1. Der begriffliche Rahmen

1.1 Geometrie

Der Name „Geometrie“ kommt aus dem Griechischen; es handelt sich um ein von den alten Griechen aus den Bestandteilen $\gamma\tilde{\eta}$ ($g\bar{e}$), Erde, und $\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\varepsilon\iota\nu$ (metrein), messen, gebildetes Kunstwort. Warum die Geometrie ursprünglich etwas mit der Erde zu tun hatte, werden wir unten noch genauer erläutern. Aber der zweite Namensbestandteil, das Messen, ist wohl heute der wichtigere, und die grundlegenden von der Geometrie gemessenen Größen sind Längen (Abstände, Entfernungen), Winkel, Flächeninhalte und Volumina.

1.2 Anschauliche und Analytische Geometrie

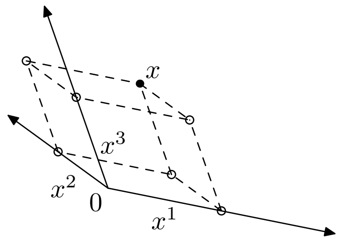
Geometrie im ursprünglichen Verständnis handelt von Ebene und Raum und den darin enthaltenen Figuren und Gegenständen und deren Maßverhältnissen. Da wir mit solchen Gegenständen täglich umzugehen gewohnt sind, besitzen wir alle eine große Menge geometrischen Wissens, selbst wenn wir uns nie mit Mathematik beschäftigt haben. Deshalb ist die Geometrie auch für den Schulunterricht besonders geeignet: Ohne großen begrifflichen Aufwand können interessante neue Einsichten gewonnen werden, indem das Verborgene auf das Offensichtliche zurückgeführt wird. Einer strengen mathematischen Behandlung werden die Gegenstände der Geometrie allerdings erst dann zugänglich, wenn wir sie in den axiomatischen Rahmen der Mathematik eingeordnet haben; alle getroffenen Aussagen müssen sich danach logisch auf die Axiome zurückführen lassen. Die Anschauung dient dann „nur“ noch als Leitfaden, um diese Schlusskette zu finden. Dahinter steht die Einsicht, dass Anschauung alleine ein zwar mächtiges, aber manchmal auch trügerisches Hilfsmittel ist (man denke nur an optische Täuschungen), und da die Mathematik sich nicht allein auf Erfahrung gründen kann (sie möchte ja im Gegenteil unerwünschte Erfahrungen – etwa den Einsturz einer Brücke – durch gedankliche Antezipation vermeiden helfen), ist sie auf sichere Schlussweisen angewiesen.

Einen ersten Versuch dieser Art unternahm um 300 v. Chr. der griechische Mathematiker *Euklid*,[1] indem er alle damals bekannten Sätze der ebenen und

[1] Euklid von Alexandria, ca. 325–265 v.Chr.

räumlichen Geometrie auf wenige Axiome zurückführte, die für unmittelbar einsichtig und daher keines weiteren Beweises bedürftig angesehen wurden [12]. Eine moderne Version dieses Programms sind die 1899 erschienenen „Grundlagen der Geometrie“ [18] von D. Hilbert.[2] In der Folge dieses Buches wurde im 20. Jahrhundert Schritt für Schritt die gesamte Mathematik auf eine axiomatische Grundlage gestellt.

Heute ist deshalb ein eigenes Axiomensystem für die euklidische Geometrie eigentlich entbehrlich; sie kann in den axiomatischen Rahmen der Analysis (der Theorie der reellen Zahlen) eingeordnet werden. Das geschieht mit Hilfe der *analytischen Geometrie*, in der jedem Punkt des Anschauungsraumes umkehrbar eindeutig ein Tripel reeller Zahlen (*Koordinaten*) zugeordnet wird, die wir auf drei Achsen durch einem gemeinsamen Punkt 0 (dem *Koordinatenursprung*) abtragen.



Man ersetzt dadurch den *Anschauungsraum* durch die Menge $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, die aus allen Zahlentripeln $x = (x^1, x^2, x^3)$ besteht;[3] entsprechend wird die *Ebene* durch die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aller Zahlenpaare ersetzt. Diese Idee ist der wohl bedeutendste mathematische Beitrag des französischen Philosophen und Mathematikers *R. Descartes*;[4] die *kartesischen Koordinaten* und das *kartesische Produkt* werden daher nach ihm benannt.

Geraden und Ebenen werden in diesem mathematischen *Modell* der euklidischen Geometrie mit Hilfe der Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^3$ als ein- und zweidimensionale *affine Unterräume* (Untervektorraum plus konstanter Vektor) modelliert. So können wir mittels der kartesischen Struktur die Punkte im dreidimensionalen Raum identifizieren und beschreiben, wir haben einen Begriff davon, wann etwas gerade, also nicht gekrümmt ist, eben wenn es ein solcher affiner Unterraum ist, und wir haben schließlich einen Dimensionsbegriff, zumindest für affine Unterräume. Aber wir können noch nicht messen, und daher ist der kartesische Zahlenraum $\mathbb{R}^3$ noch inhaltsärmer als unser Anschauungsraum. Es fehlen noch der euklidische Abstands- und Winkelbegriff. Diese Struktur läßt sich mathematisch am elegantesten durch das *innere*

[2] David Hilbert, 1862 (Königsberg) – 1943 (Göttingen)

[3] Wir werden die Komponenten (*Koordinaten*) stets mit oberen Indizes bezeichnen; x^1, x^2, x^3 sind also keine Potenzen, sondern nur Namen für drei verschiedene Zahlen. Oft werden diese Zahlen auch einfach x, y, z genannt (in dem Fall darf der Punkt in $\mathbb{R}^3$ natürlich nicht mehr x oder y heißen).

