

1 Elemente der Topologie

Begriffe wie „Konvergenz“, „Stetigkeit“, „Abgeschlossenheit“ treten in der Analysis in verschiedenen Zusammenhängen auf und können jeweils auf einen Umgebungsbegriff bezogen werden. Die mengentheoretische Topologie klärt solche Begriffe und untersucht die damit gegebenen Strukturen in einem einheitlichen Rahmen. Wesentliche Beiträge dazu stammen von Cantor, Fréchet und Hausdorff.

1.1 Topologie des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n

Der für Folgen in \mathbb{R} oder \mathbb{C} eingeführte Konvergenzbegriff beruht auf dem mit dem Absolutbetrag gegebenen Abstand. Im \mathbb{R}^n erzeugt die euklidische Norm einen analogen Abstandsbegriff. Die euklidische Norm ist für einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

erklärt und erfüllt folgende Regeln:

1. $\|x\| > 0$ für $x \neq 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Die Regel 3 zeigt man mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung; siehe Band 1, 9.8.

Der euklidische Abstand zweier Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ ist dann die Zahl

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Der Raum \mathbb{R}^n zusammen mit der euklidischen Norm und der euklidischen Metrik heißt *euklidischer* \mathbb{R}^n .

Wir verallgemeinern sogleich eine Bezeichnung aus Band 1: Unter der *offenen Kugel mit Mittelpunkt a und Radius $r > 0$* versteht man die Menge

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}.$$

Konvergenz. Eine Folge (x_k) von Punkten im \mathbb{R}^n heißt *konvergent*, wenn es einen Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ gibt so, daß gilt:

$$(1) \quad \|x_k - a\| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

In diesem Fall heißt a *Grenzwert* von (x_k) , und man schreibt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ oder $x_k \rightarrow a$ für $k \rightarrow \infty$.

Geometrisch bedeutet die Forderung (1), daß jede Kugel $K_\varepsilon(a)$ fast alle Folgenglieder enthält.

Lemma: Eine Folge von Punkten $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ des euklidischen \mathbb{R}^n konvergiert genau dann gegen $a = (a_1, \dots, a_n)$, wenn für $\nu = 1, \dots, n$ $x_{k\nu} \rightarrow a_\nu$ gilt.

Konvergenz bedeutet also komponentenweise Konvergenz.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den n Abschätzungen

$$|x_{k\nu} - a_\nu| \leq \|x_k - a\| \leq |x_{k1} - a_1| + \dots + |x_{kn} - a_n|. \quad \square$$

Das Lemma führt die Konvergenztheorie der Folgen im euklidischen \mathbb{R}^n auf den Fall $n = 1$ zurück. Neben Rechenregeln kann damit der wichtige Satz von Bolzano-Weierstraß übertragen werden. Man definiert:

- (i) Eine Folge (x_k) heißt *beschränkt*, wenn alle ihre Glieder in einer Kugel $K_r(0)$ mit geeignetem Radius r liegen.
- (ii) Eine Folge (x_k) heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ gibt so, daß $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$ für alle $k, l > N(\varepsilon)$.

Satz (Bolzano-Weierstraß): Im euklidischen \mathbb{R}^n gilt:

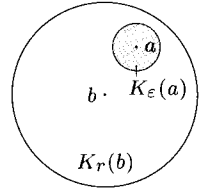
- (i) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.
- (ii) Jede Cauchyfolge konvergiert.

Beweis: (i) zeigt man durch vollständige Induktion nach n . Für Folgen in \mathbb{R} und in \mathbb{C} wurde der Satz in Band 1, 5.5 gezeigt. Der Induktionsschritt von \mathbb{R}^{n-1} auf \mathbb{R}^n wird wie die Ausdehnung des Satzes von \mathbb{R} auf \mathbb{C} durchgeführt, siehe loc. cit.

(ii) Ist (x_k) mit $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ eine Cauchyfolge, so sind die n Komponentenfolgen $(x_{k\nu})$, $\nu = 1, \dots, n$, wegen $|x_{k\nu} - x_{l\nu}| \leq \|x_k - x_l\|$ Cauchyfolgen in \mathbb{R} . Sind a_1, \dots, a_n deren Grenzwerte, so konvergiert (x_k) gegen $a := (a_1, \dots, a_n)$. \square

Umgebungen. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Umgebung* von $a \in \mathbb{R}^n$, wenn sie eine Kugel $K_\varepsilon(a)$, $\varepsilon > 0$, mit Mittelpunkt a enthält. $K_\varepsilon(a)$ heißt auch ε -Umgebung von a .

Beispiel: Die Kugel $K_r(b)$ ist Umgebung jedes Punktes $a \in K_r(b)$. Denn für jede positive Zahl $\varepsilon < r - \|b - a\|$ liegt $K_\varepsilon(a)$ in $K_r(b)$.



Elementare Regeln:

1. Der Durchschnitt zweier Umgebungen von a ist eine Umgebung von a .
2. Jede Obermenge einer Umgebung von a ist eine Umgebung von a .
3. Je zwei verschiedene Punkte a, b besitzen punktfremde Umgebungen; z. B. die Kugelumgebungen $K_\varepsilon(a)$ und $K_\varepsilon(b)$ mit $\varepsilon := \frac{1}{3} \|b - a\|$.
(Hausdorffsche Trennungseigenschaft)

Offene Mengen. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung eines jeden Punktes $a \in U$ ist; ausführlicher: Wenn es zu jedem Punkt $a \in U$ eine Kugel $K_\varepsilon(a)$ gibt, die in U enthalten ist. Die leere Menge ist nach dieser Definition offen.

Beispiel: Die offene Kugel $K_r(b)$ ist offen im Sinn dieser Definition. Insbesondere sind die Kugelumgebungen offene Umgebungen.

Elementare Regeln:

- (O1) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*
(O2) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*

Abgeschlossene Mengen. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $A^c := \mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Beispiele:

1. Die sogenannte *abgeschlossene Kugel*

$$\bar{K}_r(b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - b\| \leq r\}$$

ist abgeschlossen im Sinn der Definition. Ist nämlich a ein Punkt außerhalb von $\bar{K}_r(b)$, so liegt auch jede Kugel $K_\varepsilon(a)$ mit $\varepsilon < \|b - a\| - r$ außerhalb.

2. Der \mathbb{R}^n und die leere Menge sind offen und abgeschlossen zugleich.
3. Die Menge $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Obigen Regeln für offene Mengen entsprechen jetzt:

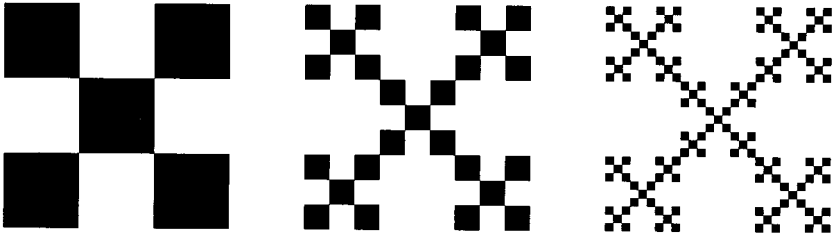
- (A1) *Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
(A2) *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Abgeschlossene Mengen (und auch offene) können eine komplizierte Gestalt haben. Wir betrachten ein Beispiel aus der fraktalen Geometrie. Sei A_0 die Vereinigung der abgeschlossenen Quadrate $[k; k+1] \times [j; j+1]$ im \mathbb{R}^2 , wobei k und j ganze Zahlen sind derart, daß $k-j$ durch 2 teilbar ist; diese Quadrate sind wie die schwarzen Felder eines Schachbretts verteilt. Aus A_0 entstehen durch Ähnlichkeitsabbildungen die weiteren Mengen

$$A_n := \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot A_0 = \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n a \mid a \in A_0 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Komplemente $\mathbb{R}^2 \setminus A_n$ sind als Vereinigungen offener Quadrate offen. Alle A_n sind also abgeschlossen; folglich ist es auch ihr Durchschnitt

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$



Ausschnitte aus A_0 , $A_0 \cap A_1$ und $A_0 \cap A_1 \cap A_2$

Der Schnitt von A mit dem abgeschlossenen Quadrat $Q = [0; 1] \times [0; 1]$ kann als ein 2-dimensionales Analogon des Cantorschen Diskontinuums angesehen werden; vgl. Band 1, 7.5.

Ein wichtiges Charakteristikum der abgeschlossenen Mengen ist ihre „Abgeschlossenheit“ bei der Bildung von Grenzwerten.

Satz: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder in \mathbb{R}^n konvergenten Folge (a_k) mit $a_k \in A$ für alle k ebenfalls in A liegt.

Beweis: Sei A abgeschlossen. Läge der Grenzwert a einer konvergenten Folge (a_k) mit $a_k \in A$ für alle k in $U := \mathbb{R}^n \setminus A$, so enthielte die offene Menge U als Umgebung von a fast alle a_k . Widerspruch!

Es habe nun A die angegebene Eigenschaft für Folgen. Angenommen, A ist nicht abgeschlossen, d. h. $U := \mathbb{R}^n \setminus A$ nicht offen. Dann gibt es einen Punkt $a \in U$ derart, daß keine Kugel um a in U liegt. Insbesondere enthält jede Kugel $K_{1/k}(a)$, $k = 1, 2, \dots$, einen Punkt a_k mit $a_k \notin U$. Die Folge (a_k) liegt in A und konvergiert wegen $\|a_k - a\| < 1/k$; ihr Grenzwert a jedoch gehört nicht zu A . Widerspruch! \square

Randpunkte. $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Randpunkt der Menge* $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn jede Umgebung von x Punkte sowohl aus M als auch aus dem Komplement M^c enthält. Die Menge aller Randpunkte von M bezeichnen wir mit ∂M . Aus Symmetriegründen gilt $\partial(M^c) = \partial M$.

Beispiele: Der Rand der Kugel $K_r(a)$ ist die Sphäre $\{x \mid \|x - a\| = r\}$. Der Rand von \mathbb{Q} in \mathbb{R} ist ganz \mathbb{R} .

Lemma: Für jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

- $M \setminus \partial M$ ist offen. Jede offene Menge U mit $U \subset M$ liegt in $M \setminus \partial M$.
- $M \cup \partial M$ ist abgeschlossen. Jede abgeschlossene Menge A mit $A \supset M$ umfaßt $M \cup \partial M$.
- ∂M ist abgeschlossen.

Beweis: a) Jeder Punkt $a \in M \setminus \partial M$ hat eine offene Umgebung V mit $V \subset M$; sonst wäre a ein Randpunkt. V enthält keinen Punkt x aus ∂M ; sonst enthielte V als Umgebung von x auch Punkte aus M^c , im Widerspruch zur Wahl von V . Also gilt $a \in V \subset M \setminus \partial M$. Mithin ist $M \setminus \partial M$ offen.

Die weitere Behauptung $U \subset M \setminus \partial M$ beweist man wie soeben die Behauptung $V \subset M \setminus \partial M$.

b) folgt mittels Komplementbildung aus a): $M^c \setminus \partial(M^c)$ ist offen, also

$$(*) \quad (M^c \setminus \partial(M^c))^c = M \cup \partial(M^c) = M \cup \partial M$$

abgeschlossen. Weiter ist $A^c \subset M^c$ offen. Nach der zweiten Aussage in a) gilt also $A^c \subset M^c \setminus \partial(M^c)$ und daraus folgt mit (*) $M \cup \partial M \subset A$.

c) folgt aus b) wegen $\partial M = (M \cup \partial M) \cap (M^c \cup \partial(M^c))$. \square

Das Lemma ergibt sofort eine Charakterisierung der offenen und der abgeschlossenen Mengen anhand ihrer Randpunkte:

Satz: Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Bezeichnungen: Für beliebiges $M \subset \mathbb{R}^n$ heißen

$M^\circ := M \setminus \partial M$ der *offene Kern* oder auch das *Innere* von M ,

$\overline{M} := M \cup \partial M$ die *abgeschlossene Hülle* von M .

Nach dem Satz ist M° die größte offene Menge, die in M liegt, und \overline{M} die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfaßt.

Häufungspunkte. $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt der Menge* $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn jede Umgebung von x mindestens einen von x verschiedenen Punkt

aus M enthält. Induktiv kann man dann unter Verwendung der Hausdorffschen Trennungseigenschaft sogar eine Folge paarweise verschiedener Punkte $x_k \in M$ mit $\|x - x_k\| < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, konstruieren. Die Menge aller Häufungspunkte von M bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(M)$.

Lemma: Für jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt $M \cup \mathcal{H}(M) = M \cup \partial M = \overline{M}$.

