziel der Realisierung von „Quantencomputern" dargestellt wird.

Leider kann ich diese Entwicklungen in diesem Buch nicht kommentieren; ich muß mich auf Hinweise auf die inzwischen immens angewachsene Literatur beschränken, die sich im Korrekturblatt zum Abschnitt 3.16 befinden.

Schließlich möchte ich darauf hinweisen, daß das vorliegende Buch die Grundlage für den gleichzeitig erscheinenden 2. Band der Quantentheorie darstellt.

Bonn, im Herbst 2002 Horst Rollnik

3.16.1 Der Indeterminismus der Quantentheorie

Im bisherigen Teil dieses Buches wurden die physikalischen Grundgesetze der Quantenmechanik und ihre mathematische Formulierung und Durchführung in einer möglichst folgerichtigen und linearen Weise dargestellt. Dabei wurde die Wahrscheinlichkeitsinterpretation beschrieben. Die damit verbundenen Probleme sollen jetzt in größerem Detail diskutiert werden.

Die Quantenmechanik macht nach der statistischen Deutung der ψ-Funktion Wahrscheinlichkeitsaussagen über mögliche Meßresultate. In speziellen Fällen können sich in diesem Rahmen auch exakte Aussagen ergeben, die man als Voraussagen über die Eigenschaften des einzelnen mikroskopischen Objektes auffassen kann; z. B. ist die Angabe der Energiewerte eines Atoms von dieser Art. In der Mehrzahl der Fälle aber sind die Ergebnisse, die aus der Quantenmechanik gewonnen werden, statistischer Natur. Dies hat besonders bei der Diskussion der zeitlichen Entwicklung zu Schwierigkeiten der Interpretation geführt.

Betrachten wir noch einmal die (der Einfachheit halber eindimensionale) Bewegung eines freien Teilchens. In der klassischen Mechanik ist die Bahn des Teilchens, seine Weltlinie, genau festgelegt, wenn die Ortskoordinate x_0 und der Impuls p_0 zu einem Zeitpunkt ($t = 0$) bestimmt sind (vgl. Bild 3.16). In der Quantenmechanik können die Voraussetzungen dazu nicht erfüllt werden, weil Ort und Impuls nicht gleichzeitig meßbar sind; die kanonischen Vertauschungsrelationen und die Unschärferelation verbieten dies. Allerdings wird in der Quantenmechanik die zeitliche Veränderung des Zustandsvektors[54] $|\psi(t)\rangle$ eindeutig festgelegt. Wenn $|\psi(0)\rangle$ und H bekannt sind, etwa durch

$$|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle \qquad ; \qquad H = \frac{P^2}{2m} \tag{3.16.1}$$

ist $|\psi(t)\rangle$ durch

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\psi(0)\rangle \tag{3.16.2}$$

ebenso determiniert wie die Bahn des Teilchens in der klassischen Mechanik. In Abschnitt 3.11.2 haben wir gesehen, daß die Position des Teilchens für $t \neq 0$ völlig unbestimmt ist. Das Teilchen kann überall angetroffen werden. Die gleiche Situation liegt aber auch in der (nichtrelativistischen) klassischen Mechanik vor, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = p_0/m$ nicht kennt. Dann sind als Weltlinien alle Geraden durch den Punkt $(x_0, 0)$, im Bild 3.16 gestrichelt angedeutet, gleich möglich, und wie in der Quantenmechanik kann sich das Teilchen nach der Zeit t an jedem beliebigen Ort befinden.

Der Indeterminismus der Quantenmechanik – gemeint ist die Tatsache, daß keine eindeutige Aussage über den Ort des Teilchens zur Zeit t gemacht werden kann – beruht auf der Annahme der Theorie, daß der Anfangszustand des Teilchens allein durch die genaue Angabe der Ortskoordinate schon eindeutig festgelegt ist; wir schreiben: $|x_0\rangle$. Daher ist häufig die Frage nach möglichen zusätzlichen Variablen gestellt worden, deren Kenntnis für das Teilchen den Determinismus der klassischen Mechanik wiederherstellen sollte. Diese Variable könnten natürlich nicht der Impuls oder die Geschwindigkeit sein, da ihre Werte gleichzeitig mit dem des Ortes festzulegen wären, was die Unschärferelation verbietet. Es

[54] Wir benutzen im folgenden das Schrödingerbild

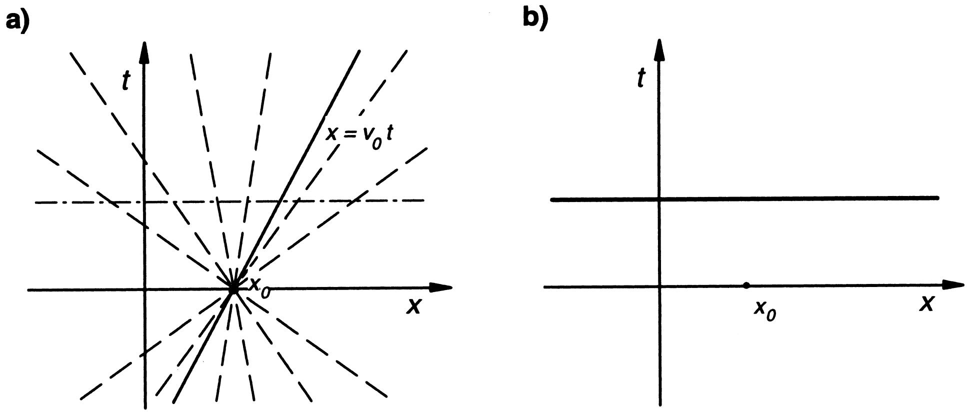

Bild 3.16 Zur Diskussion des Determinismus in der klassischen Mechanik (a) und der Quantenmechanik (b)

müßten neue, bisher verborgene Variable sein. Die Frage dieses Abschnittes lautet deshalb: Kann die Quantenmechanik durch die Einführung von „verborgenen Variablen“ so erweitert werden, daß ihre gesicherten Ergebnisse erhalten bleiben, aber der Indeterminismus vermieden wird?