[4] René Descartes, lat. Cartesius, 1596 (Touraine, Frankreich) – 1650 (Stockholm)

Produkt (*Skalarprodukt*) einführen, das je zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ die Zahl

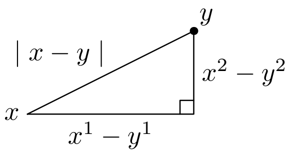
$$\langle x, y \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \tag{1.1}$$

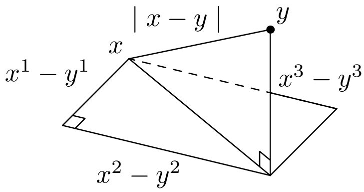
zuordnet. Hierdurch gewinnen wir eine mathematische Definition für die *Länge* oder den *Betrag* eines Vektors x, nämlich die Zahl

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \tag{1.2}$$

den *Abstand* zweier Punkte x, y,

$$|x - y| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum (x^i - y^i)^2} \tag{1.3}$$

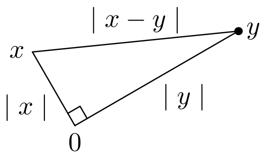




sowie den *rechten Winkel*:

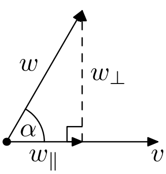
$$x \perp y :\Longleftrightarrow \langle x, y \rangle = 0. \tag{1.4}$$

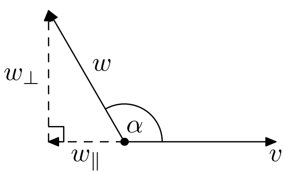
Damit wird z.B. die Gültigkeit des Lehrsatzes von *Pythagoras*[5] erzwungen, der natürlich bei der Definition des Skalarprodukts (1.1) bereits Pate gestanden hat: Ist $x \perp y$, also $\langle x, y \rangle = 0$, so folgt



$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x - y \rangle - \langle y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \ |x|^2 \qquad\qquad + \qquad\qquad |y|^2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Mit dem Skalarprodukt lassen sich auch *Winkel* bestimmen: Sind zwei Vektoren v, w mit $\angle(v, w) = \alpha$ gegeben, dann zerlegen wir w in eine zu v parallele und eine zu v senkrechte Komponente: $w = w_{\|} + w_{\perp}$ mit $w_{\|} = \lambda v$ und $w_{\perp} \perp v$.





[5] Pythagoras von Samos, ca. 569–475 v.Chr.

Dann ist $\langle v, w\rangle = \langle v, w_{\|}\rangle = \lambda\,|v|^2 = \pm|v|\,|w_{\|}|$. Nach der alten Schulweisheit „Cosinus = Ankathete / Hypothenuse“ ist $\cos\alpha = \pm|w_{\|}|/|w|$ (siehe voranstehende Figur), und wir erhalten

$$\langle v, w\rangle = |v|\,|w|\,\cos\alpha. \tag{1.6}$$

Diese Beziehung können wir nun umgekehrt als *Definition* des Winkels α zwischen den Vektoren v und w auffassen.

Der dreidimensionale kartesische Raum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Skalarprodukt (1.1), ist der *euklidische Raum* $\mathbb{E}^3$.[6] Das so gefundene mathematische Modell gibt die räumliche euklidische Geometrie vollständig wieder: Jeder geometrische Sachverhalt entspricht einem beweisbaren Satz im $\mathbb{E}^3$. Allerdings leistet das Modell etwas „zu viel“: Während der euklidische Raum *homogen* und *isotrop* sein soll, was bedeutet, dass alle Punkte und Richtungen gleichberechtigt sind, werden bereits durch das kartesische Modell ein Punkt, nämlich der Ursprung 0, sowie die drei Richtungen der Koordinatenachsen ausgezeichnet. Die Geometrie ist natürlich von dieser Wahl, d.h. der Position und Lage des Koordinatenkreuzes unabhängig. Der Übergang von einer Koordinatenbeschreibung in eine andere wird durch einen *Koordinatenwechsel* geleistet: Dabei wird jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ einer Abbildung der Form $x \mapsto \tilde{x} = Ax + b$ für einen konstanten Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ und eine 3×3-Matrix A unterworfen. Um die Abstandsformel (1.5) auch in den neuen Koordinaten $\tilde{x}$ zu erhalten, ist die Matrix A *orthogonal*[7] zu wählen; diese Abbildungen $x \mapsto \tilde{x}$ sind genau die *Isometrien* des $\mathbb{E}^3$, die Transformationen, die alle Abstände und damit die gesamte Geometrie erhalten (vgl. Üb. 8).[8]

Bemerkung: Der euklidische Raum $\mathbb{E}^3$ gilt uns als der Raum unserer alltäglichen geometrischen Vorstellung und in ihm spielen sich die den Gesetzen der Newtonschen Mechanik gehorchenden physikalischen Prozesse ab. Aber nicht

[6] Wir können diese Unterscheidung in unserer Notation nicht immer sorgfältig durchhalten; oft werden wir den kartesischen Raum $\mathbb{R}^3$ implizit mit seiner euklidischen Struktur versehen.