Beweis: Ein Häufungspunkt x von M , der nicht in M liegt, ist ein Randpunkt, da jede Umgebung von x einen Punkt aus M sowie den nicht in M liegenden Punkt x enthält. Umgekehrt ist ein Randpunkt x von M , der nicht in M liegt, ein Häufungspunkt. \square

Das Lemma und der vorangehende Satz implizieren eine weitere Charakterisierung der abgeschlossenen Mengen:

Satz: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

1.2 Topologie metrischer Räume

Neben dem \mathbb{R}^n treten in der Analysis viele weitere Räume mit einer Umgebungsstruktur auf. Wichtige Kategorien bilden die normierten und allgemeiner die metrischen Räume. Die Letzteren spielten eine Vorreiterrolle bei der Ausformung des Begriffs des topologischen Raumes.

I. Normierte Räume. Metrische Räume

Definition (Normierter Raum): Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Eine Norm auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V ist eine Funktion $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ so, daß für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(N1) \quad \|0\| = 0 \quad \text{und} \quad \|x\| > 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0,$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Das Paar $(V, \| \cdot \|)$ heißt *normierter Raum*. Wenn klar ist, welche Norm auf V verwendet wird, schreiben wir für $(V, \| \cdot \|)$ nur V .

Beispiele normierter Räume:

1. Der Raum \mathbb{K}^n mit der für $p \geq 1$ definierten p -Norm (siehe Band 1, 9.8)

$$\|x\|_p := \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p \right)^{1/p}.$$

Die Norm $\| \cdot \|_2$ heißt auch im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *euklidische Norm*.

Eine weitere, oft verwendete Norm auf \mathbb{K}^n ist die *Maximumsnorm*

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

(N1) und (N2) gelten offensichtlich; (N3) folgt aus

$$|x_\nu + y_\nu| \leq |x_\nu| + |y_\nu| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Man zeigt leicht, daß $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$.

Im Folgenden fassen wir den Vektorraum $\mathbb{K}^{n \times m}$ der $n \times m$ -Matrizen mit Elementen in \mathbb{K} stets auch als den $n \cdot m$ -dimensionalen Raum $\mathbb{K}^{n \cdot m}$ auf. Die Normen auf $\mathbb{K}^{n \cdot m}$ stellen dann auch Normen auf $\mathbb{K}^{n \times m}$ dar. Zum Beispiel hat eine Matrix $A = (a_{ij})$ die Maximumsnorm $\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$.

2. Der Raum $\mathcal{C}[a; b]$ der stetigen Funktionen auf einem Intervall $[a; b]$ mit einer L^p -Norm oder der Supremumsnorm:

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (L^p\text{-Norm}),$$

$$\|f\|_{[a;b]} := \sup \{|f(x)| \mid x \in [a; b]\} \quad (\text{Supremumsnorm}).$$

Die L^2 -Norm spielt in der Theorie der Fourierreihen eine wichtige Rolle, siehe Band 1, 16.7, die Supremumsnorm für die gleichmäßige Konvergenz, siehe Band 1, 15.

3. Vektorräume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ wird in solchen eine Norm definiert. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Der euklidische \mathbb{R}^n und $\mathcal{C}[a; b]$ mit der L^2 -Norm gehören in diese Kategorie.

In einem normierten Raum definiert man die Begriffe „Konvergenz“, „Umgebung“, „offene Menge“, „abgeschlossene Menge“, „Häufungspunkt“ wie im euklidischen \mathbb{R}^n . Dabei wird nur der abgeleitete, durch $d(x, y) := \|x - y\|$ erklärte Begriff des Abstandes gebraucht. Wir betrachten daher sogleich Räume, in denen lediglich ein Abstandsbegriff gegeben ist.

Definition (Metrischer Raum): Sei X irgendeine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Funktion d , die je zwei Punkten $x, y \in X$ eine reelle Zahl $d(x, y)$ zuordnet so, daß gilt:

$$(M1) \quad d(x, x) = 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) > 0 \quad \text{für} \quad x \neq y,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Das Paar (X, d) heißt *metrischer Raum*; oft schreiben wir dafür nur X . Die Zahl $d(x, y)$ heißt *Abstand* der Punkte x und y .

Beispiele metrischer Räume:

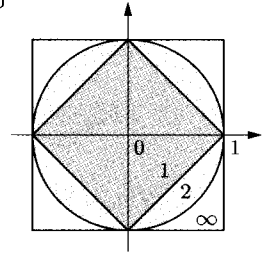
1. Die normierten Räume $(V, \| \cdot \|)$ mit $d(x, y) := \|x - y\|$.
2. Jede nicht leere Menge X zusammen mit $d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$

II. Die Topologie eines metrischen Raumes

Um für einen metrischen Raum (X, d) eine Topologie zu definieren, ahmt man die Begriffsbildungen für den euklidischen \mathbb{R}^n soweit als möglich nach. Zunächst definiert man als *offene Kugel mit Mittelpunkt $a \in X$ und Radius $r > 0$* die Menge

$$K_r(a) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$

Die geometrische Gestalt einer Kugel in einem normierten \mathbb{R}^n etwa hängt natürlich von der Norm ab. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Einheitskreise $K_1(0) = \{x \mid \|x\|_p < 1\}$ im \mathbb{R}^2 bezüglich der p -Normen für $p = 1, 2$ und ∞ .



Wir definieren weiter Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen, sowie die Konvergenz von Folgen.

Definition: Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von a , wenn es eine Kugel $K_\varepsilon(a)$ mit $K_\varepsilon(a) \subset U$ gibt. $K_\varepsilon(a)$ heißt wieder ε -*Umgebung* oder *Kugelumgebung* von a . Das hiermit in (X, d) eingeführte System von Umgebungen erfüllt dieselben elementaren Regeln wie jenes im euklidischen \mathbb{R}^n ; es hat insbesondere die Hausdorffsche Trennungseigenschaft.

Definition: Eine Menge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist, d. h., wenn es zu jedem $u \in U$ eine Kugel $K_\varepsilon(u)$ gibt, welche in U enthalten ist. Die leere Menge wird als offen erklärt. Die Gesamtheit der offenen Teilmengen des metrischen Raumes (X, d) heißt *die von d erzeugte Topologie auf X* und wird mit $\mathcal{O}(d)$ bezeichnet. Ferner heißt eine Menge $A \subset X$ *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist. Wie im euklidischen \mathbb{R}^n gelten folgende Regeln:

- (O1) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*
- (O2) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*
- (A1) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
- (A2) *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Definition: Eine Folge (x_k) in X heißt *konvergent*, wenn es einen Punkt $a \in X$ gibt derart, daß $d(x_k, a) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt. Gegebenenfalls heißt a Grenzwert und man schreibt dafür $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ oder $x_k \rightarrow a$.

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. Für Grenzwerte a' und a'' gilt nämlich $d(a', a'') = 0$ wegen $d(a', a'') \leq d(a', x_k) + d(x_k, a'')$ für alle k .

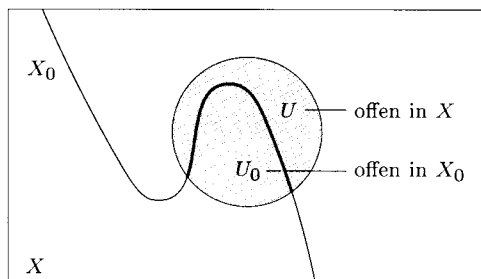
Die Charakterisierung abgeschlossener Mengen im euklidischen \mathbb{R}^n mittels Folgen gilt samt Beweis auch in metrischen Räumen:

Satz: Eine Menge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder in X konvergenten Folge (a_k) mit $a_k \in A$ ebenfalls in A liegt.

Für einen metrischen Raum X definiert man weiter: $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* der Menge $M \subset X$, wenn jede Umgebung von x mindestens einen von x verschiedenen Punkt von M enthält. $x \in X$ heißt *innerer Punkt* von M , wenn es eine Umgebung U von x mit $U \subset M$ gibt.

Wir besprechen noch zwei oft gebrauchte Konstruktionen metrischer Räume und die durch sie erzeugten Topologien. Die erste betrifft Teilmengen, die zweite direkte Produkte.

Teilraumtopologie. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $X_0 \subset X$ eine Teilmenge. Diese wird zu einem metrischen Raum, indem man für Punkte $x, y \in X_0$ als Abstand die Zahl $d(x, y)$ festsetzt. Die Einschränkung $d_0 := d|_{X_0 \times X_0}$ heißt *induzierte Metrik* oder *Spurmetrik* auf X_0 . Eine Kugel in X_0 bezüglich der Spurmetrik ist der Durchschnitt einer Kugel in X mit X_0 . Damit folgt, daß eine Menge $U_0 \subset X_0$ bezüglich der Spurmetrik offen ist genau dann, wenn es eine offene Menge U in X mit $U_0 = U \cap X_0$ gibt. Die von d_0 auf X_0 erzeugte Topologie $\mathcal{O}(d_0) = \{U \cap X_0 \mid U \in \mathcal{O}(d)\}$ heißt *Spur- oder Teilraumtopologie*. Besonders wichtig ist für uns der Fall, daß X_0 eine Teilmenge eines normierten \mathbb{K}^n ist.



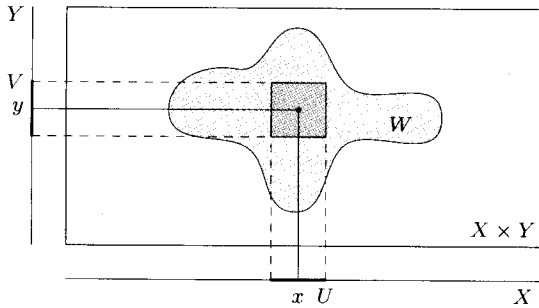
Definition der Spurtopologie: $U_0 = U \cap X_0$ ist offen in X_0

Statt *offen (abgeschlossen, Umgebung)* bezüglich der Spurtopologie sagen wir auch kurz *offen (abgeschlossen, Umgebung) in X_0* oder *X_0 -offen (X_0 -abgeschlossen, X_0 -Umgebung)*. Man beachte, daß eine X_0 -offene Menge nicht offen in X sein muß. Für $X = \mathbb{R}$ und $X_0 = \mathbb{Q}$ etwa ist $(0; 1) \cap \mathbb{Q}$ zwar \mathbb{Q} -offen, aber nicht \mathbb{R} -offen. *Ist X_0 jedoch eine offene Teilmenge von X , so sind die X_0 -offenen Mengen genau die in X_0 enthaltenen offenen Teilmengen von X .* Diese Feststellung bleibt richtig, wenn an jeder Stelle „offen“ durch „abgeschlossen“ ersetzt wird.

Produkttopologie. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Auf $X \times Y$ wird dann durch

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

eine Metrik, die sogenannte *Produktmetrik*, definiert (Beweis als Übung). Die Kugel $K_r(a, b) \subset X \times Y$ bezüglich der Produktmetrik ist gerade das direkte Produkt $K_r(a) \times K_r(b)$ der Kugeln $K_r(a) \subset X$ und $K_r(b) \subset Y$. Die von der Produktmetrik erzeugte Topologie auf $X \times Y$ heißt *Produkttopologie*. Eine Menge $W \subset X \times Y$ ist genau dann offen, wenn es zu jedem Punkt $(x, y) \in W$ Umgebungen U von x in X und V von y in Y gibt so, daß $U \times V \subset W$. Man beachte, daß die Produkte $U \times V$ offener Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ nicht die einzigen offenen Mengen in $X \times Y$ sind.



Definition der Produkttopologie

Vereinbarung: Teilmengen metrischer Räume sehen wir im Folgenden als Teilräume mit der Spurtopologie an, falls nicht ausdrücklich etwas anderes festgelegt wird; analog Produkte als Räume mit der Produkttopologie.

III. Äquivalenz der Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum

Verschiedene Metriken erzeugen unter Umständen dieselbe Topologie. Sind d und d^* Metriken auf X und enthält jede d -Kugel eine d^* -Kugel mit

demselben Mittelpunkt, so ist jede d -offene Menge auch d^* -offen, und es gilt $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d^*)$. Enthält überdies auch jede d^* -Kugel eine d -Kugel mit demselben Mittelpunkt, so gilt $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d^*)$. Metriken d und d^* mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d^*)$ heißen *äquivalent*. Zum Beispiel ist $d^* := \frac{d}{1+d}$ eine zu d äquivalente Metrik; in dieser haben je zwei Punkte einen Abstand < 1 .

Für äquivalente Metriken d und d^* gilt: *Eine Folge in X konvergiert bezüglich d genau dann, wenn sie bezüglich d^* konvergiert.*

Zwei Normen $\| \cdot \|$ und $\| \cdot \|^*$ auf einem Vektorraum heißen *äquivalent*, wenn sie äquivalente Metriken, d. h. dieselbe Topologie, erzeugen.