Zunächst wollen wir an einem weiteren Beispiel die Bedeutung des Indeterminismus illustrieren. Betrachten wir den radioaktiven Zerfall eines Atomkerns, z. B.

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + \alpha \ .$$

Der Übergang vom Uranisotop (238) zum Thorium (234) unter Aussendung eines α-Teilchens soll durch eine Wechselwirkung H' beschrieben werden. Vereinfacht nehmen wir an, der zur Darstellung des Zerfalls benötigte Hilbertraum werde durch die beiden Zustandsvektoren

$$|\mathrm{U}\rangle \ \text{ und } \ |\mathrm{Th};\alpha\rangle$$

des Systems aufgespannt. Sie werden als orthonormale Eigenvektoren von H_0 betrachtet, zwischen denen die Wechselwirkung H' Übergänge verursacht, d. h. es gilt

$$\langle \mathrm{Th};\alpha\,|\,H'\,|\,\mathrm{U}\rangle \neq 0 \ .$$

Weiß man zur Zeit $t = 0$ mit Sicherheit, daß ein Urankern $^{238}_{92}\mathrm{U}$ vorliegt, dann wird das System für $t > 0$ durch

$$W(t)|\mathrm{U}\rangle$$

mit

$$W(t) = T\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t H'(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

beschrieben. Die Entwicklung dieses Zustandsvektors bezüglich der Basis $\{|\mathrm{U}\rangle, |\mathrm{Th};\alpha\rangle\}$ des Hilbertraumes lautet:

$$\begin{aligned} W(t)|\mathrm{U}\rangle &= a(t)|\mathrm{U}\rangle + b(t)|\mathrm{Th};\alpha\rangle \\ \text{mit} \qquad a(t) &= \langle \mathrm{U}\,|\,W(t)\,|\,\mathrm{U}\rangle \\ b(t) &= \langle \mathrm{Th};|\,\alpha\,|\,W(t)\,|\,\mathrm{U} \\ |a(t)|^{\,2} + |b(t)|^{\,2} &= 1\ . \end{aligned} \tag{3.16.3}$$

Bei der experimentellen Untersuchung einer sehr großen Anzahl solcher Systeme findet man das **radioaktive Zerfallsgesetz**:

> Liegen zur Zeit $t = 0$ N_0 Uran-Kerne vor, dann nimmt ihre Zahl N_t bei jedem Zerfall zwar unstetig um eine Einheit ab, für ein längeres Zeitintervall wird N_t aber in guter Näherung durch die stetige Funktion
>
> $$\begin{aligned} N_t \approx N(t) &= N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \\ \lambda &= \frac{\ln 2}{T} \end{aligned} \tag{3.16.4}$$
>
> gegeben; T ist die als Halbwertszeit bekannte Größe.

Mit Hinblick auf (3.16.3) kann dieses Gesetz durch

$$|a(t)|^{\,2} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{3.16.5}$$

ausgedrückt werden. Für große Teilchenzahlen N ergeben sich aus (3.16.4) keine praktischen Schwierigkeiten; für kleine N_0, insbesondere $N_0 = 1$, ist die Näherung des sprunghaften Abnehmens der Anzahl N_t durch eine stetige Funktion $N(t)$ nicht mehr sinnvoll. Irgendwann zerfällt der Urankern; über den Zeitpunkt macht die Quantenmechanik und das statistische Gesetz (3.16.4) keine Aussage. Die in Gleichung (3.16.3) mit (3.16.5) festgelegte Zeitabhängigkeit besagt nur, daß der Zustand „ein Urankern" im Laufe der Zeit stetig differenzierbar in „Zwitter"-Zustände $W(t)|\mathrm{U}\rangle$ übergeht, die aus einer Überlagerung des Anfangszustandes „ein Urankern" und des Endzustandes „ein Thoriumkern plus ein α-Teilchen" bestehen.

Der eigentliche Zerfallsprozeß erfolgt sprungartig durch einen unstetigen Übergang des Zustandes (3.16.3)

$$a(t)|\mathrm{U}\rangle + b(t)|\mathrm{Th};\alpha\rangle \Rightarrow |\mathrm{Th};\alpha\rangle\ \ . \tag{3.16.6}$$

Hier liegt die eigentliche Wurzel des Indeterminismus. Die Quantenmechanik sagt nichts darüber aus, wann dieser Prozeß geschieht. Es handelt sich um einen Akt, der nicht von dem – in der Zeit stetigen – Operator $W(t)$ bestimmt wird. Daher hat man eine eigene Bezeichnung eingeführt. Man sagt: Gleichung (3.16.6) beschreibt die **Reduktion eines quantenmechanischen Zustandes**.[55]

Erwin Schrödinger hat zur Verdeutlichung dieser Situation ein „burleskes" Experiment ersonnen (Zitat aus [3], S. 812):

[55] In der Literatur spricht man meist von der „Reduktion eines Wellenpaketes", da man eine ausgedehnte Ortwellenfunktion im Sinn hat, die bei einer Ortsmessung auf eine δ-Funktionsartige Verteilung reduziert wird.

Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine (die man gegen den direkten Zugriff der Katze sichern muß): in einem Geigerschen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, so wenig, daß im Laufe einer Stunde vielleicht eines von den Atomen zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht es, so spricht das Zählrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmerchen, das ein Kölbchen mit Blausäure zertrümmert. Hat man dieses ganze System eine Stunde lang sich selbst überlassen, so wird man sich sagen, daß die Katze noch lebt, wenn inzwischen kein Atom zerfallen ist. Der erste Atomzerfall würde sie vergiftet haben.

Formal können wir dieses Experiment beschreiben, indem wir (3.16.3) ergänzen zu:

$$W(t)\,|\,\mathrm{U}; \text{lebende Katze}\rangle = a(t)\,|\,\mathrm{U}; \text{lebende Katze}\rangle + b(t)\,|\,\mathrm{Th}; \alpha; \text{tote Katze}\rangle \ .$$

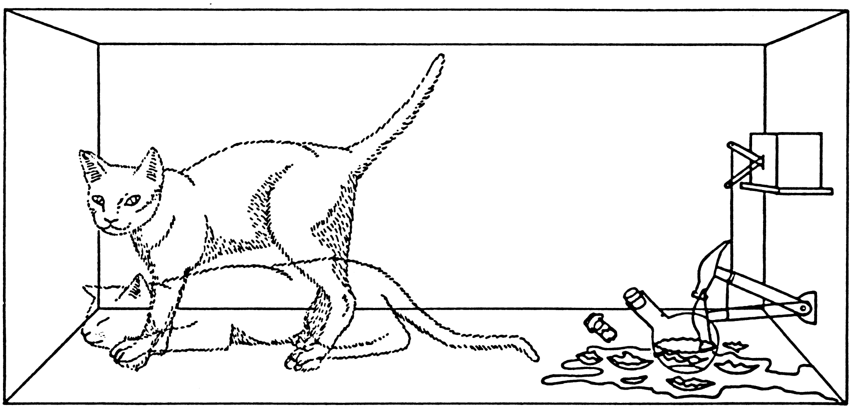

Bild 3.17 Die Schrödinger-Katze

Nach einer Stunde hat die Wellenfunktion des Systems eine Form erreicht, in der anscheinend die tote und die lebende Katze eine Komponente gleicher Größe haben. Wann die Katze wirklich stirbt, geht aus Formel (3.16.7) nicht hervor. Dazu ist die Reduktion des Zustandes analog zu (3.16.6) notwendig.

Betrachten wir noch einmal den Zerfall *eines einzelnen* Atomkerns. Dazu nehmen wir hypothetisch an, die radioaktive Substanz in Schrödingers Experiment bestehe aus nur einem Atom. Für die Katze stellt sich der Zerfall nicht als ein stetiger Prozeß dar, wie es der Zustand (3.16.7) mit Gleichung (3.16.5) beschreibt. Vor dem Zerfall ist sie stets gleichbleibend lebendig und danach ebenso vollständig tot; Zwitterzustände wird sie nicht erkennen. Der Zerfallsakt ist für sie ein sprunghafter Übergang, bei dem der Zustand $W(t)|\mathrm{U}\rangle$ in den Zwei-Teilchenzustand $|\mathrm{Th}; \alpha\rangle$ überführt, „reduziert“ wird

$$|\mathrm{U}\rangle \Rightarrow |\mathrm{Th}; \alpha\rangle \ , \tag{3.16.7}$$

denn in jedem Moment ist die Katze über den Zustand des Kernes informiert. Anders dagegen der Besitzer der Katze: Er hat den Stahlkasten zu einer bestimmten Zeit im Zustand $|\mathrm{U}; \text{Katze lebendig}\rangle$ präpariert und dann geschlossen. Nun kann er das System nur noch durch die Wahrscheinlichkeitsaussage (3.16.5) beschreiben. Will er sich Gewißheit verschaffen, so muß er eine „Messung" vornehmen, er muß den Kasten öffnen und nachsehen, ob die Katze noch lebt oder bereits vergiftet ist. Im Bild (3.18) ist der „Informationsstand" der Katze und des Besitzers bei einem möglichen Experiment in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

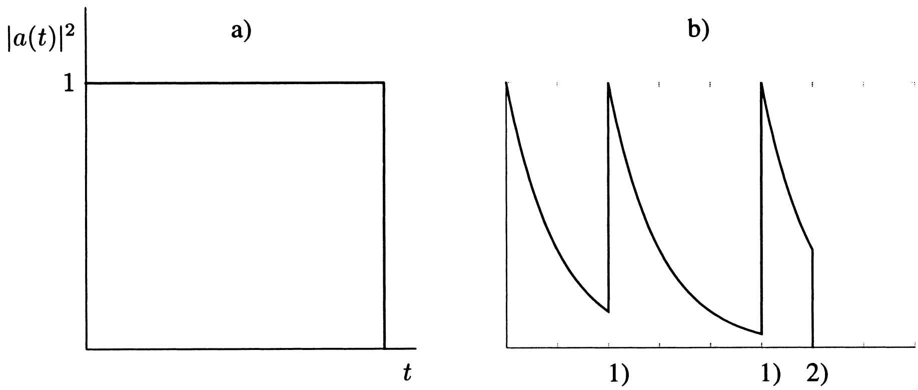

Bild 3.18 Der Informationsstand a) der Katze, b) des Besitzers. 1) Messungen mit dem Ergebnis: Katze lebt; 2) Messung mit dem Ergebnis: Katze ist tot

An diesem Beispiel erkennt man, daß allgemein für den Meßprozeß eine Mehrdeutigkeit besteht. Sie ergibt sich aus der Frage: Wo liegt die Grenze zwischen zu messendem Objekt und dem Meßinstrument? – Konkret kann beim Schrödinger-Experiment die Katze entweder als Meßinstrument aufgefaßt werden, durch deren Tod der Zerfall des Urankerns angezeigt wird, oder aber als Teil des gesamten, von außen beobachteten Systems. Im zweiten Fall wird die Messung wie beschrieben durch den Besitzer der Katze vorgenommen, der durch Hinschauen feststellt, ob die Katze tot ist. Das zuletzt Gesagte deutet auf die Möglichkeit hin, den eigentlichen Meßakt erst in der Aufnahme einer potentiell vorhandenen Information durch einen menschlichen Beobachter zu sehen, vgl. Abschnitt 3.16.4.