[7] *Orthogonalität* ist wieder erst durch das Skalarprodukt (die euklidische Struktur) definiert: Eine Matrix A heißt *orthogonal*, wenn $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle\ \forall x, y \in \mathbb{R}^3$.

[8] Um das „Zu viel“ des Modells begrifflich deutlicher zu machen, unterscheidet man häufig zwischen dem *Vektorraum* $\mathbb{R}^3$, in dem der Nullpunkt 0 eine ausgezeichnete Rolle spielt, und dem *affinen Raum* $\mathbb{A}^3$, der als Menge mit $\mathbb{R}^3$ übereinstimmt, in dem die Auszeichnung des Nullpunktes aber aufgehoben ist. In $\mathbb{A}^3$ sind daher alle affinen Unterräume gleichberechtigt; die linearen Unterräume spielen keine Sonderrolle mehr. Die Elemente von $\mathbb{A}^3$ heißen *Punkte*, im Gegensatz zu *Vektoren* (Elementen des Vektorraums $\mathbb{R}^3$): Für zwei Punkte $a, b \in \mathbb{A}^3$ ist die *Differenz* $v = b - a$ (die ja bei Verschiebung des Nullpunkts ungeändert bleibt) ein „Vektor“; zwar ist der *Punkt* 0 nichts Besonderes, wohl aber die *Differenz* 0. Auch Grenzwerte von Differenzen sind Vektoren, zum Beispiel die Ableitung (Tangentenvektor) einer *Kurve* $a(t)$ im affinen Raum (Figur S. 13): $\frac{d}{dt}a(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(a(t+h) - a(t))$. Um die Notation einfacher zu halten, werden wir diese Feinheit allerdings nicht durch unterschiedliche Bezeichnungen ausdrücken. Für den genauen Begriff des affinen Raumes vgl. [3], Bd. 1, sowie [11].

nur die Newtonsche Physik, sondern auch die ihr zugrundeliegende Raumvorstellung sind historisch relativ junge Errungenschaften des menschlichen Geistes. Die räumliche Geometrie wird zwar bei Euklid [12] teilweise entwickelt, wenn auch weit weniger ausführlich als die ebene. Stärker aber als die Bücher von Euklid, die im Westen nur in Auszügen bekannt waren und erst im Spätmittelalter aus dem Arabischen übersetzt wurden [44], wirkte sich zunächst der Einfluss von *Aristoteles*[9] aus, der den Raum nur als Ansammlung von Örtern verstand. Jedes Ding hatte nach Aristoteles den ihm zukommenden Ort, zu dem es hinstrebte, und so fiel ein losgelassener Gegenstand aus der Luft auf den Erdboden, weil dort sein natürlicher Ort war. Eine solche Ansammlung von Örtern ist aber im Gegensatz zum euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$ weder homogen noch isotrop (z.B. sind „oben" und „unten" gänzlich unterschiedlich). Die Wegbereiter der euklidischen Raumvorstellung waren wohl erst die Künstler der Renaissance, die ihre Bilder nach den Gesetzmäßigkeiten der wiedergefundenen euklidischen Geometrie konstruierten. Sie übertrugen die Gesetze der Ausbreitung von Lichtstrahlen in die Konstruktion der *Linearperspektive*, als deren Entdecker der florentinische Architekt *Brunelleschi*[10] um 1410 gilt. Erst auf dieser Grundlage waren die physikalischen Theorien von *Galilei*[11] und *Newton*[12] möglich, die auf einer quantitativ-mathematischen Basis standen und die qualitativ-logisch argumentierende Naturphilosophie von Aristoteles ablösten.

Nach dem Übergang von der anschaulichen Geometrie in Ebene und Raum zum mathematischen Modell $\mathbb{E}^2$ bzw. $\mathbb{E}^3$ gibt es kein logisches Hindernis mehr, die Dimensionszahl 2 oder 3 durch eine beliebige Zahl n zu ersetzen. Der 5-dimensionale Raum z.B. mag schwer vorstellbar sein, aber die Menge $\mathbb{R}^5$ aller Quintetts reeller Zahlen $(x^1, \ldots, x^5)$ ist ebenso leicht zu handhaben wie der $\mathbb{R}^3$. Viele geometrische Aussagen im Modell $\mathbb{E}^3$ behalten ihre Gültigkeit, wenn wir $\mathbb{E}^3$ durch $\mathbb{E}^n$ (mit der zugehörigen Vektorraumstruktur und dem inneren Produkt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$) ersetzen, wie sicherlich bereits in der Linearen Algebra und der mehrdimensionalen Analysis deutlich wurde. Damit wird die anschauliche Geometrie indirekt auch auf Bereiche weit jenseits jeder Anschauung bezogen.