Lemma: *Zwei Normen $\| \cdot \|$ und $\| \cdot \|^*$ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V sind genau dann äquivalent, wenn es positive Zahlen c und C gibt so, daß*

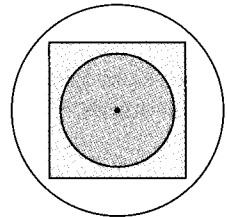
$$(2) \quad c \|x\| \leq \|x\|^* \leq C \|x\| \quad \text{für alle } x \in V.$$

Beweis: $\| \cdot \|$ und $\| \cdot \|^*$ seien äquivalent. Die Kugeln bezüglich $\| \cdot \|$ und $\| \cdot \|^*$ bezeichnen wir mit K bzw. K^* . Mit einem geeigneten $r > 0$ gilt dann $K_r^*(0) \subset K_1(0)$. Für $x \neq 0$ folgt $rx/2 \|x\|^* \in K_r^*(0) \subset K_1(0)$; für jedes x gilt also $c \|x\| \leq \|x\|^*$ mit $c := r/2$. Aus Symmetriegründen besteht eine analoge Abschätzung $\|x\|^* \leq C \|x\|$. Damit ist (2) gezeigt. Umgekehrt folgt aus (2) sofort $K_{c/r}^*(a) \subset K_r(a) \subset K_{C/r}^*(a)$. □

Beispiel: Die euklidische Norm und die Maximumnorm auf \mathbb{R}^n sind äquivalent. Zwischen beiden besteht nämlich die Abschätzung

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

Jede Kugel bezüglich der euklidischen Norm enthält eine Kugel bezüglich der Maximumnorm und umgekehrt



Satz: *Je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum sind äquivalent.*

Beweis: a) Zunächst für den \mathbb{R}^n . Es genügt zu zeigen, daß jede Norm $\| \cdot \|$ zur euklidischen Norm $\| \cdot \|_2$ äquivalent ist.

Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis. Für $x = \sum_{\nu=1}^n x_\nu e_\nu$ gilt dann nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$(*) \quad \|x\| \leq \sum_{\nu=1}^n |x_\nu| \cdot \|e_\nu\| \leq C \|x\|_2,$$

wobei $C := \sqrt{\sum_{\nu=1}^n \|e_\nu\|^2}$. (*) ist eine Abschätzung (2) rechts.

Um eine Abschätzung (2) links zu gewinnen, betrachten wir

$$c := \inf \{ \|x\| \mid x \in S \},$$

wobei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ die sog. euklidische Einheitskugel ist.

Wir zeigen: $c > 0$. Angenommen, es sei $c = 0$. Dann gibt es in S eine Folge (x_k) mit $\|x_k\| \rightarrow 0$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß in 1.1 hat (x_k) eine Teilfolge, die bezüglich der euklidischen Norm konvergiert. Wir nehmen an, (x_k) sei bereits diese Teilfolge. Für den Grenzwert a folgt $a_1^2 + \dots + a_n^2 = \lim(x_{k_1}^2 + \dots + x_{k_n}^2) = 1$; d. h., es ist $a \in S$.

Andererseits haben wir wegen (*) für alle k

$$\|a\| \leq \|a - x_k\| + \|x_k\| \leq C \|a - x_k\|_2 + \|x_k\|.$$

Mit $k \rightarrow \infty$ folgt daraus $\|a\| = 0$, also $a = 0$, im Widerspruch zu $a \in S$. Damit ist gezeigt, daß $c > 0$.

Für $x \neq 0$ ist $x/\|x\|_2 \in S$; also gilt $c \leq \|x/\|x\|_2\|$, und damit

$$c \|x\|_2 \leq \|x\|.$$

Diese Ungleichung gilt auch für $x = 0$. Zusammen mit (*) zeigt sie die Äquivalenz der beiden Normen.

b) Für einen beliebigen Vektorraum V . Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|^*$ Normen auf V . Mit Hilfe eines \mathbb{R} -Isomorphismus $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ übertragen wir diese auf den \mathbb{R}^n : Für $x \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\|x\|_\varphi := \|\varphi(x)\| \quad \text{und} \quad \|x\|_\varphi^* := \|\varphi(x)\|^*.$$

Man sieht leicht, daß $\|\cdot\|_\varphi$ und $\|\cdot\|_\varphi^*$ Normen auf \mathbb{R}^n sind. Nach a) gibt es Konstanten c und C so, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$c \|x\|_\varphi \leq \|x\|_\varphi^* \leq C \|x\|_\varphi.$$

Das bedeutet wegen der Surjektivität von φ für alle $y \in V$

$$c \|y\| \leq \|y\|^* \leq C \|y\|. \quad \square$$

Der Satz hat eine wichtige Konsequenz. Die mit Hilfe einer Norm in einem endlich-dimensionalen Vektorraum eingeführte Topologie hängt nicht von der Art der Norm ab. Insbesondere sind die *offenen Mengen, die Umgebungen und die konvergenten Folgen in einem beliebig normierten \mathbb{R}^n identisch mit jenen im euklidischen \mathbb{R}^n ; Konvergenz etwa bedeutet stets komponentenweise Konvergenz*. Ferner darf in Erörterungen, die nur offene Mengen, Umgebungen, konvergente Folgen und daraus abgeleitete Begriffe involvieren, mit einer Norm gearbeitet werden, die der Sachlage angepaßt ist oder Rechnungen vereinfacht. Oft ist die Maximumsnorm eine solche.

1.3 Stetige Abbildungen

I. Stetigkeit

Wir dehnen den Begriff der Stetigkeit einer Funktion auf einer Menge in \mathbb{C} aus auf Abbildungen eines metrischen Raumes in einen anderen.

Definition: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *stetig im Punkt* $a \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, daß gilt:

$$(3) \quad d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, a) < \delta.$$

Die Abbildung heißt *stetig in* X , wenn sie in jedem Punkt stetig ist.

Auf Mengen $X \subset \mathbb{K}^n$ und $Y \subset \mathbb{K}^m$ sind die von Normen auf \mathbb{K}^n bzw. \mathbb{K}^m erzeugten Spurmetriken zu nehmen. Die Stetigkeit einer Abbildung hängt in solchen Fällen jedoch nicht von den verwendeten Normen ab, da alle Normen auf \mathbb{K}^n bzw. \mathbb{K}^m zueinander äquivalent sind. Ein Wechsel der Normen erfordert höchstens eine Änderung der Zahl δ .

Eine wichtige Klasse stetiger Abbildungen bilden die Lipschitz-stetigen Abbildungen. $f: X \rightarrow Y$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt so, daß für alle $x, x' \in X$ gilt: $d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x, x')$. Mit $\delta := \varepsilon/(L + 1)$ ist dann (3) erfüllt.

Beispiele:

1. Jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ eines endlich-dimensionalen normierten Raumes $(V, \| \cdot \|_V)$ in einen normierten Raum $(W, \| \cdot \|_W)$ ist Lipschitz-stetig; insbesondere ist es jede Koordinatenfunktion $x_\nu: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $x_\nu(a_1, \dots, a_n) := a_\nu$.

Beweis: Sei e_1, \dots, e_n eine Basis in V und M das Maximum der Zahlen $\|f(e_1)\|_W, \dots, \|f(e_n)\|_W$. Für $x = \sum_1^n x_\nu e_\nu$ und $a = \sum_1^n a_\nu e_\nu$ gilt dann

$$\|f(x) - f(a)\|_W \leq M \cdot \sum_{\nu=1}^n |x_\nu - a_\nu|.$$

Nun definiert $y \mapsto \sum_1^n |y_\nu|$ eine Norm auf V . Da diese wegen $\dim V < \infty$ zu $\| \cdot \|_V$ äquivalent ist, gibt es eine Konstante C so, daß $\sum_1^n |y_\nu| \leq C \|y\|_V$. Damit folgt

$$\|f(x) - f(a)\|_W \leq CM \cdot \|x - a\|_V. \quad \square$$

2. Jede Norm $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig mit der Konstanten 1, da

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|.$$

3. Abstandsfunktionen. Sei X ein metrischer Raum. Als *Abstand* eines Punktes $x \in X$ von einer Menge $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, definiert man die Zahl

$$d(x, A) := \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Wir zeigen: Die Funktion $x \mapsto d(x, A)$ ist Lipschitz-stetig auf X .

Beweis: Für $x, y \in X$ gilt zunächst $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$; zusammen mit der durch Vertauschen von x und y entstehenden Ungleichung folgt $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. \square

Das in Band 1, 7.1 angegebene Folgenkriterium für Stetigkeit läßt sich samt Beweis sofort auf Abbildungen metrischer Räume ausdehnen; man hat nur Beträge $|x - a_k|$ durch Abstände $d(x, a_k)$ zu ersetzen.

Folgenkriterium: Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig in $a \in X$, wenn sie jede Folge (x_k) in X mit $x_k \rightarrow a$ in eine Folge $(f(x_k))$ mit $f(x_k) \rightarrow f(a)$ abbildet.

Mit Hilfe des Folgenkriteriums kann man leicht die Rechenregeln I und II aus Band 1, 7.2 übertragen. Da deren Beweise im wesentlichen wörtlich weitergelten, begnügen wir uns, diese Regeln zu formulieren; dabei seien X, Y, Y_1, Y_2 und Z beliebige metrische Räume, W ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum.

Regel I: Sind $f_1, f_2: X \rightarrow W$ stetig in a , so ist es auch $f_1 + f_2$. Es sei ferner $g: X \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in a . Dann ist $f g: X \rightarrow W$ stetig in a und im Fall $g(a) \neq 0$ auch f/g .

Folgerung: Die rationalen Funktionen sind im Definitionsbereich stetig.

Eine Funktion auf einer offenen Menge $X \subset \mathbb{K}^n$ heißt *rational*, wenn sie als Quotient von Polynomfunktionen darstellbar ist; eine Funktion auf \mathbb{K}^n heißt *Polynomfunktion*, wenn sie durch endlich viele Additionen und Multiplikationen aus den Koordinatenfunktionen x_1, \dots, x_n und den Konstanten entsteht.

Beispiel: Die Abbildung $p: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $p(x) := \frac{x}{\|x\|_2}$ ist stetig. Ihr Bild ist die (euklidische) n -Sphäre

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}.$$

Regel II: In $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sei f stetig in a und g stetig in $f(a)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in a .

Beispiel: Die Funktion $h: X \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := e^{\|x\|}$, ist stetig.

Regel III: $f = (f_1, f_2): X \rightarrow Y_1 \times Y_2$ ist genau dann stetig in a , wenn $f_1: X \rightarrow Y_1$ und $f_2: X \rightarrow Y_2$ in a stetig sind. $f = (f_1, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist genau dann stetig in a , wenn dort jede der n Komponentenfunktionen $f_\nu: X \rightarrow \mathbb{K}$ stetig ist.

Beweis: Die Konvergenz $(f_1(x_k), f_2(x_k)) \rightarrow (f_1(a), f_2(a))$ bedeutet in der Produktmetrik die komponentenweise Konvergenz. \square

Sind bei einer Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ alle Beschränkungen auf achsenparallele Geraden stetig, so folgt nicht notwendig, daß sie stetig ist. Ein Beispiel hierfür liefert die Funktion f auf \mathbb{R}^2 mit $f(0,0) = 0$ und

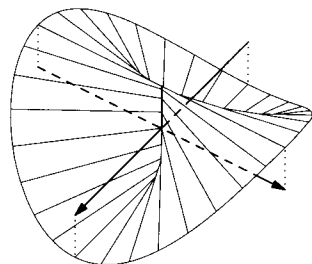
$$(4) \quad f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Alle Funktionen $x \mapsto f(x, c)$ und $y \mapsto f(d, y)$ sind stetig. Die Funktion f aber ist im Nullpunkt unstetig, da $f(t, t) - f(0, 0) = 1$ für alle $t \neq 0$.

Wir betrachten noch die Beschränkungen von f auf die vom Nullpunkt ausgehenden Halbgeraden. In den Punkten $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ mit $r \neq 0$ hat f den nur von φ abhängigen Wert $\sin 2\varphi$. Insbesondere nimmt f in jeder Umgebung des Nullpunktes *alle* seine Funktionswerte an.

Der Graph der Funktion f stellt im wesentlichen das *Plückersche Konoid* dar. Darunter versteht man die Nullstellenmenge im \mathbb{R}^3 des Polynoms $2xy - (x^2 + y^2) \cdot z$. Diese setzt sich zusammen aus dem Graphen von f und der z -Achse.

Die Abbildung zeigt 16 Halbgeraden auf dem Graphen von f zu jeweils gleichen Funktionswerten. Die eingezeichneten Achsen stellen die Geraden $x = y$ und $x = -y$ dar. Auf diesen nimmt f seine Extrema 1 und -1 an.