3.16.2 Das Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon

In dem in der Einleitung zu diesem Absatz unter [1] genannten Aufsatz kommen Einstein, Podolsky und Rosen zu dem Schluß, daß die Quantenmechanik keine vollständige Beschreibung der physikalischen Realität liefert. Ihre Überlegungen sollen hier gekürzt wiedergegeben werden, um eine weitere Problematik des quantenmechanischen Meßprozesses zu zeigen. Zunächst ist einiges zu den verwendeten Begriffen zu sagen: Was man auch unter einer „vollständigen Theorie" verstehen mag, so erscheint den Autoren doch folgende Forderung unerläßlich:

> *„Jedem Element der physikalischen Realität muß ein Gegenstück in der Theorie entsprechen."*

Dabei ist noch nicht festgelegt, was „Elemente der physikalischen Realität“ sind. In jedem Fall können diese nicht aufgrund philosophischer Überlegungen a priori postuliert werden, sondern müssen sich aus Experimenten und Messungen zwingend ergeben. Eine umfassende Definition ist in diesem Zusammenhang nicht erforderlich, und man kann sich mit dem folgenden, vernünftig erscheinenden Kriterium begnügen:

> *„Wenn man den Wen einer physikalischen Größe mit Sicherheit voraussagen kann, ohne das betrachtete System zu stören, dann existiert ein Element der physikalischen Realität, das dieser Größe entspricht.“*

Zur Verdeutlichung ihres Gedankenganges diskutieren Einstein und seine Mitarbeiter folgendes Experiment: Betrachtet werden zwei Teilchen, die sich nur eindimensional bewegen können. Zwischen der Zeit $t = 0$ und $t = T$ mögen sie miteinander in Wechselwirkung stehen, danach sollen keine Kräfte mehr zwischen ihnen wirken. In der Quantentheorie wird davon ausgegangen, daß jedes System durch einen Zustandsvektor eines geeigneten Hilbertraumes vollständig beschrieben werden kann. Für $t > T$ befinde sich das Zweiteilchensystem in dem durch

$$|\psi\rangle = \int \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} p x_0} \, |p, -p\rangle \, \mathrm{d}p \tag{3.16.8}$$

beschriebenen Zustand. $|p_1, p_2\rangle$ seien die Eigenwerte der Impulsoperatoren P_1 und P_2 für die beiden Teilchen. Sie bilden eine Basis des Hilbertraumes; d. h. es gilt

$$\begin{aligned} P_1 |p_1, p_2\rangle &= p_1 |p_1, p_2\rangle \\ P_2 |p_1, p_2\rangle &= p_2 |p_1, p_2\rangle \\ \int |p_1, p_2\rangle \, \mathrm{d}p_1 \, \mathrm{d}p_2 \, \langle p_1, p_2| &= \mathbf{1} \\ \text{und ebenso} \int |x_1, x_2\rangle \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \langle x_1, x_2| &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Der Zustand (3.16.8) ist so gewählt, daß der Gesamtimpuls Null ist

$$(P_1 + P_2)|\psi\rangle = \int (p - p)|p, -p\rangle \, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} p x_0} \, \mathrm{d}p = 0 \; .$$

Mißt man also den Impuls des 1. Teilchens mit dem Wert p_1^0 dann hat das andere Teilchen mit Sicherheit einen gleich großen Impuls in entgegengesetzter Richtung. Quantenmechanisch wird dies dadurch beschrieben, daß die Impulsmessung an Teilchen *1* den Zustand (3.16.8) reduziert zu

$$|\psi\rangle \overset{\text{Impulsmessung}}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} p_1^0 x_0} \left|p_1^0, -p_1^0\right\rangle \; . \tag{3.16.9}$$

Wir wollen dies formal nachrechnen: Die Messung wird beschrieben durch die Projektion in einen Unterraum mittels des Operators

$$\int \left|p_1^0, p_2\right\rangle \mathrm{d}p_2 \left\langle p_1^0, p_2\right| \; .$$

Der Zustandsvektor $|\psi\rangle$ aus Gleichung (3.16.8) geht also über in

$$\begin{aligned}\int \big|p_1^0, p_2\big\rangle \, \mathrm{d}p_2 \big\langle p_1^0, p_2\big|\psi\big\rangle &= \int \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}px_0} \, \big|p_1^0, p_2\big\rangle \, \big\langle p_1^0, p_2\big|p, -p\big\rangle \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}p_2 \\ &= \int \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}px_0} \delta(p_1^0 - p)\delta(p_2 + p)\big|p_1^0, p_2\big\rangle \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}p_2 \\ &= \int \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}px_0} \delta(p_1^0 - p)\big|p_1^0, -p\big\rangle \, \mathrm{d}p \\ &= \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}x_0}\big|p_1^0, -p_1^0\big\rangle \ .\end{aligned}$$