Das vorliegende Buch handelt allerdings weitgehend von der Geometrie im dreidimensionalen Raum, die der Anschauung noch direkt zugänglich ist. Das hat nicht nur didaktische, sondern auch mathematische Gründe, denn viele Aussagen über Flächen im dreidimensionalen Raum lassen sich nicht ohne weiteres auf höhere Dimensionen übertragen. Wo immer es ohne Mehraufwand möglich ist, werden wir dennoch unsere Sätze für den n-dimensionalen Raum $\mathbb{E}^n$ formulieren, um allgemeinere Gesetzmäßigkeiten und Konstruktionen deutlicher hervortreten zu lassen.

---

[9] Aristoteles, 384 (Stagira) – 322 v.Chr. (Chalcis, Euböa)
[10] Filippo Brunelleschi, 1377–1446 (Florenz)
[11] Galileo Galilei, 1564 (Pisa) – 1642 (Arcetri bei Florenz)
[12] Sir Isaac Newton, 1643 (Woolsthorpe) – 1727 (London)

1.3 Glattheit

Die geometrisch einfachsten Objekte im Raum sind die affinen Unterräume, z.B. Geraden und Ebenen. Aber die Gegenstände, die uns im täglichen Leben am häufigsten begegnen, sind oft durch *gekrümmte* Linien oder Flächen begrenzt, und solche Objekte will die Differentialgeometrie studieren. Sie sind zwar nicht mehr gerade oder eben, aber sie sind an jedem ihrer Punkte durch Geraden oder Ebenen *approximierbar*. In der Umgangssprache bezeichnen wir diese Eigenschaft mit dem Wort „glatt“ im Gegensatz zu „rauh“; eine glatte Oberfläche braucht zwar insgesamt durchaus nicht eben zu sein (das wird durch das Wort „gekrümmt“ ausgedrückt), aber im Kleinen gibt es keine merkbaren Unebenheiten. Mathematisch wird ein solches Verhalten durch den Begriff „differenzierbar“ beschrieben.

Zur Erinnerung: Eine Abbildung $X : U \to \mathbb{R}^n$, definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^m$, heißt *differenzierbar*, wenn X an jeder Stelle $u \in U$ durch ein lineare Abbildung ($n \times m$-Matrix) ∂X_u approximiert werden kann: Für alle $h \in \mathbb{R}^m$ mit $|h| < \epsilon$ gilt

$$X(u+h) - X(u) = \partial X_u h + o(h) \tag{1.7}$$

wobei $o(h)$ eine Funktion mit $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{|h|} = 0$ ist. Die Matrix ∂X_u heißt *Ableitung* oder *Jacobimatrix*[13] von X im Punkt u; ihre Spalten sind die *partiellen Ableitungen* $\partial_i X(u)$, kurz $X_i(u)$ $(i = 1, \dots, m)$.

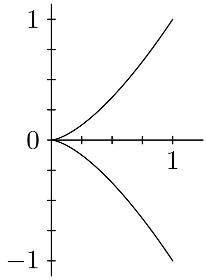
Wir werden also die „glatten, gekrümmten Objekte“ im Raum $\mathbb{R}^n$, mit denen sich die Differentialgeometrie beschäftigt, durch differenzierbare Abbildungen $X : U \to \mathbb{R}^n$ beschreiben, wobei U ein Gebiet des $\mathbb{R}^m$ mit $m \le n$ ist; für $m = 1$ nennen wir diese Abbildungen *Kurven*, für $m = 2$ *Flächen*. Doch anders als in der Analysis ist es in der Geometrie nicht so sehr die Abbildung X selbst, an der wir interessiert sind. Anschaulich gesehen ist eine Fläche ja eher eine Teilmenge des Raumes als eine Abbildung in den Raum. In gewissem Sinne ist also nur die Bildmenge $X(U)$ von Interesse. Allerdings können sehr verschiedenartige Abbildungen dasselbe Bild haben. So ist für jedes genügend große Intervall $U \subset \mathbb{R}^1$ das Bild der Abbildung $X : U \to \mathbb{R}^2$, $X(u) = (\cos u, \sin u)$ immer die ganze Einheitskreislinie; das bloße Bild zeigt uns nicht, wie oft der Kreis durchlaufen wurde.

Wir unterscheiden daher etwas genauer und nennen zwei Abbildungen $X : U \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{X} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ *geometrisch äquivalent*, wenn $X = \tilde{X} \circ \phi$ für einen *Diffeomorphismus* (eine umkehrbar differenzierbare Abbildung) $\phi : U \to \tilde{U}$. Insbesondere haben X und $\tilde{X}$ dann natürlich auch dasselbe Bild: $X(U) = \tilde{X}(\tilde{U})$. Das zugehörige *geometrische Objekt* (die Kurve oder Fläche) ist eine Äquivalenzklasse, eine Klasse geometrisch äquivalenter differenzierbarer Abbildungen in den $\mathbb{E}^n$. Jede der zu X geometrisch äquivalenten Abbildungen heißt eine *Parametrisierung* dieses Objektes, und der Diffeomorphismus ϕ wird deshalb *Parameterwechsel* genannt. Da die Jacobimatrix

[13] Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 (Potsdam) - 1851 (Berlin)

(totale Ableitung) $\partial\phi_u$ für jedes $u \in U$ eine umkehrbare Matrix ist, ist ihre Determinante überall von Null verschieden; manchmal werden wir darüber hinaus verlangen, dass sie positiv sein soll, und sprechen dann von *orientierten Parameterwechseln.* Wir werden zwar weiterhin so tun, als wäre X das geometrische Objekt, das wir untersuchen wollen, wir werden aber stets daran denken, dass X durch eine äquivalente Abbildung ersetzbar ist; alle unsere *geometrischen Begriffe* müssen daher unter Parameterwechseln invariant sein. Die verschiedenen Parametrisierungen spielen für das geometrische Objekt eine ähnliche Rolle wie die im vorigen Abschnitt erwähnten verschiedenen Koordinatensysteme, mit denen wir den Raum beschreiben können: Jeder Punkt $X(u)$ wird festgelegt durch die m Zahlen $u^1, \dots, u^m$, die Komponenten des Parameters u.