Graph von (4)

Wir charakterisieren schließlich den Begriff der Stetigkeit allein mit Hilfe des Begriffs der Umgebung.

Satz: Es seien X und Y metrische Räume. $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig im Punkt $a \in X$, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a mit $f(U) \subset V$ gibt.

Beweis: Es sei f stetig in a . Sei V eine beliebige Umgebung von $b := f(a)$ und $K_\varepsilon(b) \subset V$ eine Kugelumgebung. Zu ε wähle man ein δ gemäß (3). Mit $U := K_\delta(a)$ gilt dann $f(U) \subset K_\varepsilon(b) \subset V$. Somit erfüllt f die im Satz genannte Bedingung. Sei nun umgekehrt diese erfüllt. Dann gibt es zu jeder Kugel $K_\varepsilon(b) \subset V$ eine Umgebung U von a mit $f(U) \subset K_\varepsilon(b)$. In U liegt eine Kugel $K_\delta(a)$. Mit dieser gilt ebenfalls $f(K_\delta(a)) \subset K_\varepsilon(b)$, d. h., f erfüllt die Stetigkeitsbedingung (3). \square

Folgerung (globale Stetigkeit): $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig auf ganz X , wenn eine der folgenden gleichwertigen Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset Y$ ist offen in X .
- (ii) Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Y$ ist abgeschlossen in X .

Beweis: (i) Sei f stetig. Da eine offene Menge $V \subset Y$ Umgebung eines jeden Punktes in V ist, ist die Urbildmenge $f^{-1}(V)$ Umgebung eines jeden ihrer Punkte; d. h., $f^{-1}(V)$ ist offen. Sei umgekehrt die angegebene Bedingung erfüllt. Eine Umgebung V eines Punktes $f(a)$ enthält eine offene Menge V' mit $f(a) \in V'$. Deren Urbild $f^{-1}(V') =: U'$ ist als offene Menge eine Umgebung von a und erfüllt $f(U') \subset V$. f ist also stetig in a .

(ii) folgt aus (i) mittels Bildung von Komplementen. □

Anwendung: Ist $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$:

- (i) $U := \{x \in X \mid f(x) < c\}$ ist offen;
- (ii) $A := \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ ist abgeschlossen.

Denn U ist das f -Urbild der offenen Menge $(-\infty; c) \subset \mathbb{R}$ und A das der abgeschlossenen Menge $(-\infty; c]$.

Man beachte: Eine stetige Abbildung muß offene Mengen nicht auf offene Mengen abbilden und abgeschlossene Mengen nicht auf abgeschlossene; z. B. bildet $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ das offene Intervall $(0; 2\pi)$ auf das abgeschlossene Intervall $[-1; 1]$ ab und die abgeschlossene Menge $\{2n\pi + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ auf die nicht abgeschlossene Menge $\{\sin 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Günstiger ist die Sachlage allerdings bei Homöomorphismen.

II. Homöomorphismen. Beispiele

Die Umkehrung einer bijektiven stetigen Abbildung muß nicht stetig sein. Zum Beispiel bildet $x \mapsto e^{ix}$ das Intervall $[0; 2\pi)$ bijektiv und stetig auf die Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{C}$ ab; ihre Umkehrung aber ist unstetig im Punkt 1.

Eine bijektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist, heißt *Homöomorphismus* von X auf Y ; ferner heißen zwei metrische Räume X und Y zueinander *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt. Ein Homöomorphismus bildet offene Mengen auf offene Mengen ab und abgeschlossene auf abgeschlossene. Homöomorphe Räume haben dieselben Topologien, können aber sehr verschiedene geometrische Formen haben. Wir bringen einige Beispiele.

Beispiel 1: Jeder Isomorphismus $f: V \rightarrow W$ zwischen endlich-dimensionalen normierten Räumen ist nach I. Beispiel 1 ein Homöomorphismus.

Beispiel 2: Die Kugel $K_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich einer beliebigen Norm $\| \cdot \|$ ist homöomorph zum \mathbb{R}^n . Ein Homöomorphismus $f: K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ und seine Umkehrung f^{-1} sind gegeben durch

$$(5) \quad f(x) := \frac{x}{1 - \|x\|}, \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}.$$

Damit folgt, daß auch alle Kugeln des \mathbb{R}^n zu verschiedenen Normen untereinander homöomorph sind.

Beispiel 3: Inversion und stereographische Projektion. Sei $p \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Unter der *Inversion mit dem Pol p und der Potenz α* versteht man die Abbildung $i: \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. x und $i(x)$ liegen auf der gleichen Halbgeraden durch p , d. h., es ist $i(x) - p = \lambda \cdot (x - p)$ mit einer Zahl $\lambda > 0$;
2. $\|i(x) - p\|_2 \cdot \|x - p\|_2 = \alpha$.

Die Abbildung i verallgemeinert die in Band 1, 3.2 betrachtete Inversion am Kreis. Nach 1. und 2. hat sie die Darstellung

$$(6) \quad i(x) = p + \frac{\alpha}{\|x - p\|_2^2} \cdot (x - p).$$

Mit Hilfe der oben angegebenen Rechenregeln und Beispiele stetiger Abbildungen sieht man sofort, daß sie stetig ist. Ferner gilt $i^{-1} = i$. Die Inversion bildet also homöomorph ab. In 3.1.IV zeigen wir, daß sie auch winkeltreu abbildet.

Die stereographische Projektion. Es sei jetzt i_N die Inversion mit dem Pol $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und der Potenz 2. i_N hat die Darstellung

$$i_N(x) = N + \frac{2}{\|x - N\|_2^2} \cdot (x - N).$$

Wir zeigen: i_N bildet die Hyperebene $\mathbb{R}_0^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}_0^n := \{x \mid x_{n+1} = 0\}$, bijektiv auf die „gelochte“ Sphäre $S^n \setminus \{N\}$ ab.

Zum Beweis bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^{n+1} . Für $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{N\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|i_N(x)\|_2^2 = 1 &\iff 1 + \frac{4}{\|x - N\|_2^2} \cdot \langle x - N, N \rangle + \frac{4}{\|x - N\|_2^2} = 1 \\ &\iff \langle x - N, N \rangle = -1 \\ &\iff \langle x, N \rangle = 0 \iff x_{n+1} = 0; \end{aligned}$$

da jeder Punkt $y \neq N$ ein Punkt $i_N(x)$ ist, folgt die Behauptung.

Wir ordnen nun jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ den Punkt $(x, 0) \in \mathbb{R}_0^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zu und definieren mittels i_N die Abbildung

$$(6') \quad \sigma_N: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}, \quad \sigma_N(x) := i_N(x, 0).$$

σ_N heißt *stereographische Projektion* von \mathbb{R}^n auf $S^n \setminus \{N\}$.

σ_N ist bijektiv und stetig; ferner ist auch σ_N^{-1} stetig. Die stereographische Projektion ist also ein Homöomorphismus von \mathbb{R}^n auf $S^n \setminus \{N\}$.

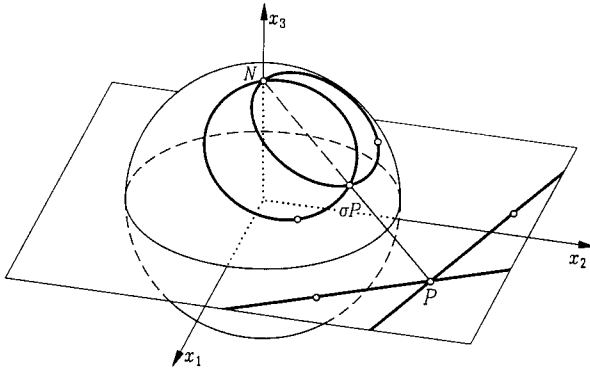


Abbildung zweier Geraden durch stereographische Projektion

Bemerkung: Die stereographische Projektion dient unter anderem zur Kompaktifizierung von \mathbb{C} . Man erweitert \mathbb{C} um ein Element ∞ , das man *unendlich fernen Punkt* nennt, setzt dann $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ bei Identifizierung von \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 fort zu der Abbildung $\hat{\sigma}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S^2$ mit $\hat{\sigma}(z) := \sigma(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\hat{\sigma}(\infty) := N$ und nennt $U \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ offen genau dann, wenn $\hat{\sigma}(U)$ offen in S^2 ist. $\hat{\sigma}$ wird dadurch zu einem Homöomorphismus. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von \mathbb{C} , und S^2 ist ein Modell derselben.

Beispiel 4: Polarkoordinatenabbildungen. Nach Band 1, 8.9 kann man jeden Punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit Zahlen $r, \varphi \in \mathbb{R}$ darstellen in der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi, \\ x_2 &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Entsprechend erklären wir nun eine stetige Abbildung $P_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$(7) \quad P_2(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

P_2 bildet den offenen Streifen $\mathbb{R}_+ \times (-\pi; \pi)$ homöomorph auf $\mathbb{R}^2 \setminus S$ ab, wobei S die Halbgerade $\{(t, 0) : t \leq 0\}$ ist. $\mathbb{R}^2 \setminus S$ nennt man oft die „längs der negativen x_1 -Achse geschlitzte Ebene“.

Die Umkehrabbildung $g_2: \mathbb{R}^2 \setminus S \rightarrow \mathbb{R}_+ \times (-\pi; \pi)$ ist gegeben durch

$$g_2(x_1, x_2) := \left(r, \operatorname{sign} x_2 \cdot \arccos \frac{x_1}{r} \right) \quad \text{mit } r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

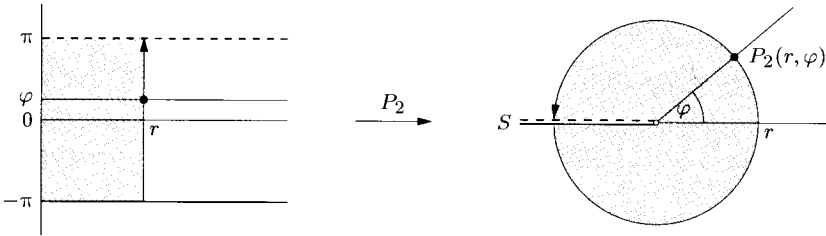


Abbildung des Streifens $\mathbb{R}_+ \times (-\pi; \pi)$ auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus S$

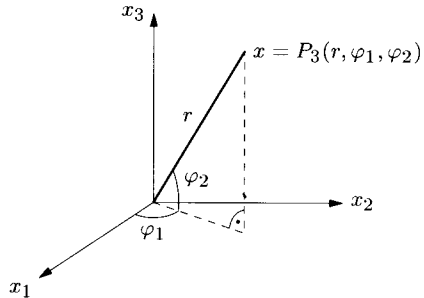
Wir konstruieren nun rekursiv Abbildungen $P_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > 2$, durch

$$(7_n) \quad P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) := \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cdot \cos \varphi_{n-1} \\ r \cdot \sin \varphi_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Im Fall $n = 3$ etwa lauten die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Bildpunktes $x = P_3(r, \varphi_1, \varphi_2)$ ausführlich

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ x_3 &= r \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

φ_1 heißt *geographische Länge* und φ_2 *geographische Breite* des Punktes $x = P_3(r, \varphi_1, \varphi_2)$.



Satz: Die Polarkoordinatenabbildung $P_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat folgende Eigenschaften:

- (i) $\|P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\|_2^2 = r^2$.
- (ii) P_n bildet den offenen Streifen $\mathbb{R}_+ \times \Pi \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph ab auf den „geschlitzten Raum“ $\mathbb{R}^n \setminus (S \times \mathbb{R}^{n-2})$; dabei sei

$$\Pi := \begin{cases} (-\pi; \pi) & \text{im Fall } n = 2, \\ (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)^{n-2} & \text{im Fall } n > 2. \end{cases}$$

Beweis: (i) folgt mit der Rekursionsformel (7_n) aus $\|P_2(r, \varphi)\|_2^2 = r^2$.

(ii) Sei $n \geq 3$. Wir konstruieren die gesuchte Umkehrabbildung rekursiv. Für einen Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus (S \times \mathbb{R}^{n-2})$ setzen wir zunächst

$$r := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{und} \quad \varphi_{n-1} := \arcsin \frac{x_n}{r}.$$

Wegen $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ist $\left| \frac{x_n}{r} \right| < 1$, also $\varphi_{n-1} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Weiter sei

$$x' := \frac{1}{\cos \varphi_{n-1}} \cdot (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Man rechnet nach, daß $\|x'\|_2^2 = r^2$. Sei nun g_{n-1} die Umkehrabbildung zu $P_{n-1} | \mathbb{R}_+ \times \Pi$. Dann wird die Umkehrabbildung zu $P_n | \mathbb{R}_+ \times \Pi$ gegeben durch

$$g_n(x) := (g_{n-1}(x'), \varphi_{n-1}). \quad \square$$

Beispiel 5: Die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$ ist homöomorph zur dreidimensionalen Sphäre $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|_2 = 1\}$.