Andererseits ist $|\psi\rangle$ auch Eigenvektor des Operators $Q_2 - Q_1$, der Differenz der Ortsoperatoren der beiden Teilchen. Wir zeigen dies mit Hilfe der Ortsdarstellung von $|\psi\rangle$. Aus (3.16.9) folgt

$$\begin{aligned}|p_1, p\rangle &= \int |x_1, x_2\rangle \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \langle x_1, x_2|\, p_1, p\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int |x_1, x_2\rangle \, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}p(x_1 - x_2)} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\ \text{und damit} \quad |\psi\rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int |x_1, x_2\rangle \, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}p(x_0 + x_1 - x_2)} \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\ &= \int |x_1, x_2\rangle \, \delta(x_0 + x_1 - x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \ .\end{aligned}$$

Daraus folgt weiter

$$|\psi\rangle = \int |x_1, x_0 + x_1\rangle \, \mathrm{d}x_1 \ .$$

Für die Operatoren Q_2 und Q_1 ergibt sich deshalb

$$\begin{aligned}Q_2 \, |\psi\rangle &= \int (x_0 + x_1) \, |x_1, x_0 + x_1\rangle \, \mathrm{d}x_1 \\ Q_1 \, |\psi\rangle &= \int x_1 \, |x_1, x_0 + x_1\rangle \, \mathrm{d}x_1 \\ \text{und damit} \quad (Q_2 - Q_1) \, |\psi\rangle &= x_0 \int |x_1, x_0 + x_1\rangle \, \mathrm{d}x_1 \\ &= x_0 \, |\psi\rangle \ .\end{aligned}$$

Die Differenz der Ortskoordinaten der beiden Teilchen hat im Zustand $|\psi\rangle$ also mit Sicherheit einen Wert x_0. Mißt man daher den Wert x_1^0 für die Ortskoordinate des Teilchens $\underline{1}$, dann ist auch für das Teilchen **2** der Ort genau festgelegt: $x_2 = x_1^0 + x_0$. Bei der Ortsmessung findet also die folgende Reduktion von $|\psi\rangle$ statt:

$$|\psi\rangle \overset{\text{Ortsmessung}}{\longrightarrow} \big|x_1^0, x_1^0 + x_0\big\rangle \ . \tag{3.16.10}$$

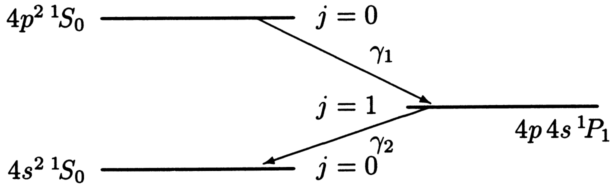

Bild 3.19
Calcium-Energieniveaus, 010-Kaskade

Einstein und seine Mitarbeiter knüpfen an die Ergebnisse (3.16.9) und (3.16.10) folgende Überlegung: Lange nachdem die beiden Teilchen nicht mehr in Wechselwirkung miteinander stehen, kann ein Beobachter wählen, ob er den Impuls oder den Ort des Teilchens *1* messen will. Im ersten Fall hat er gleichzeitig den Impuls des Teilchens **2** genau festgelegt. Wählt er die andere Möglichkeit, dann kann er den Wert der Ortskoordinate x_2 mit Sicherheit angeben. – Weil zwischen Beobachter und Teilchen **2** ebenso wie zwischen den beiden Teilchen keine Wechselwirkung besteht, wird das Teilchen **2** durch die Messung in keiner Weise gestört. In Übereinstimmung mit Definition sind also Ort *und* Impuls des Teilchens **2** „Elemente physikalischer Realität“. Eine vollständige Theorie müßte dies wiedergeben; in der Quantenmechanik dagegen ist wegen $[P_2, Q_2] = \frac{\hbar}{i}$ nur der Impuls oder nur der Ort „real“. Einstein kommt deshalb zu dem Schluß, daß die Quantenmechanik keine vollständige Theorie ist.
Niels Bohr hat dazu folgende Antwort geschrieben; siehe [2]:

1. Auch in der Quantenmechanik können die betrachteten Observablen, nämlich

$$(P_1 + P_2) \text{ und } (Q_2 - Q_1)$$

gleichzeitig gemessen werden, wie

$$[P_1 + P_2, Q_2 - Q_1] = 0$$

zeigt.

2. Die nicht zu vernachlässigende Wechselwirkung zwischen Meßobjekt und Meßinstrument bringt die Notwendigkeit mit sich, endgültig auf das klassische Kausalitätsideal zu verzichten und unsere Haltung gegenüber der physikalischen Realität von Grund auf zu revidieren.

3.16.3 Die Bellsche Ungleichung und die Unmöglichkeit von lokalen verborgenen Variablen

Ein zweiter Aspekt des EPR-Paradoxes liegt in der „Nichtlokalität“ quantenmechanischer Aussagen. Damit ist gemeint, daß die Wellenfunktion beide Teilchen gemeinsam beschreibt und die Messung an einem der beiden auch Information über das andere, räumlich entfernte Teilchen liefert. Es stellt sich die Frage: Woher „weiß“ das ungestörte 2. Teilchen, in welchen Zustand es übergehen soll? – Zur Erklärung kann man die Existenz irgendwelcher verborgener Informationen postulieren, die nicht in der Wellenfunktion enthalten sind und die „Entscheidung“ des 2. Teilchens bestimmen. 1964 konnte J.S. Bell beweisen, daß jede Theorie, die annimmt, dem Teilchen sei eine „Liste mit Instruktionen“ für sein zukünftiges Verhalten mitgegeben, bei gewissen Experimenten andere Voraussagen macht als die Quantenmechanik. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, empirisch zu entscheiden, welche der Theorien richtig ist.