Es gibt aber noch ein Problem: Das Bild einer differenzierbaren Abbildung ist im Allgemeinen gar nicht überall glatt! Zum Beispiel ist die *Neile'sche Parabel*[14] $X : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, $X(u) = (u^2, u^3)$ (hier sind die Hochzahlen wirklich Potenzen) zwar beliebig oft differenzierbar, aber das Bild $X(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ hat im Ursprung eine Spitze. Dies wird durch das Verschwinden der Ableitung $X'(0)$ ermöglicht.



Um solche Komplikationen (zumindest vorläufig, vgl. aber Abschnitt 9.6) auszuschließen, beschränken wir uns auf Abbildungen $X : U \to \mathbb{R}^n$, deren partielle Ableitungen $\partial_1 X(u), \dots, \partial_m X(u)$ an jeder Stelle u linear unabhängig sind; diese heißen *reguläre Abbildungen* oder *Immersionen.*[15] Der von den Vektoren $\partial_1 X(u), \dots, \partial_m X(u) \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte Unterraum $T_u = \mathrm{Bild}(\partial X_u) \subset \mathbb{R}^n$ ist dann stets m-dimensional und heißt der *Tangentialraum* von X an der Stelle u, sein orthogonales Komplement $N_u = T_u^\perp$ wird *Normalraum* genannt. Tangential- und Normalraum sind geometrische Begriffe im oben definierten Sinne, denn wenn $X = \tilde{X} \circ \phi$ für einen Parameterwechsel ϕ, dann ist

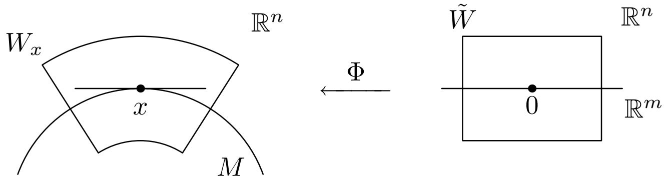
$$T_u = \mathrm{Bild}\,\partial X_u = \mathrm{Bild}(\partial\tilde{X}_{\phi(u)}\,\partial\phi_u) = \mathrm{Bild}\,\partial\tilde{X}_{\phi(u)} = \tilde{T}_{\phi(u)},$$

[14] William Neile, 1637 (Bishopsthorpe, Yorkshire) – 1670 (White Waltham, Berkshire)

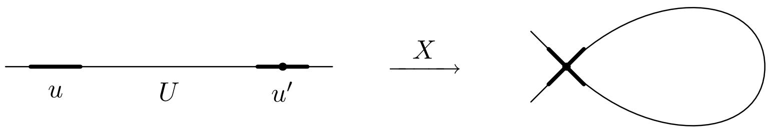
[15] Das Wort *Immersion* kommt von dem lateinischen Verb *immergere*, eintauchen. Eine Immersion taucht sozusagen ein Stück des $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$ ein.

weil $\partial\phi_u$ eine invertierbare Matrix ist.[16]

Eine andere Art von „glatten, gekrümmten Objekten" im Raum sind *Untermannigfaltigkeiten*, d.h. Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$, die *lokal diffeomorph* zum $\mathbb{R}^m$ sind: Zu jedem $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung W_x von x in $\mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : \tilde{W} \to W_x$ von einer offenen Menge $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ auf W_x mit der Eigenschaft, dass $\Phi(\mathbb{R}^m \cap \tilde{W}) = M \cap W_x$, wobei $\mathbb{R}^m$ in der natürlichen Weise als Unterraum von $\mathbb{R}^n$ angesehen wird.



Untermannigfaltigkeiten hängen eng mit Immersionen zusammen: Die Menge $U = \mathbb{R}^m \cap \tilde{W}$ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und $X = \Phi|_U : U \to M \cap W_x \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Immersion; die partiellen Ableitungen sind linear unabhängig, weil X eine Einschränkung eines Diffeomorphismus ist. Das Bild von X überdeckt allerdings nicht ganz M, sondern nur den Teil $M \cap W_x$; deshalb wird X als *lokale Parametrisierung* von M bezeichnet. Umgekehrt zeigt die Fußnote 16 auf dieser Seite, dass jede Immersion $X : U \to \mathbb{R}^n$ lokal auch eine Untermannigfaltigkeit parametrisiert: Zu jedem $u_o \in U$ gibt es eine Umgebung $U_o \subset U$ von u_o mit der Eigenschaft, dass $X(U_o)$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Global stimmt das nicht: $X(U)$ kann *Selbstschnitte* haben, d.h. es kann $u, u' \in U$ mit $X(u) = X(u')$ und $T_u \neq T_{u'}$ geben, und in diesem Fall ist $X(U)$ keine Untermannigfaltigkeit mehr.