$SU(2)$ besteht aus den komplexen 2×2 -Matrizen U mit $U\bar{U}^T = E$ und $\det U = 1$. Das sind genau die Matrizen der Gestalt

$$U = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |z|^2 + |w|^2 = 1.$$

Jede komplexe 2×2 -Matrix wird als Element von \mathbb{C}^4 aufgefaßt. $SU(2)$ wird dadurch zu einem (mit der Spurtopologie versehenen) Teilraum von \mathbb{C}^4 . Wir erklären eine Abbildung $f: SU(2) \rightarrow S^3$ durch $f(U) := (x_1, x_2, x_3, x_4)$, wobei $z = x_1 + ix_2$ und $w = x_3 + ix_4$ gelte mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Wegen $|z|^2 + |w|^2 = 1$ liegt $f(U)$ tatsächlich auf S^3 . f ist stetig und hat eine stetige Umkehrung $f^{-1}: S^3 \rightarrow SU(2)$; es ist

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Bemerkung: $SU(2)$ ist mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Dabei sind die Multiplikation $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SU(2)$ und die Inversenbildung $SU(2) \rightarrow SU(2)$ stetige Abbildungen, da sie durch rationale Funktionen beschrieben werden können. Man sagt, $SU(2)$ sei eine *topologische Gruppe*. Der Homöomorphismus $SU(2) \rightarrow S^3$ verpflanzt die stetige Gruppenoperation von $SU(2)$ auf S^3 . Man kann zeigen, daß nur die Sphären der Dimensionen 0, 1 und 3 stetige Gruppenmultiplikationen zulassen. In engem Zusammenhang damit steht der berühmte Satz von Kervaire und Bott-Milnor (1958): *Nur in den Dimensionen 1, 2, 4 und 8 gibt es Divisionsalgebren über \mathbb{R} .*

Literatur: Der Band „Zahlen“, Grundwissen Mathematik 1. Springer 1992.

III. Grenzwerte

Wie der Begriff der Stetigkeit kann auch der des Grenzwertes auf Abbildungen metrischer Räume ausgedehnt werden. Er wird wie im Eindimensionalen mittels stetiger Fortsetzungen erklärt.

Im Folgenden seien X, Y beliebige metrische Räume und $f: D \rightarrow Y$ eine Abbildung auf einer Menge $D \subset X$.

Definition: Die Abbildung $f: D \rightarrow Y$ hat im Häufungspunkt $a \in X$ von D den Grenzwert $b \in Y$, wenn die Abbildung $F: D \cup \{a\} \rightarrow Y$ mit

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \setminus \{a\}, \\ b & \text{für } x = a \end{cases}$$

im Punkt a stetig ist. Man schreibt dann $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Gehört der Häufungspunkt a zu D , so besagt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, daß f in a stetig ist.

Aufgrund der Anbindung des Begriffs des Grenzwertes an den Begriff der Stetigkeit kann man die ε - δ -Formulierung, das Folgenkriterium und die Rechenregeln des Abschnitts I. sinngemäß übertragen. Wir notieren lediglich die ε - δ -Formulierung.

ε - δ -Formulierung: $f: D \rightarrow Y$ hat in einem Häufungspunkt $a \in X$ von D den Grenzwert $b \in Y$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, daß $d_Y(f(x), b) < \varepsilon$ für $x \in D \setminus \{a\}$ mit $d_X(x, a) < \delta$.

IV. Gleichmäßig konvergente Folgen stetiger Abbildungen

Die Konstruktion stetiger Funktionen durch gleichmäßig konvergente Folgen von Funktionen spielt auch im Höherdimensionalen eine große Rolle. Wir betrachten hier sogleich Folgen von Abbildungen in einen vollständigen metrischen Raum. Die Vollständigkeit des Bildraumes sichert dabei die punktweise Konvergenz. Den Begriff der Vollständigkeit eines metrischen Raumes definieren wir in Anlehnung an die Formulierung der Vollständigkeit von \mathbb{R} mittels Cauchyfolgen.

Definition: Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X einen Grenzwert hat. Dabei heißt eine Folge (x_k) in X *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ gibt derart, daß $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ gilt für alle $k, l \geq N(\varepsilon)$.

Zum Beispiel ist jede abgeschlossene Teilmenge des euklidischen \mathbb{R}^n nach dem Folgenkriterium für abgeschlossene Mengen in 1.1 vollständig, da jede Cauchyfolge in \mathbb{R}^n dort konvergiert.

Eine besonders wichtige Kategorie vollständiger metrischer Räume stellen die Banachräume dar.

Definition: Ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum V heißt *Banachraum*, wenn er vollständig ist, d. h., wenn jede Cauchyfolge in V einen Grenzwert hat.

Stefan Banach (1892–1945), polnischer Mathematiker. Von ihm stammen grundlegende Beiträge zur Funktionalanalysis. Der nach ihm benannte Fixpunktsatz wird in zahlreichen Existenzbeweisen, zum Beispiel in 3.3, verwendet.

Beispiele von Banachräumen:

1. *Jeder endlich-dimensionale normierte Vektorraum $(V, \| \cdot \|)$.*

Beweis: Mit Hilfe eines \mathbb{R} -Isomorphismus $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ übertrage man die Norm von V auf den \mathbb{R}^n : Für $x \in \mathbb{R}^n$ setze man dazu $\|x\|_\varphi := \|\varphi^{-1}(x)\|$. φ bildet dann Cauchyfolgen in $(V, \| \cdot \|)$ auf solche in $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_\varphi)$ ab. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, siehe 1.1, und wegen der Äquivalenz von $\| \cdot \|_\varphi$ zu $\| \cdot \|_2$ konvergieren die Cauchyfolgen in $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_\varphi)$, und damit auch die Cauchyfolgen in $(V, \| \cdot \|)$.

2. $\mathcal{C}[a; b]$ mit der *Supremumsnorm*. Denn jede auf $[a; b]$ gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen besitzt dort eine stetige Grenzfunktion.

3. *Die Hilberträume.*

Definition: Ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*, wenn er mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist.

Beispiel: Der Hilbertsche Folgenraum ℓ^2 . Die Elemente dieses Raumes sind die quadratsummierbaren Folgen komplexer Zahlen, d. h. die Folgen $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ mit

$$\|a\|_2 := \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Die Gesamtheit dieser Folgen bildet einen Vektorraum: Für quadratsummierbare Folgen $a = (\alpha_\nu)$ und $b = (\beta_\nu)$ ergibt sich nämlich aus der Ungleichung $\sum_{\nu=1}^n |\alpha_\nu \bar{\beta}_\nu| \leq \|a\|_2 \cdot \|b\|_2$ die absolute Konvergenz der Reihe

$$(8) \quad \langle a, b \rangle := \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \bar{\beta}_\nu$$

und damit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu + \beta_\nu|^2 \leq \|a\|_2^2 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu \bar{\beta}_\nu| + \|\beta\|_2^2 < \infty.$$

Die Summe $a + b$ ist also ebenfalls quadratsummierbar. Folglich ist ℓ^2 ein Vektorraum. Durch (8) wird auf ihm ein Skalarprodukt erklärt.

Wir zeigen, daß ℓ^2 vollständig ist. Die Elemente $a^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots) \in \ell^2$, $k \in \mathbb{N}$, mögen eine Cauchyfolge bilden, und $\varepsilon > 0$ sei beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein N so, daß

$$(*) \quad \|a^k - a^l\|_2^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\nu}^k - \alpha_{\nu}^l|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{für } k, l \geq N.$$

Dann gilt erst recht $|\alpha_{\nu}^k - \alpha_{\nu}^l| < \varepsilon$ für $k, l \geq N$ und jedes $\nu \in \mathbb{N}$. Jede Komponentenfolge $(\alpha_{\nu}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge und besitzt einen Grenzwert α_{ν} . Aus (*) erhalten wir ferner für jedes n und alle $k, l \geq N$ die Ungleichungen $\sum_1^n |\alpha_{\nu}^k - \alpha_{\nu}^l|^2 < \varepsilon^2$ und aus diesen für $l \rightarrow \infty$

$$\sum_{\nu=1}^n |\alpha_{\nu}^k - \alpha_{\nu}|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \text{für } k \geq N \text{ und jedes } n,$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\nu}^k - \alpha_{\nu}|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \text{für } k \geq N.$$

Hiernach hat die Folge $a := (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ die Eigenschaft, daß $a - a_N$ zu ℓ^2 gehört. Wegen $a = a - a_N + a_N$ gehört sie also schon selbst zu ℓ^2 . Die letzte Ungleichung kann man nun in der Form $\|a_k - a\|_2^2 \leq \varepsilon^2$ für $k \geq N$ schreiben, in der sie besagt, daß $a_k \rightarrow a$ für $k \rightarrow \infty$. \square

Historisches. Der Begriff des Hilbertraumes kristallisierte sich ab etwa 1906 aus den Untersuchungen Hilberts und seiner Schüler über Integralgleichungen heraus. Hilbert hatte erkannt, daß gewisse Typen von Integralgleichungen mittels einer Orthonormalbasis von Funktionen in lineare Gleichungssysteme in ℓ^2 übergehen. Hilberträume spielen auch in der Quantenphysik eine maßgebliche Rolle.

David Hilbert (1862–1943) war der führende Mathematiker in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts. Unter Mitwirkung von Felix Klein (1849–1925) und Hermann Minkowski (1864–1909) schuf er die berühmte Göttinger Schule, die alle Gebiete der Mathematik, einschließlich der Mathematischen Logik und der Grundlagenforschung, sowie die Mathematische Physik prägte. Auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Paris 1900 formulierte er 23 Probleme, die für die Mathematik im 20. Jahrhundert richtungweisend wurden.

Wir kommen zur Konstruktion stetiger Abbildungen durch gleichmäßig konvergente Folgen.

Definition: Es seien X und Y metrische Räume. Eine Folge von Abbildungen $f_k: X \rightarrow Y$ heißt *gleichmäßig konvergent auf X* , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ gibt so, daß gilt:

$$d_Y(f_k(x), f_l(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } k, l \geq N(\varepsilon).$$

Wir setzen nun zusätzlich voraus, Y sei vollständig. Für jedes $x \in X$ ist dann $(f_k(x))$ eine Cauchyfolge in Y . Wegen der Vollständigkeit von Y konvergiert diese. Durch $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) =: f(x)$ wird also eine Grenzabbildung $f: X \rightarrow Y$ definiert. Aus $d(f_k(x), f_l(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ und alle $k, l \geq N(\varepsilon)$ folgt für $k \rightarrow \infty$ wegen der Stetigkeit der Abstandsfunktion

$$d(f(x), f_l(x)) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ und alle } l \geq N(\varepsilon).$$

Damit zeigt man wie in Band 1, 15.2:

Satz: *Es sei Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann definiert eine auf X gleichmäßig konvergente Folge stetiger Abbildungen $f_k: X \rightarrow Y$ eine Grenzabbildung $f: X \rightarrow Y$, und diese ist stetig.*

Als Anwendung beweisen wir das

Fortsetzungslemma von Tietze: *Jede stetige Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge A eines metrischen Raumes X kann zu einer stetigen Funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden.*

Beweis: a) Wir zeigen zunächst folgende Approximationsaussage:

Zu jeder stetigen Funktion $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|u| \leq a$, $a \in \mathbb{R}$, gibt es eine stetige Funktion $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|v| \leq \frac{1}{3}a$ auf X und $|u - v| \leq \frac{2}{3}a$ auf A .

Beweis der Approximationsaussage im Fall $a \neq 0$: Sei

$$A^- := \left\{ x \in A \mid u(x) \leq -\frac{a}{3} \right\}, \quad A^+ := \left\{ x \in A \mid u(x) \geq \frac{a}{3} \right\}.$$

A^- und A^+ sind punktfremde abgeschlossene Mengen. Sind beide nicht leer, so wählen wir eine stetige Funktion $g: X \rightarrow [-1; 1]$ mit $g|_{A^-} = -1$ und $g|_{A^+} = 1$, etwa

$$g(x) := \frac{d(x, A^-) - d(x, A^+)}{d(x, A^-) + d(x, A^+)}.$$

In den Fällen $A^+ \neq \emptyset$, $A^- = \emptyset$ und $A^+ = \emptyset$ wählen wir $g := 1$ bzw. $g := -1$.

In allen Fällen leistet dann $v := \frac{1}{3}ag$ die gewünschte Approximation.

b) Beweis des Lemmas unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $|f| < 1$. Wir definieren induktiv eine Folge stetiger Funktionen $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - f_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{für alle } x \in A.$$

Wir beginnen mit $f_0 := 0$.