Am Beispiel eines Experimentes, das J.F. Clauser und Mitarbeitern im Jahre 1969 vorgeschlagen haben (vgl. [9] der Literaturliste), lassen sich die Argumente Bells und die von ihnen bewiesene Ungleichung in einer einfachen Weise beschreiben:

Calcium-Atome werden in einen angeregten Zustand gebracht, der den Gesamtdrehimpuls $j = 0$ trägt. Innerhalb sehr kurzer Zeit fallen sie in einer Kaskade über einen $(j = 1)$-Zwischenzustand in den Grundzustand $(j = 0)$ zurück; dabei werden zwei kohärente Photonen emittiert, wie im Bild 3.19 angedeutet ist.
Wenn diese Photonen in entgegengesetzer Richtung auseinanderlaufen, können sie in einem geeigneten Koinzidenzzähler registriert werden, vgl. Bild 3.20. Stellt man in ihren Weg je ein Polarisationsfilter, dann verändert sich die Zählrate. Experimentell findet man eine Abhängigkeit vom relativen Winkel ϕ, den die optischen Achsen der beiden Filter miteinander bilden; für die betrachtete 010-Kaskade tritt bei $\phi_{\text{max}} = 0°$ ein Maximum und bei $\phi_{\text{min}} = 90°$ ein Minimum an Koinzidenz auf.

Wenn jedes Photon eine festgelegte Polarisationsrichtung hätte – gekennzeichnet durch den Winkel α in Bezug auf eine raumfeste Achse senkrecht zur Ausbreitungsrichtung – könnte man dieses Versuchsergebnis verstehen, indem man annimmt, aufgrund des gemeinsamen Ursprungs der Photonen sei ihre Polarisation korreliert.

In der Quantenmechanik aber ist die Polarisationsrichtung eines Photons so lange unbestimmt, bis es auf einen Polarisator trifft; erst dann muß es sich „entscheiden“, welchen der beiden möglichen Eigenzustände es annehmen will. Für den Fall von gekreuzten Polarisationsfilter $(\phi_{\text{min}} = 90°)$ gilt quantenmechanisch folgende Aussage: Von jedem Photonenpaar – in einer Kaskade von einem Atom emittiert – wird immer ein Photon durchgelassen und das andere im Filter absorbiert. Daraus ergibt sich, ähnlich dem EPR-Paradox, die Frage, woher das 2. Photon weiß, ob es den Filter passieren soll oder nicht.

Wenn γ_1 den Polarisator 1 durchquert hat, ist γ_2 in der Richtung ϕ_1 polarisiert. Entsprechend dem Malusschen Gesetz – vgl. Bild 3.21 – ist dann $\cos^2\phi$ die Wahrscheinlichkeit, γ_2 im Zähler nachzuweisen.

Die Quantenmechanik liefert also dafür, daß beide Photonen eines Paares die Filter passieren, die vom Winkel ϕ abhängige Wahrscheinlichkeit

$$W_{\text{QM}}(\phi) = \frac{1}{2}\cos^2\phi \; . \tag{3.16.11}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist erforderlich, weil die zweite, linear unabhängige Polarisationsrichtung durch den Filter 1 unterdrückt wurde.

Nehmen wir jedoch an, die Quantenmechanik wäre nicht vollständig und jedes Photon würde bei der Emission einen verborgenen aber festgelegten Polarisationswinkel α erhalten, dann müßte das Experiment anders ausfallen. Wählen wir die Bezeichnung wie in Bild 3.20.Bei einem Photonenpaar mit den Polarisationsrichtungen a_1 bzw. a_2 ergibt sich aus dem Malusschen Gesetz für die Wahrscheinlichkeit des Nachweises in den Zählern