Häufig wird eine Untermannigfaltigkeit M allerdings nicht als *Bild* $X(U)$ gegeben, sondern als *Urbild* $F^{-1}(a)$, d.h. als Lösungsmenge der Gleichung $F(x) = a$. Dabei ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $(k = n - m)$ eine differenzierbare Abbildung und $a \in \mathbb{R}^k$. Die Menge $M = F^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ F(x) = a\}$ wird *reguläres Urbild* genannt, wenn $\partial F_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ surjektiv, also von Rang k

[16] Dass Immersionen tatsächlich ein glattes Bild haben, ist eine Konsequenz des *Umkehrsatzes* der Analysis: Durch Koordinatenwahl dürfen wir $T_u = \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ mit $k = n - m$ annehmen. Dann hat $\Phi : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $(u, v) \mapsto X(u) + v$ im Punkt $(u_o, 0) \in U \times \mathbb{R}^k$ invertierbare Ableitung $\partial\Phi_{(u_o,0)}$. Nach dem Umkehrsatz ist Φ deshalb in einer Umgebung $U_o \times V$ von $(u_o, 0)$ ein Diffeomorphismus, der $U_o \times \{0\}$ auf $X(U_o)$ abbildet. Also ist $X(U_o)$ diffeomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, was Spitzen und andere Unebenheiten in $X(U_o)$ ausschließt. *Selbstschnitte* sind aber erlaubt: Wir verbieten nicht, dass $X(U_1)$ und $X(U_2)$ für disjunkte offene Teilmengen $U_1, U_2 \subset U$ einen nichtleeren Schnitt haben.

ist für alle $x \in M$. (Es genügt natürlich, dass F auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ definiert ist.) Nach dem Umkehrsatz ist ein solches M eine Untermannigfaltigkeit.[17] Oft finden beide Darstellungsarten Verwendung. So ist die *Kugelfläche* oder *Sphäre*, die für uns ein Leitbeispiel darstellt, einerseits durch eine Gleichung definiert:

$$\mathsf{S}^m_r = \{x \in \mathbb{E}^{m+1};\ |x| = r\}; \tag{1.8}$$

hier ist $F(x) = |x|$ und $a = r \in \mathbb{R}^1$ mit $r > 0$ (oder auch $F(x) = \langle x, x\rangle$ und $a = r^2$). Andererseits werden wir auch vielfache (lokale) Parametrisierungen der Sphäre kennenlernen (als Graph, in Kugelkoordinaten, mit konformen oder flächentreuen Parametrisierungen), die unterschiedliche Aspekte der Geometrie des Sphäre berücksichtigen.

1.4 Messungen

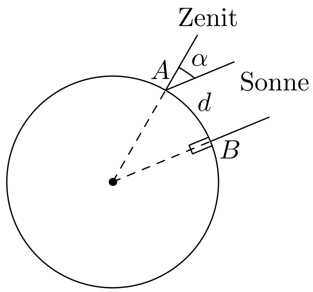
Glattheit im Sinne des vorigen Abschnittes ist ein *qualitativer* Begriff: Bestimmte Abbildungen müssen differenzierbar und ihre partiellen Ableitungen linear unabhängig sein. Solche Untersuchungen gehören genau genommen zur *Differentialtopologie*, eine Theorie, die invariant unter Diffeomorphismen ist und die kartesische und metrische Struktur des Raumes $\mathbb{E}^n$ nicht berücksichtigt. Die eigentliche *Differentialgeometrie* hat es dagegen mit *quantitativen* Begriffen, also mit *Messungen* zu tun. Auch der bereits erwähnte Begriff „gekrümmt“ wird nicht nur qualitativ, im Sinne von „nicht gerade“, sondern quantitativ (wie stark gekrümmt?) verstanden werden. Um diese Begriffsbildungen deutlich zu machen, beginnen wir mit einem kleinen historischen Exkurs, durch den wir übrigens auch unser obiges Versprechen, den Namensbestandteil $\gamma\tilde{\eta}$ (*gē*, Erde) zu erläutern, einlösen können.

Die Geschichte der Differentialgeometrie ist eng verbunden mit der Entwicklung der *Geodäsie* (Vermessungslehre), was die Bezeichnung „Geodätische Linie“) noch widerspiegelt. Bei der Vermessung der Gestalt der Erdoberfläche gab es von Anfang an zwei verschiedene Methoden, die „innere“ und die „äußere“: Man kann einerseits die Entfernungen durch Messungen auf der Erdoberfläche bestimmen (mit Hilfe von genau vermessenen *trigonometrischen Punkten* in der Landschaft, siehr Figur S. 47), oder man kann