Sei nun f_k wie gewünscht definiert. Dann gibt es nach der Approximationsaussage a) zu $f - f_k$ eine stetige Funktion v_k auf X mit

$$|f - f_k - v_k| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \text{ auf } A \quad \text{und} \quad |v_k| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k \text{ auf } X.$$

Wir setzen $f_{k+1} := f_k + v_k$. f_{k+1} ist eine stetige Funktion auf X mit der gewünschten Approximationsgüte.

Die Folge (f_k) sei wie angegeben definiert. Dann gilt weiter:

- (i) (f_k) konvergiert auf A punktweise gegen f .
- (ii) (f_k) konvergiert auf X gleichmäßig, da für alle $x \in X$ und $p > q$

$$|f_p(x) - f_q(x)| = \left| \sum_{k=q}^{p-1} v_k(x) \right| \leq \sum_{k=q}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^q.$$

Die Grenzfunktion F der Folge (f_k) ist also stetig auf X und stimmt auf A mit f überein.

c) Beweis des Lemmas im allgemeinen Fall. Wir führen ihn auf Fall b) zurück. Sei dazu $h: \mathbb{R} \rightarrow (-1; 1)$ ein Homöomorphismus, etwa wie in (5). Die Funktion $\varphi := h \circ f$ erfüllt $|\varphi| < 1$, besitzt also nach b) eine stetige Fortsetzung Φ auf X . Die Funktion $F := h^{-1} \circ \Phi$ ist dann eine stetige Fortsetzung von f . \square

V. Lineare Abbildungen. Die Operatornorm

Nach I. Beispiel 1 ist eine lineare Abbildung eines normierten Vektorraumes V in einen anderen Lipschitz-stetig, falls $\dim V < \infty$. Dagegen kann eine lineare Abbildung unstetig sein, falls $\dim V = \infty$. Zum Beispiel ist die Differentiation $D: \mathcal{C}^1[0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $Df := f'(0)$, in dem mit der Supremumsnorm versehenen Raum $\mathcal{C}^1[0; 1]$ unstetig, da die Normen der Funktionen $f_n(x) := (\sin n^2 x)/n$ eine Nullfolge bilden, während die Folge der Ableitungen $f'_n(0)$ divergiert.

Lemma: *Es seien V, W normierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ ist genau dann stetig, wenn es eine Konstante C gibt so, daß $\|Ax\| \leq C \|x\|$ für alle $x \in V$ gilt. In diesem Fall ist A sogar Lipschitz-stetig.*

Beweis: Es sei C eine Konstante wie angegeben. Aus Linearitätsgründen gilt dann $\|Ax - Ax_0\| \leq C \|x - x_0\|$; d. h., A ist Lipschitz-stetig. Sei nun A (wenigstens) in 0 stetig. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ so, daß $\|A\xi\| \leq 1$ gilt für $\xi \in V$ mit $\|\xi\| \leq \delta$. Damit folgt für alle $x \in V$, $x \neq 0$,

$$\|Ax\| = \frac{\|x\|}{\delta} \cdot \left\| A \left(\delta \cdot \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|. \quad \square$$

Die Operatornorm. Es seien V und W normierte Vektorräume über \mathbb{K} , und $L(V, W)$ bezeichne den Vektorraum der *stetigen* \mathbb{K} -linearen Abbildungen von V in W . Auf $L(V, W)$ führt man die sogenannte Operatornorm ein. (Lineare Abbildungen heißen auch lineare Operatoren.) Man definiert dazu für eine stetige lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$

$$(9) \quad \boxed{\|A\|_{L(V, W)} := \sup \{ \|Ax\|_W \mid x \in V, \|x\|_V \leq 1 \}.$$

Nach dem Lemma ist $\|A\|_{L(V, W)} < \infty$. Die Zahl $\|A\|_{L(V, W)}$, für die wir, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, auch nur $\|A\|$ schreiben, heißt *Operatornorm* von A . Sie hängt von der Norm auf V und der Norm auf W ab. Geometrisch ist die Operatornorm als größter „Dehnungskoeffizient“ der Abbildung zu deuten; wegen $\frac{Ax}{\|x\|} = A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ gilt nämlich auch

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} \mid x \in V, x \neq 0 \right\}.$$

Durch (9) ist in der Tat eine Norm auf $L(V, W)$ erklärt: (N1) und (N2) sind offensichtlich erfüllt; (N3) folgt aus der für alle $x \in V$ mit $\|x\| \leq 1$ gültigen Abschätzung $\|(A + B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Eigenschaften der Operatornorm:

1. Für alle $x \in V$ gilt

$$(10) \quad \boxed{\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

2. In der Situation $U \xrightarrow{B} V \xrightarrow{A} W$, in der U, V, W normierte Räume und A, B stetige lineare Operatoren sind, gilt die Ungleichung

$$(11) \quad \boxed{\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Nach (10) gilt nämlich $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$.

Beispiel 1: Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $A: V \rightarrow \mathbb{K}$ die einem Element $v \in V$ mittels $Ax := \langle v, x \rangle$ zugeordnete Linearform. Wegen $|Ax| \leq \|v\| \cdot \|x\|$ und $A(v/\|v\|) = \|v\|$, falls $v \neq 0$, hat A die Operatornorm $\|A\| = \|v\|$.

Beispiel 2: Die *Zeilensummennorm* auf $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Darunter versteht man die zu den Maximumsnormen auf \mathbb{K}^n und \mathbb{K}^m gehörende Operatornorm.

Diese hat für eine lineare Abbildung $A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ mit der Matrix (a_{ij}) den Wert:

$$(12) \quad \|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Beweis: Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $|x_j| \leq 1$ besteht die Abschätzung

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| =: M.$$

Der Wert M wird auch erreicht: Wir wählen i_0 so, daß $M = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|$, und setzen $\xi_j := |a_{i_0 j}|/a_{i_0 j}$, falls $a_{i_0 j} \neq 0$ ist, und sonst $\xi_j := 1$. Dann hat $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ die Norm $\|\xi\|_\infty = 1$, und es gilt $\|A\xi\|_\infty = M$. \square

Den Vektorraum $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ identifizieren wir stets mit dem Vektorraum $\mathbb{K}^{m \times n}$ der $m \times n$ -Matrizen mit Elementen in \mathbb{K} . Dabei wird eine Operatornorm auf $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ auch als Norm auf $\mathbb{K}^{m \times n}$ aufgefaßt und dann ebenfalls als Operatornorm bezeichnet. Wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{K}^{m \times n}$ erhält man:

Lemma: *Eine Folge von Matrizen $A_k \in \mathbb{K}^{m \times n}$ konvergiert in einer Operatornorm gegen die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ genau dann, wenn sie komponentenweise gegen A konvergiert.*

In der Differentialrechnung bekommen wir es mit Funktionen auf einem metrischen Raum X mit Werten in $L(V, W)$ zu tun. Die Frage der Stetigkeit solcher Funktionen bezieht sich stets auf die von der Operatornorm in $L(V, W)$ erzeugte Topologie. Im Fall endlich-dimensionaler Vektorräume V und W hat man dafür einen einfachen Test:

Stetigkeitstest: *Seien V und W endlich-dimensional. Eine Funktion $\varphi: X \rightarrow L(V, W)$ ist genau dann stetig, wenn für jeden Vektor $v \in V$ die Funktion $X \rightarrow W$, $x \mapsto \varphi(x)v$, stetig ist.*

Beweis: Es genügt, den Fall $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$ zu betrachten, da jeder Isomorphismus $L(V, W) \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$ wegen $\dim L(V, W) < \infty$ auch ein Homöomorphismus ist. Nun ist eine Abbildung $\varphi: X \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$ genau dann stetig, wenn ihre mn Komponentenfunktionen $\varphi_{\mu\nu}: X \rightarrow \mathbb{K}$ stetig sind. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn die n Abbildungen

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_{1\nu}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{m\nu}(x) \end{pmatrix} = \varphi(x)e_\nu$$

stetig sind; dabei seien e_1, \dots, e_n die Standardbasisvektoren des \mathbb{K}^n . Damit ergibt sich sofort das angegebene Kriterium. \square

1.4 Kompakte Räume

Wichtige Aussagen der Analysis erhält man in vielen Fällen bereits aufgrund der Kompaktheit der involvierten Räume. In Band 1 haben wir Teilmengen von \mathbb{R} als kompakt bezeichnet, wenn sie zugleich abgeschlossen und beschränkt sind; dort haben wir auch gezeigt, daß diese Mengen gerade diejenigen sind, welche die Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft besitzen. Bei der folgenden Verallgemeinerung definieren wir Kompaktheit durch die genannte Überdeckungseigenschaft. Für Teilmengen eines endlich-dimensionalen normierten Vektorraumes erweist sich diese wieder als gleichwertig mit der Eigenschaft, abgeschlossen und beschränkt zu sein.

I. Kompaktheit

Unter einer *offenen Überdeckung* eines metrischen Raumes X versteht man eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ offener Mengen in X derart, daß jeder Punkt $x \in X$ in mindestens einem U_i liegt; dabei ist I irgendeine Indexmenge.

Definition: Ein metrischer Raum X heißt *kompakt*, wenn aus jeder (wohl-gemerkt: aus *jeder*) vorgegebenen offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X endlich viele U_{i_1}, \dots, U_{i_r} so ausgewählt werden können, daß auch diese X überdecken:

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}.$$

Eine Menge $K \subset X$ heißt *kompakt*, wenn sie als Teilraum kompakt ist; Letzteres bedeutet: Aus jeder Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ offener Mengen in X mit $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ können endlich viele U_{i_1}, \dots, U_{i_r} so ausgewählt werden, daß $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$. (*Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft*)

Definition: Ein metrischer Raum X heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge von Punkten in X eine konvergente Teilfolge besitzt. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *folgenkompakt*, wenn sie als Teilraum folgenkompakt ist; d. h., wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in K liegt. (*Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft*)

Lemma: Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

- Ist X kompakt, so ist X auch folgenkompakt.
- Jede folgenkompakte Menge $K \subset X$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Eine Menge $M \subset X$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Kugel $K_r(b)$ gibt mit $M \subset K_r(b)$.

Beweis: a) Sei (a_k) eine Folge in X und $A := \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Ist die Menge A endlich, so hat die Folge (a_k) sogar eine konstante Teilfolge. Sei die

Menge A nun unendlich. Wir zeigen zunächst, daß sie einen Häufungspunkt in X hat. Angenommen, das sei nicht der Fall. Dann hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U(x)$, die nur endlich viele Punkte aus A enthält. Die Umgebungen $U(x)$, $x \in X$, bilden eine offene Überdeckung von X . Als kompakter Raum wird X bereits von gewissen endlich vielen $U(x_1), \dots, U(x_r)$ überdeckt. Somit enthält auch A nur endlich viele Punkte. Widerspruch!

Sei nun $a \in X$ ein Häufungspunkt von A . Dann enthält für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ die Kugel $\bar{K}_{1/\nu}(a)$ unendlich viele Punkte aus A . Es gibt also eine streng monoton wachsende Indexfolge (k_ν) , so daß $d(a_{k_\nu}, a) < 1/\nu$ gilt. Die Teilfolge (a_{k_ν}) hat dann den Grenzwert $a \in X$.

b) Wäre K nicht beschränkt, so gäbe es bei beliebigem $b \in X$ eine Folge (x_k) in K mit $d(x_k, b) > k$. Diese Folge aber hätte keine konvergente Teilfolge. Wäre K nicht abgeschlossen, so gäbe es eine konvergente Folge in K , deren Grenzwert nicht in K liegt. Dann läge auch der Grenzwert jeder ihrer Teilfolgen außerhalb von K . \square

Bemerkung: Man kann für einen beliebigen metrischen Raum X auch die Umkehrung von a) zeigen. Dagegen gilt die Umkehrung von b) nicht allgemein. Ein Beispiel liefert der Raum $\mathcal{C}[0; \pi]$ mit der Supremumsnorm. Die abgeschlossene Einheitskugel $\bar{K}_1(0) = \{f \in \mathcal{C}[0; \pi] \mid \|f\|_{[0; \pi]} \leq 1\}$ dieses Raumes ist nicht folgenkompakt und damit auch nicht kompakt. Sonst hätte die Folge der Funktionen $\mathbf{e}_k \in \bar{K}_1(0)$, $\mathbf{e}_k(x) := e^{ikx}$, eine konvergente Teilfolge, was wegen $\|\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_l\|_{[0; \pi]} = 2$ für alle $k \neq l$ nicht der Fall ist. Die Umkehrung der Aussage b) gilt jedoch, falls X ein endlich-dimensionaler normierter Raum ist.