$$P(\gamma_1) = \cos^2(\phi_1 - \alpha_1)$$

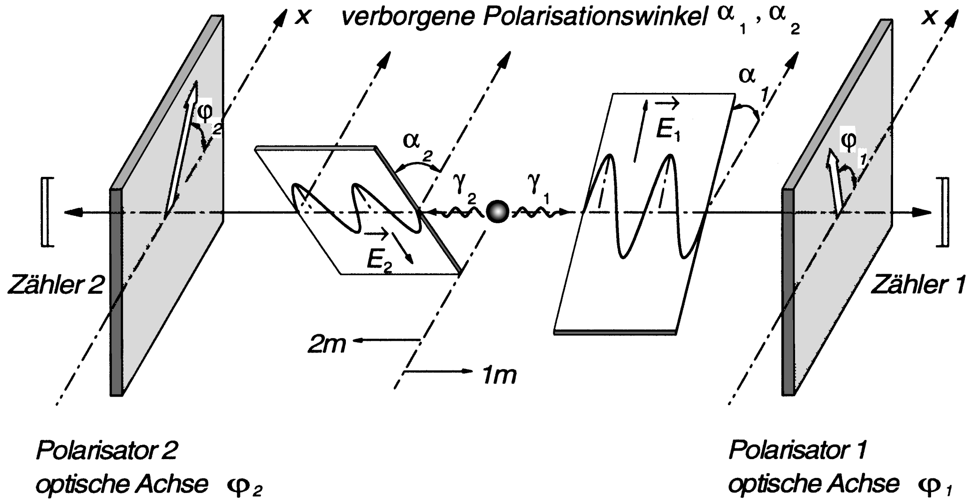

Bild 3.20 Zur Messung der Korrelation zwischen den beiden Photonen einer Kaskade

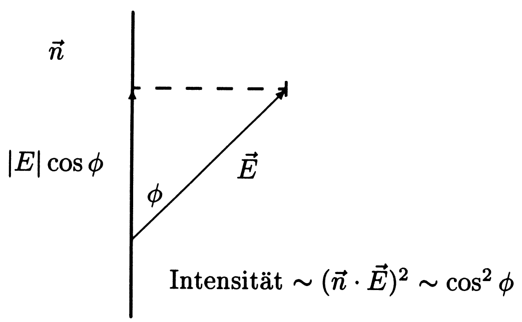

Bild 3.21
Begründung des Malusschen Gesetzes

$$P(\gamma_2) = \cos^2(\phi_2 - \alpha_2)\ .$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß beide Photonen die Filter passieren, wird dann durch das Produkt von $P(\gamma_1)$ und $P(\gamma_2)$

$$P(\gamma_1, \gamma_2) = \cos^2(\phi_1 - \alpha_1)\cos^2(\phi_2 - \alpha_2)$$

gegeben. Weil im Experiment alle Polarisationsrichtungen auftreten, muß über α_1 und α_2 integriert werden, um die Koinzidenzwahrscheinlichkeit zu erhalten. Im allgemeinen nimmt man an, das eine Beziehung zwischen den Polarisationsrichtungen der Photonen eines Paares besteht. Die Häufigkeitsverteilung der Winkeldifferenz $(\alpha_1 - \alpha_2)$ wird durch Wichtung mit einer Funktion $\rho(\alpha_1 - \alpha_2)$ berücksichtigt; man erhält also

$$W_{\text{verb.Var.}}(\phi) = C \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2(\varphi_1 - \alpha_1) \cos^2(\phi_2 - \alpha_2) \, \mathrm{d}\alpha_1 \, \mathrm{d}\alpha_2 \quad (3.16.12)$$

mit $\rho(\alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ und C als Normierungsfaktor.
Mit der speziellen Hypothese: $\alpha_1 = \alpha_2$ für die verborgenen Polarisationsrichtungen gilt:

$$\rho(\alpha_1 - \alpha_2) = \delta(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$W_{\text{verb.Var.}}(\phi) = C \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_1 - \alpha_1) \cos^2(\phi_2 - \alpha_2) \, \mathrm{d}\alpha \, .$$

Dieses Integral läßt sich auswerten, und man erhält bei richtiger Normierung:

$$W_{\text{verb.Var.}}(\phi) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \phi \right) \quad (3.16.13)$$

im Widerspruch zum Ergebnis, das die Quantenmechanik voraussagt. Im Bild 3.22 sind beide Funktionen zum Vergleich dargestellt.

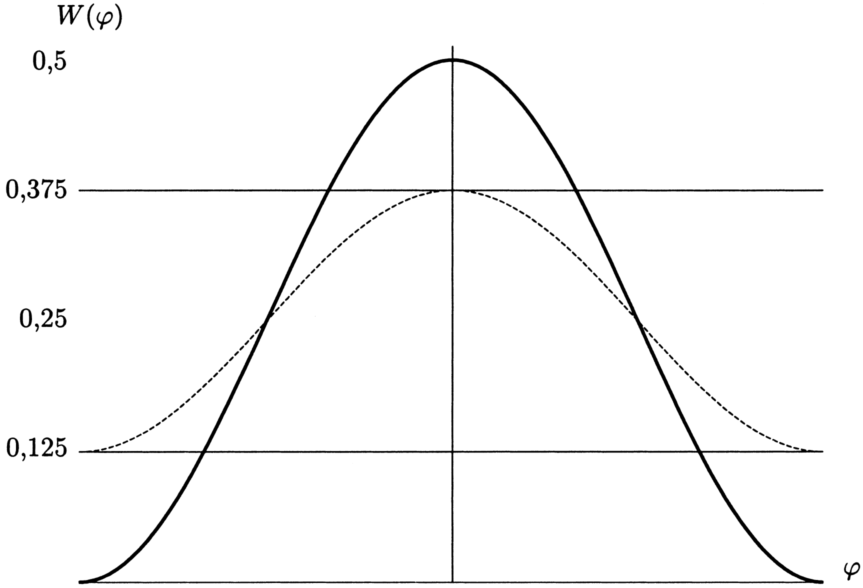

Bild 3.22 Vergleich der theoretischen Voraussagen: —: Quantenmechanik; - - -: Theorie mit verborgenene Variablen

Allein die Hypothese, daß dem Photon bei der Emission eine feste Polarisationsrichtung zugeschrieben werden kann – sie braucht nicht bekannt oder überhaupt in irgendeiner Weise beobachtbar zu sein – führt zu einer anderen Voraussage über das Versuchsergebnis als die Quantenmechanik.