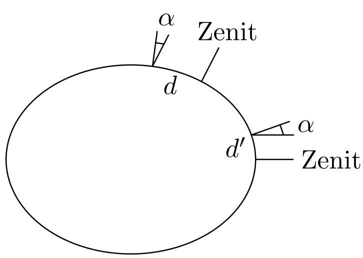
[17] Ist $M = F^{-1}(a)$ ein reguläres Urbild und $x \in M$, so sind k Spalten der $(k \times n)$-Matrix ∂F_x linear unabhängig, etwa die letzten k Spalten. Dann zerlegen wir den $\mathbb{R}^n$ entsprechend: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, $x = (x_1; x_2)$, und wir erweitern $F - a$ zu einer Abbildung $\hat{F} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to R^m \times \mathbb{R}^k$, $\hat{F}(x_1, x_2) = (x_1; F(x_1, x_2) - a)$. Dann sind alle n Spalten von $\partial \hat{F}_x$ linear unabhängig, also gibt es Umgebungen W_x von x und $\tilde{W}$ von $\hat{F}(x) = (x_1; 0)$ mit der Eigenschaft, dass $\hat{F}|_{W_x} : W_x \to \tilde{W}$ ein Diffeomorphismus ist, und es gilt $\hat{F}(M \cap W_x) = \mathbb{R}^m \cap \tilde{W}$. Daher ist M eine Untermannigfaltigkeit im Sinne der obigen Definition mit $\Phi = \hat{F}^{-1}$.

die Lage der Erde im umgebenden Raum berücksichtigen. Zwar können wir die Erde erst seit wenigen Jahrzehnten vom Weltraum aus betrachten, aber immer schon konnte man umgekehrt von der Erde in den Weltraum hinausblicken und dies für die Erdvermessung nutzbar machen.

Auf diese Weise bestimmte der griechische Mathematiker *Eratosthenes*[18] bereits um 200 v. Chr. den Erdradius: Es war bekannt, dass am Tag der Sommersonnenwende die Sonne am Mittag genau senkrecht in einen tiefen Brunnen in Syrene (Assuan) in Oberägypten hineinfiel und diesen ausleuchtete. Zum selben Zeitpunkt maß Eratosthenes in Alexandria den Sonnenstand und konnte aus dem Winkel α zwischen Sonnenstand und Zenit[19] sowie der Entfernung d zum Brunnen den Erdradius $R = d/\alpha$ errechnen. Im 18. Jahrhundert wies *Maupertuis*[20] auf ganz ähnliche Art die Abplattung der Erde nach (vgl. [20]), indem er den Abstand von zwei um ein Grad differierenden Breitenkreisen in Lappland vermaß und mit entsprechenden Messergebnissen aus dem tropischen Südamerika verglich. Die Breitenkreise gehören zur „äußeren Geodäsie", denn sie werden durch den Winkel zwischen Zenit und Himmelspol (Polarstern) festgelegt. Weil die Erde die Gestalt eines an den Polen abgeflachten Ellipsoids hat, ist der Breitenkreisabstand in der Nähe des Pols größer als in der Nähe des Äquators. Sowohl Eratosthenes als auch Maupertuis verglichen also die Winkel zwischen den Zenitrichtungen an zwei verschiedenen Orten und bestimmten damit die Änderung der Zenitrichtung mit dem Ort.



Eratosthenes



Maupertuis

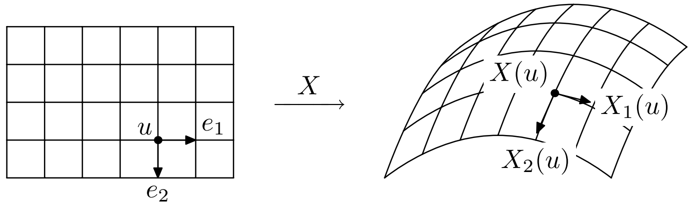
In ähnlicher Weise wie die Geodäsie zerfällt auch die Differentialgeometrie in einen inneren und einen äußeren Teil. In der *inneren Geometrie* geht es darum, Winkel, Abstände, Flächeninhalte usw. auf dem Bild $X(U)$ einer Immersion X zu bestimmen. Dazu werden Längen und Winkel der partiellen Ableitungen $\partial_i X = X_i$ benötigt, also deren innere Produkte, die zusammen die *Erste Fundamentalform* bilden:

[18] Eratosthenes von Kyrene, 276 (Kyrene, jetzt Shahhat, Libyen) – 194 v. Chr. (Alexandria)

[19] Der *Zenit* (von arabisch samt = Weg, Richtung) ist die Richtung senkrecht nach oben, also die Flächennormale der Erdoberfläche.

[20] Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, 1698 (Saint Malo) – 1759 (Basel)

$$g_{ij}(u) = \langle X_i(u), X_j(u) \rangle . \tag{1.9}$$



Die *äußere Geometrie* dagegen beschreibt die Lage von $X(U)$ im umgebenden Raum und besonders die Änderung des Tangentialraums T_u oder des Normalraums N_u (dem in der Geodäsie die Zenitrichtung entspricht) in Abhängigkeit von u. Da der Tangentialraum T_u von den partiellen Ableitungen $\partial_i X(u)$ aufgespannt wird, wird seine Änderung von den zweiten partiellen Ableitungen beschrieben, und zwar nur von deren Komponenten senkrecht zu T_u, im Normalraum N_u. Diese bilden zusammen die *Zweite Fundamentalform*

$$\mathbf{h}_{ij}(u) = (\partial_i \partial_j X(u))^{N_u} \tag{1.10}$$

Diese Größen, ihre geometrische Bedeutung und ihre gegenseitigen Abhängigkeiten werden wir im weiteren Verlauf des Buches genau beleuchten. Zunächst aber werden wir uns mit den einfachsten Objekten der Differentialgeometrie beschäftigen, den Kurven. Bei ihnen lassen sich die beiden Fundamentalformen auf zwei Zahlen reduzieren: *Bogenlänge* und *Krümmung.*