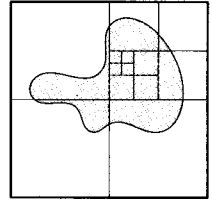
Satz: Für eine Teilmenge $K \subset V$ eines endlich-dimensionalen normierten Raumes V sind folgende Aussagen äquivalent:

1. K ist abgeschlossen und beschränkt.
2. K ist kompakt.
3. K ist folgenkompakt.

Beweis: Nach dem Lemma ist nur noch $1 \Rightarrow 2$ zu zeigen.

a) Wir behandeln zunächst den Fall $V = \mathbb{R}^n$. Angenommen, $\{U_i\}$ sei eine offene Überdeckung von K derart, daß K nicht von endlich vielen der U_i überdeckt wird. Als beschränkte Menge liegt K in einem abgeschlossenen Würfel W ; dessen Kantenlänge sei s . Wir zerlegen den Würfel W in 2^n abgeschlossene Würfel der halben Kantenlänge und finden einen Teilwürfel W_1 derart, daß auch $K \cap W_1$ nicht von endlich vielen der U_i überdeckt wird. Durch Wiederholung dieses Verfahrens findet man eine Folge abgeschlossener Würfel W_k der Kantenlänge $s/2^k$ mit $W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \dots$ und der Eigenschaft:

- (*) Keine der Mengen $K \cap W_k$, $k \in \mathbb{N}$, wird von endlich vielen der U_i überdeckt.



K und einige W_k

Wir wählen dann in jeder Menge $K \cap W_k$ einen Punkt x_k . Nach Konstruktion der Würfelreihe (W_k) ist (x_k) eine Cauchyfolge. Deren Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$ liegt wegen der Abgeschlossenheit von K in K . a liegt auch in einer offenen Menge U der Überdeckung. Diese Menge U enthält fast alle Würfel W_k , insbesondere fast alle Durchschnitte $K \cap W_k$ im Widerspruch zu (*).

b) Den allgemeinen Fall führen wir nun mit Hilfe eines Isomorphismus $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf den Fall a) zurück. Da φ auch ein Homöomorphismus ist, gelten für $K \subset V$ die Äquivalenzen:

K hat die Heine-Borel-Eigenschaft $\iff \varphi(K)$ hat diese,

K hat die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft $\iff \varphi(K)$ hat diese,

K ist abgeschlossen $\iff \varphi(K)$ ist abgeschlossen;

und da φ und φ^{-1} nach 1.3.I. Beispiel 1 Lipschitz-stetig sind, gilt ferner:

K ist beschränkt $\iff \varphi(K)$ ist beschränkt.

Diese Äquivalenzen reduzieren den Satz auf den Fall a). □

Beispiel: Die Gruppe $O(n)$ der orthogonalen $n \times n$ -Matrizen ist kompakt. Dabei ist $O(n)$ als Teilraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$ aufzufassen.

$O(n)$ ist beschränkt, da $O(n)$ in der Einheitskugel $\overline{K}_1(0) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ bezüglich der Maximumsnorm liegt. Außerdem ist $O(n)$ abgeschlossen, da die Matrizen durch die n^2 Polynomgleichungen $XX^T = E$ definiert sind.

Satz: Jede abgeschlossene Teilmenge A eines kompakten Raumes X ist kompakt.

Beweis: Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen in X mit $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann bilden die offene Menge $X \setminus A$ und die Mengen U_i , $i \in I$, eine offene Überdeckung von X . Mit geeignet ausgewählten U_{i_1}, \dots, U_{i_s} gilt also $X = (X \setminus A) \cup (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_s})$; danach wird A von $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_s}$ überdeckt. □

II. Stetige Abbildungen kompakter Räume

Wichtige Existenzaussagen der Analysis beruhen auf Eigenschaften stetiger Abbildungen kompakter Räume, insbesondere auf dem Satz von der Annahme eines Maximums und dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit.

Beide Sätze wurden für kompakte Teilmengen $K \subset \mathbb{C}$ bereits in Band 1 gezeigt. Wir verallgemeinern sie nun auf Abbildungen kompakter Räume.

Satz: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung eines kompakten Raumes X in einen beliebigen Raum Y . Dann ist auch das Bild $f(X)$ kompakt.

Beweis: Sei $\{V_i\}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Die Mengen $U_i := f^{-1}(V_i)$ bilden dann eine offene Überdeckung von X . Gewisse endlich viele U_{i_1}, \dots, U_{i_r} dieser Urbilder überdecken X , deren Bilder V_{i_1}, \dots, V_{i_r} also der Bildmenge $f(X)$. \square

Folgerung (Satz vom Maximum und Minimum): Jede stetige Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Raum X nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

Beweis: Das Bild $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt, hat also ein Supremum M und ein Infimum m . Ferner ist $f(X)$ abgeschlossen; also sind M und m Elemente von $f(X)$. \square

Beispiel: Als *Abstand* zweier nicht leerer Teilmengen K und A eines metrischen Raumes (X, d) definiert man die Zahl

$$d(K, A) := \inf \{d(k, a) \mid k \in K, a \in A\}.$$

Wir zeigen: Ist K kompakt, A abgeschlossen und $K \cap A$ leer, so gibt es einen Punkt $p \in K$ mit $d(p, A) = d(K, A)$; insbesondere ist $d(K, A) > 0$.

Beweis: Die Funktion $x \mapsto d(x, A)$ ist stetig und nimmt auf K ein Minimum an; es gibt also einen Punkt $p \in K$ mit $d(p, A) = d(K, A)$. Da p nicht in A liegt und A abgeschlossen ist, gibt es eine Kugel $K_r(p)$, die A nicht schneidet. Folglich ist $d(p, a) \geq r$ für $a \in A$, also $d(p, A) \geq r$. \square

Die analoge Aussage im Fall zweier nur abgeschlossener Mengen kann falsch sein. Zum Beispiel haben das Achsenkreuz $A = \{(x, y) \mid xy = 0\}$ in \mathbb{R}^2 und die Hyperbel $H = \{(x, y) \mid xy = 1\}$ den Abstand 0.

Definition: Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *gleichmäßig stetig auf X* , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, daß für jedes Punktepaar $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$ gilt:

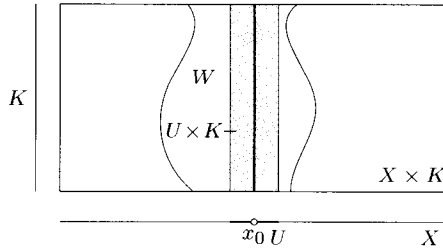
$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Satz: Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eines kompakten metrischen Raumes X in einen metrischen Raum Y ist sogar gleichmäßig stetig.

Beweis wörtlich wie in Band 1, 7.5.

III. Produkträume mit kompaktem Faktor

Tubenlemma: *Es sei X ein beliebiger und K ein kompakter metrischer Raum. Sei ferner $W \subset X \times K$ eine offene Menge, die die „Faser“ über dem Punkt $x_0 \in X$, d. h. die Menge $\{x_0\} \times K$, enthält. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 derart, daß $U \times K \subset W$.*



Jede Umgebung W einer kompakten Faser $\{x_0\} \times K$ enthält eine Tubenumgebung $U \times K$

Beweis: Zu jedem Punkt (x_0, y) , $y \in K$, wähle man offene Umgebungen U_y von x_0 in X und V_y von y in K mit $U_y \times V_y \subset W$. Die Gesamtheit der V_y , $y \in K$, bildet eine offene Überdeckung von K . Als kompakter Raum wird K bereits von gewissen endlich vielen V_{y_1}, \dots, V_{y_r} überdeckt. Dann ist $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_r}$ eine Umgebung von x_0 mit $U \times K \subset W$. \square

Folgerung: *Das Produkt $K \times L$ kompakter Räume K und L ist kompakt.*

Beweis: Sei $\{W_i\}$ eine offene Überdeckung von $K \times L$. Jede Faser $\{x\} \times L$, $x \in K$, wird bereits von gewissen endlich vielen $W_{i,x}$ überdeckt. Diese $W_{i,x}$ überdecken nach dem Tubenlemma eine Menge der Gestalt $U_x \times L$, wobei U_x eine offene Umgebung von x ist. Geeignete endlich viele der U_x überdecken K . Insgesamt findet man so endlich viele W_i , die $K \times L$ überdecken. \square

Anwendung: Stetigkeit parameterabhängiger Integrale. Wichtige Funktionen der Analysis kann man als parameterabhängige Integrale darstellen; zum Beispiel die Gammafunktion, siehe 8.4, oder die sogenannten Besselfunktionen $J_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$; diese besitzen die Darstellung

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt.$$

Wir beweisen mit Hilfe des Tubenlemmas einen Stetigkeitssatz für parameterabhängige Integrale im Fall eines kompakten Integrationsintervalls. Den Fall eines nicht kompakten Integrationsintervalls behandeln wir erst in der Integrationstheorie; siehe 8.4.

Es sei $f: X \times [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf dem Produkt eines metrischen Raumes X und eines kompakten Intervalls $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Integration längs der „Fasern“ $\{x\} \times [a; b]$ ergibt eine Funktion

$$F: X \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_a^b f(x, t) dt.$$

Satz: Die Funktion F ist stetig.

Beweis: Wir beweisen die Stetigkeit in $x_0 \in X$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Funktion $\varphi(x, t) := f(x, t) - f(x_0, t)$ auf $X \times [a; b]$ verschwindet auf der Faser $\{x_0\} \times [a; b]$ und ist stetig. Daher ist die Menge

$$W := \{(x, t) \in X \times [a; b] \mid |\varphi(x, t)| < \varepsilon\}$$

eine offene Umgebung von $\{x_0\} \times [a; b]$. W enthält eine Menge der Gestalt $U \times [a; b]$, wobei U eine Umgebung von x_0 ist. Für $x \in U$ gilt dann

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)| dt \leq |b - a| \cdot \varepsilon. \quad \square$$

Falls auch X ein kompaktes Intervall ist, $X = [c; d]$, kann F darüber integriert werden. Dadurch erhält man das sogenannte *iterierte Integral*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d F(x) dx.$$

In 7.4 werden wir sehen, daß dieses den Wert des 2-dimensionalen Integrals der stetigen Funktion f auf dem Rechteck $[c; d] \times [a; b]$ darstellt.

1.5 Zusammenhang

Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen in der Version von Band 1 setzt als Definitionsbereich ein Intervall voraus. Wir verallgemeinern diesen wichtigen Satz jetzt auf stetige Abbildungen, deren Definitionsbereich zusammenhängend ist.

Definition: Ein metrischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung $X = U \cup V$ gibt, in der U und V disjunkt, offen und nicht leer sind. Eine Teilmenge $X_0 \subset X$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie es als Teilraum ist.

Beispiel: Die Hyperbel $H = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1\}$ hängt nicht zusammen: Ihre beiden Äste $H_+ = H \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ und $H_- = H \cap (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R})$ bilden eine Zerlegung in nicht leere, punktfremde, H -offene Teilmengen.

Satz: Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ mit mindestens zwei Punkten ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.

Beweis: Es sei $X = I$ ein Intervall. Angenommen, es gäbe eine Zerlegung $I = U \cup V$, in der U und V disjunkte, I -offene, nicht leere Mengen sind. Wir wählen dann Punkte $u \in U$ und $v \in V$, wobei wir $u < v$ annehmen dürfen. Da I ein Intervall ist, liegt $[u; v]$ in I . Sei $s := \sup([u; v] \cap U)$. Da $U = I \setminus V$ in I abgeschlossen ist, liegt s in U . Damit folgen $s < v$ und $(s; v] \subset V$. Andererseits gehört wegen der Offenheit von U in I ein gewisses Intervall $[s; s + \varepsilon)$ zu U . Wir erhalten also einen Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$.

Umgekehrt sei X kein Intervall. Dann gibt es Punkte $u, v \in X$ und zwischen diesen einen Punkt $s \notin X$. Die Mengen $U := X \cap (-\infty; s)$ und $V := X \cap (s; \infty)$ sind dann disjunkt, X -offen und nicht leer, und es gilt $U \cup V = X$. Somit hängt X nicht zusammen. \square

Satz: Das Bild $f(X)$ eines zusammenhängenden Raumes X unter einer stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist zusammenhängend.

Beweis: Andernfalls gäbe es disjunkte, nicht leere, $f(X)$ -offene Mengen U und V mit $f(X) = U \cup V$, und man erhielte in $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ eine analoge Zerlegung von X . Widerspruch! \square

Folgerung (Zwischenwertsatz): Es sei X ein zusammenhängender Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf ihm. Ferner seien a und b Punkte in X . Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: Im Fall $f(a) \neq f(b)$ ist $f(X)$ ein Intervall. \square

In der Analysis spielt noch ein weiterer Zusammenhangsbegriff eine Rolle.