Wir haben dies anhand eines speziellen Beispiels für die Funktion $\rho(\alpha_1 - \alpha_2)$ gesehen. Allgemein läßt sich das Integral (3.16.12) natürlich nicht auswerten, weil jede Theorie verborgener Variablen unterschiedliche Winkelverteilungen $\rho(\alpha_1 - \alpha_2)$ fordern kann. Aber wegen der Positivität dieser Funktion konnte J.S. Bell jedoch eine Ungleichung beweisen, die für jede Theorie verborgener Variablen erfüllt sein muß. Spezialisiert auf dieses Experiment lautet die **Bellsche Ungleichung**

$$-1 \leq \underbrace{3W(\phi) - W(3\phi) - 1}_{:= \frac{\Delta}{R_0}} \leq 0 \,. \tag{3.16.14}$$

Die quantenmechanische Funktion (3.16.11) verletzt diese Ungleichung in gewissen Winkelbereichen, am stärksten bei $\phi = 22{,}5^\circ$ und $\phi = 67{,}5^\circ$; siehe Bild 3.23: Das Experiment

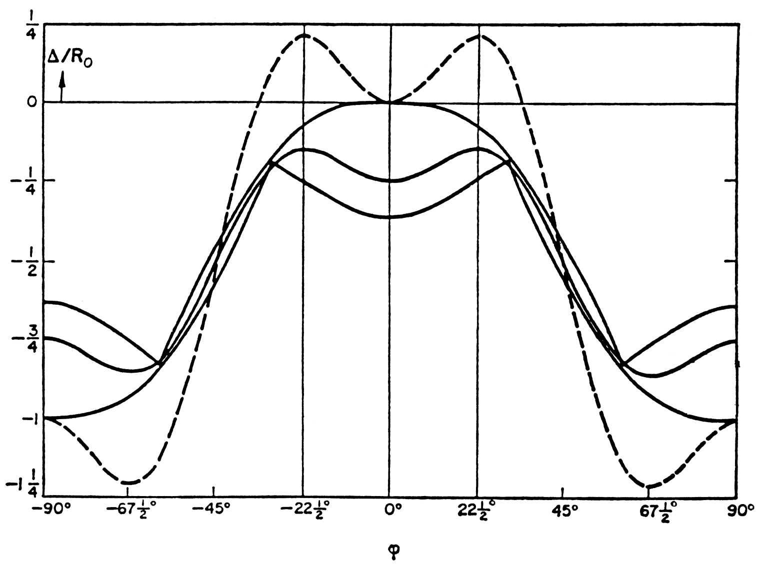

Bild 3.23 Δ/R_0 als Funktion von ϕ für parallele Korrelation (010-Kaskade).
- - - : Quantenmechanik; — : Verschiedene Theorien mit verborgenen Variablen

wurde erstmalig 1972 in Berkeley durchgeführt, und seine Ergebnisse – vgl. Bild 3.24 – bestätigten die Quantenmechanik. Für die beiden kritischen Winkel ergab sich

$$\frac{\Delta}{R_0}(22{,}5^\circ) = 0{,}104 \pm 0{,}026$$
$$\frac{\Delta}{R_0}(67{,}5^\circ) = -1{,}097 \pm 0{,}018 \,.$$

Diese Werte widersprechen der Ungleichung (3.16.14), auch wenn man die Fehlergrenzen berücksichtigt. Inzwischen wurde das Experiment in Orsay von Alain Aspect und Mitarbeitern in beträchtlich verbesserter Form und mit interessanten Variationen mehrfach wiederholt. Immer widersprachen die Resultate der Bellschen Ungleichung und bestätigten

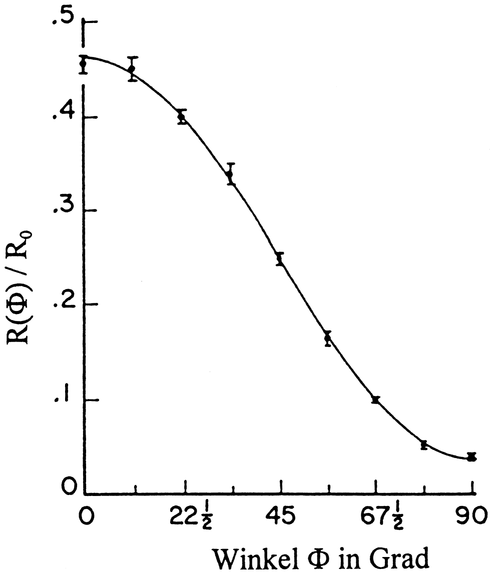

Bild 3.24
Experimentelle Ergebnisse über die Koinzidenzrate in Abhängigkeit vom Winkel zwischen den Polarisatoren. Die eingezeichnete Kurve gibt das Resultat der quantenmechanischen Formel (3.16.11).

die Quantentheorie. Insbesondere stellte man die beiden Polarisationsfilter soweit entfernt auf, daß man Überlichtgeschwindigkeiten benötigen würde, um ihren Abstand in der kurzen Zeit zwischen dem Ansprechen der beiden Zähler zu überwinden. Die Existenz lokaler verborgener Variablen scheint damit widerlegt.

3.16.4 Deutungen der Quantenmechanik

Normalerweise ist für ein Lehrbuch der theoretischen Physik die Frage nach der Bedeutung des entwickelten theoretisch-physikalischen Gebäudes für unser Verständnis der Natur kein Thema. Die Antwort versteht sich von selbst, nämlich von den behandelten konkreten Problemen her. Die in den drei vorangegangenen Unterabschnitten dargestellten Diskussionen und Ergebnisse legen solch eine automatische Schlußfolgerung für die Quantenmechanik nicht nahe. Daher ist der jetzt folgende Unterabschnitt der physikalischen Deutung der Quantentheorie gewidmet.[56]

Der Autor muß jedoch gleich bekennen: Er sieht sich nicht in der Lage, dem Leser eine wirklich befriegende Antwort auf die Frage zu geben:

Wie versteht die Quantenmechanik die mikroskopische Welt?

Davon zu trennen ist jedoch die Frage:

Wie interpretiert die Quantenmechanik konkrete Experimente?

---

[56] Bei seiner Formulierung hat der Verfasser großen Gebrauch von Referenz [12] gemacht, auf welches sehr nützliche Buch für Einzelheiten verwiesen sei.