1.5 Übungsaufgaben

1. *Geometrische Äquivalenz:* Zeigen Sie, dass „geometrisch äquivalent“ eine Äquivalenzrelation ist auf der Menge

$$\mathrm{Imm}_{m,n} := \{(U, X);\ U \subset \mathbb{R}^m \text{ offen},\ X : U \to \mathbb{R}^n \text{ Immersion}\}.$$

2. *Äquivalenz linearer Immersionen:* Zeigen Sie: Für zwei *lineare* Immersionen (injektive lineare Abbildungen) $X, \tilde{X} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gilt: $\operatorname{Bild} X = \operatorname{Bild} \tilde{X}$ genau dann, wenn es eine invertierbare lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ gibt mit $X = \tilde{X} \circ \phi$.

3. *Immersionen mit gleichem Bild:* Betrachten Sie die Immersion $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $X(u) = (\cos u, \sin u)$ und $\tilde{X} = X|_{(0,3\pi)}$. Zeigen Sie: X und $\tilde{X}$ haben dasselbe Bild, nämlich $\mathsf{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, sind aber nicht geometrisch äquivalent.

4. *Regularität:* Skizzieren Sie das Bild der beiden Kurven $X_1, X_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

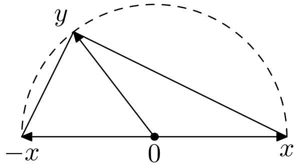
$$X_1(t) = (\cos t, \sin 2t), \quad X_2(t) = (\cos 2t, \sin t).$$

   Welche der beiden Abbildungen ist eine *Immersion* (eine *reguläre Kurve*)?

5. *Eratosthenes' Messung des Erdradius:* Die Stadt Alexandria liegt etwa auf 32^o nördlicher Breite, Syrene (Assuan) auf 24^o. Welchen Sonnenstand hat Eratosthenes gemessen?

6. *Cosinussatz:* Zeigen Sie den eukidischen Cosinussatz: Ist (A, B, C) ein Dreieck im $\mathbb{R}^n$ mit Seitenlängen $a = |B-C|$, $b = |C-A|$ und $c = |A-B|$ und mit Winkel $\gamma \in (0, \pi)$ bei C, dann ist $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

7. *Satz von Thales:*[21]



Zeigen Sie: Das Dreieck mit den Eckpunkten $-x, y, x$ hat genau dann einen rechten Winkel bei y, wenn die drei Eckpunkte auf einem gemeinsamen Kreis mit Mittelpunkt 0 liegen, d.h wenn $|x| = |y|$ gilt.

8. *Euklidische Bewegungsgruppe:* Eine *Isometrie* (*Bewegung*) des euklidischen Raums $\mathbb{E} = \mathbb{E}^n$ ist eine Abbildung $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, die Abstände erhält:
$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \tag{1.11}$$
für alle $x, y \in \mathbb{E}$. Zeigen Sie:

   a) Die Isometrien von $\mathbb{E}$ bilden eine Gruppe (mit der Komposition $\circ$ als Gruppenoperation), die *Euklidische Gruppe* $E(n)$.

   b) Die Menge $O(n)$ der orthogonalen linearen Abbildungen (Matrizen) $x \mapsto Ax$ sowie die Menge $T(n)$ der *Translationen* oder *Verschiebungen* $x \mapsto x + a$ mit *Verschiebungsvektor* $a \in \mathbb{E}$ bilden Untergruppen von $E(n)$, die *Orthogonale Gruppe* und die *Translationsgruppe.*

   c) Jede Isometrie ist Komposition von genau einer orthogonalen Abbildung und genau einer Translation: Zu jedem $f \in E(n)$ gibt es eindeutige $A \in O(n)$ und $a \in \mathbb{E}$ mit $f(x) = Ax + a$ für alle $x \in \mathbb{E}$. *Anleitung:* Zu dem gegebenen $f \in E(n)$ betrachten Sie $f_o \in E(n)$ mit $f_o(x) = f(x) - f(0)$ (Nachschalten der Translation mit Verschiebungsvektor $-f(0)$). Die Abbildung f_o erfüllt zusätzlich $f_o(0) = 0$. Zeigen Sie nun, dass f_o linear ist (f_o erhält Geraden – kürzeste Verbindungen, s. Satz 2.1.1 – und Parallelen, Geradenpaare mit konstantem Abstand) und das Skalarprodukt erhält[22]

   d) Die Gruppe $E(n)$ ist ein *semidirektes Produkt* der Untergruppen $O(n)$ und $T(n) \cong (\mathbb{E}, +)$ mit der Gruppenmultiplikation
$$(A, a)(B, b) = (AB, a + Ab). \tag{1.12}$$

[21] Thales von Milet, ca. 627–547 v. Chr. (Milet, Kleinasien)
[22] Man beachte den *Polarisationstrick*: $2\langle x, y\rangle = |x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2$.