Definition: Ein metrischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in X$ eine stetige Kurve $\gamma: [\alpha; \beta] \rightarrow X$ mit $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = b$ gibt. Man sagt dann, γ *verbinde* a und b .

Beispiel 1: Jede konvexe Menge X in einem normierten Vektorraum ist *wegzusammenhängend*. X heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten a und $b \in X$ auch die Verbindungsstrecke $[a; b] := \{a + t(b - a) \mid t \in [0; 1]\}$ in X liegt. $\gamma(t) := a + t(b - a)$, $t \in [0; 1]$, definiert dann eine Verbindungskurve.

Beispiel 2: Für $n \geq 2$ sind $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die Sphäre S^{n-1} *wegzusammenhängend*.

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wegen $n \geq 2$ gibt es einen weiteren Punkt $c \in \mathbb{R}^n$ derart, daß 0 weder auf der Strecke $[a; c]$ noch auf der Strecke $[c; b]$

liegt. Der Streckenzug $\gamma: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\gamma(t) := \begin{cases} a + t(c - a) & \text{für } t \in [0; 1], \\ c + (t - 1)(b - c) & \text{für } t \in [1; 2], \end{cases}$$

verbindet dann a und b . Liegen a und b auf S^{n-1} , so ist $\gamma / \|\gamma\|_2$ eine Kurve auf S^{n-1} , die a und b verbindet. \square

Lemma: *Jeder wegzusammenhängende Raum X ist zusammenhängend.*

Beweis: Angenommen, es gibt eine Zerlegung $X = U \cup V$ in disjunkte, nicht leere, offene Mengen. Wir verbinden dann Punkte $u \in U$ und $v \in V$ mit einer stetigen Kurve $\gamma: [0; 1] \rightarrow X$ und erhalten in $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ eine Zerlegung des Intervalls $[0; 1]$ in disjunkte, nicht leere, $[0; 1]$ -offene Teilmengen. Eine solche gibt es aber nicht. \square

Satz: *Jede zusammenhängende offene Menge X in einem normierten Vektorraum ist wegzusammenhängend. Je zwei Punkte $a, b \in X$ können sogar durch einen Streckenzug in X verbunden werden.*

Letzteres besagt: Es gibt Punkte $a_0 := a, a_1, \dots, a_k := b$ derart, daß jede Verbindungsstrecke $[a_{i-1}; a_i]$ in X liegt.

Beweis: Wir betrachten die Menge

$$U := \{x \in X \mid \text{Es gibt einen Streckenzug in } X \text{ von } a \text{ nach } x\}.$$

U hat folgende Eigenschaften:

- (i) U ist offen. Denn jede Kugel $K(u) \subset X$ mit Mittelpunkt $u \in U$ liegt ganz in U : Setzt man nämlich für $x \in K(u)$ einen Streckenzug in X von a nach u mit der Strecke $[u; x]$ zusammen, so erhält man einen Streckenzug in X von a nach x .
- (ii) $V := X \setminus U$ ist offen. Denn jede Kugel $K(v) \subset X$ mit Mittelpunkt $v \in V$ liegt ganz in V : Sonst gäbe es einen Streckenzug in X von a zu einem Punkt $x \in K(v)$ und damit auch zum Mittelpunkt v .

Nach (i) und (ii) ist $X = U \cup V$ eine Zerlegung in disjunkte, offene Mengen. Da U wegen $a \in U$ nicht leer ist und da X zusammenhängt, ist $U = X$. \square

Bemerkung: Der Satz gilt nicht für beliebige zusammenhängende Teilmengen eines normierten Raumes. Zum Beispiel ist die Menge in \mathbb{R}^2 , die aus dem Nullpunkt und dem Graphen der Funktion $\sin 1/x$, $x > 0$, besteht, zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend; Beweis als Aufgabe.

Definition: Eine zusammenhängende offene Menge in einem normierten Raum heißt *Gebiet*.

Wir bringen noch ein weiteres Beispiel. Dieses hat für den Orientierungsbegriff in endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorräumen eine große Bedeutung; siehe 13.4. Es seien

- $GL(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der reellen $n \times n$ -Matrizen A mit $\det A \neq 0$,
- $GL^+(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der reellen $n \times n$ -Matrizen A mit $\det A > 0$.

$GL(n, \mathbb{R})$ und $GL^+(n, \mathbb{R})$ fassen wir als Teilräume von $\mathbb{R}^{n \times n}$ auf.

Satz: Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 1$, ist nicht zusammenhängend; die Untergruppe $GL^+(n, \mathbb{R})$ hingegen ist zusammenhängend.

Beweis (von Thomas Honold): $GL(n, \mathbb{R})$ ist nicht zusammenhängend. Andernfalls wäre das Bild unter der stetigen Abbildung $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ zusammenhängend; tatsächlich aber ist dieses Bild \mathbb{R}^* . Dem Nachweis, daß $GL^+(n, \mathbb{R})$ zusammenhängt, stellen wir zwei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1: Es seien $U, V \in GL^+(n, \mathbb{R})$ Matrizen derart, daß VU^{-1} keinen negativen Eigenwert hat. Dann liegt auch ihre Verbindungsstrecke $[U; V] := \{tU + (1-t)V \mid t \in [0; 1]\}$ in $GL^+(n, \mathbb{R})$.

Beweis: Zu zeigen ist, daß $D(t) := \det(tU + (1-t)V) > 0$ für $t \in [0; 1]$. Wegen der Stetigkeit der Funktion D und $D(0) > 0$, $D(1) > 0$ genügt es zu zeigen, daß D in $(0; 1)$ keine Nullstelle hat. Nun gilt für $t \in (0; 1)$

$$D(t) = (1-t)^n \det U \cdot \det \left(\frac{t}{1-t} E + VU^{-1} \right) = (1-t)^n \det U \cdot \chi \left(\frac{-t}{1-t} \right);$$

dabei bezeichnet χ das charakteristische Polynom von VU^{-1} . Nach Voraussetzung ist $\chi(\lambda) \neq 0$ für $\lambda < 0$. Damit folgt die Behauptung. \square

Hilfssatz 2: Jede Matrix $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$ besitzt eine Darstellung

$$A = T^2 B \quad \text{mit} \quad T, B \in GL^+(n, \mathbb{R}),$$

wobei T und B keine negativen Eigenwerte haben.

Beweis: Wegen $\det A > 0$ ist die Anzahl der negativen Eigenwerte von A gerade. Diese Eigenwerte seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{2k}$. Nach einem einfachen Reduktionssatz, siehe etwa [9] Kapitel 8.3.3, gibt es ein $V \in GL(n, \mathbb{R})$ so, daß $V^{-1}AV$ die Gestalt

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & C \end{pmatrix} =: A'$$

hat, wobei A eine obere Dreiecksmatrix ist mit $\lambda_1, \dots, \lambda_{2k}$ in der Diagonale und C keine negativen Eigenwerte hat. Es genügt, den Hilfssatz für A' zu zeigen.

Sei T die $n \times n$ -Matrix mit k Kästchen $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und der $(n - 2k)$ -reihigen Einheitsmatrix E_{n-2k} längs der Diagonale:

$$T := \text{Diag}(\underbrace{I, \dots, I}_{k\text{-mal}}, E_{n-2k}).$$

T hat keine negativen Eigenwerte; ferner gilt

$$T^2 = \begin{pmatrix} -E_{2k} & 0 \\ 0 & E_{n-2k} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := T^{-2}A' = \begin{pmatrix} -A & * \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Da auch B keine negativen Eigenwerte hat, ist der Hilfssatz damit bewiesen. \square

Wir kommen zum Nachweis, daß $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ zusammenhängt. Wir zeigen dazu, daß jedes $A \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ mit der Einheitsmatrix E durch einen Streckenzug in $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ verbunden werden kann; das genügt. Sei $A = T^2B$ eine Darstellung wie in Hilfssatz 2. Dann ist $[E; B]$, $[B; TB]$, $[TB; T^2B]$ ein Streckenzug von E nach A , der nach Hilfssatz 1 ganz in $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ liegt. \square

Der Zusammenhang stellt eine wichtige topologische Invariante dar: *Sind X und Y homöomorphe Räume, so ist X genau dann zusammenhängend, wenn das für Y zutrifft.* Diese Tatsache ermöglicht es manchmal, zwei Räume als nicht homöomorph zu erkennen. Wir demonstrieren das an einem für die Dimensionstheorie bedeutsamen Beispiel.

Cantor entdeckte 1878, daß \mathbb{R} bijektiv auf \mathbb{R}^2 abgebildet werden kann. Ferner zeigte Peano 1890, daß es stetige surjektive Abbildungen des Intervalls $I = [0; 1]$ auf das Quadrat I^2 gibt; siehe Band 1, 12.10, Aufgabe 14. Die Abbildung von Cantor ist nicht stetig, die von Peano nicht bijektiv. Erst 1911 bewies Brouwer, daß es keine homöomorphe Abbildung von \mathbb{R}^m auf \mathbb{R}^n gibt, wenn $m \neq n$ ist. Der Beweis benützt Hilfsmittel, die hier nicht zur Verfügung stehen. Immerhin können wir aufgrund der Invarianz des Zusammenhangs den Satz für $m = 1$ zeigen; für $m = 2$ siehe 5.6 Aufgabe 13.

Satz: \mathbb{R}^n ist für $n > 1$ nicht homöomorph zu \mathbb{R} .

Beweis: Für $n > 1$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nach Beispiel 2 zusammenhängend, die Menge $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ jedoch für keinen Punkt $y \in \mathbb{R}$, da sie kein Intervall ist. Gäbe es einen Homöomorphismus $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so induzierte dieser aber einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$. \square

L. E. Brouwer (1891–1961). Begründer des Intuitionismus. Von ihm stammen wichtige Beiträge zur Topologie, insbesondere zur Dimensionstheorie. Die Klärung des Dimensionsbegriffes war im Anschluß an die Mengenlehre von Cantor unausweichlich geworden. Vgl. Band 1, 5.8 Aufgabe 20.

1.6 Potenzreihen in Banachalgebren

Unter einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k \in V$, in einem Banachraum V versteht man wie im Fall $V = \mathbb{C}$ die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Die Reihe heißt *konvergent*, wenn die Folge (S_n) konvergiert; gegebenenfalls heißt deren Grenzwert *Wert der Reihe*, und man schreibt auch für diesen $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Ferner heißt die Reihe *absolut konvergent*, falls die Reihe der Normen $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konvergiert. Die Folge der Partialsummen einer absolut konvergenten Reihe ist offensichtlich eine Cauchyfolge. Somit gilt:

Satz 1: *Jede absolut konvergente Reihe in einem Banachraum konvergiert.*

Wir betrachten im Weiteren Banachräume, die zusätzlich eine mit der Norm verträgliche multiplikative Struktur aufweisen.

Definition: Ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum \mathcal{A} heißt *normierte \mathbb{K} -Algebra*, wenn in ihm eine bilineare und assoziative, aber nicht notwendig kommutative Verknüpfung (Multiplikation) $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $(x, y) \mapsto xy$, erklärt ist und die Norm die *multiplikative Dreiecksungleichung*

$$(N4) \quad \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

erfüllt. Eine normierte Algebra, die zugleich ein Banachraum ist, heißt *Banachalgebra*.

Beispiele von Banachalgebren:

1. *Jede endlich-dimensionale normierte \mathbb{K} -Algebra.* Zum Beispiel der Matrizenraum $\mathbb{K}^{n \times n}$ mit irgendeiner Operatornorm; allgemeiner, der Raum $L(X, X)$ der linearen Abbildungen eines endlich-dimensionalen normierten Vektorraums in sich.
2. *Die Algebra $\mathcal{C}[a; b]$ mit der Supremumsnorm.*

Folgerungen aus (N4):

1. $\|x^k\| \leq \|x\|^k$ für $k = 2, 3, \dots$
2. *Aus $x_k \rightarrow x$ und $y_k \rightarrow y$ folgt $x_k y_k \rightarrow xy$. Insbesondere gilt für jede konvergente Reihe und jedes Element $a \in \mathcal{A}$ $a(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} ax_k$.*
Beweis im Wesentlichen wörtlich wie im Fall $\mathcal{A} = \mathbb{C}$.

Im Folgenden sei \mathcal{A} stets eine Banachalgebra mit Einselement, d. h. mit einem Element e derart, daß $ae = ea = a$ für jedes $a \in \mathcal{A}$ gilt. Ein solches Element ist eindeutig bestimmt und wird oft mit 1 bezeichnet. Die Algebra $\mathbb{K}^{n \times n}$ etwa hat als Einselement die Einheitsmatrix. Für jedes $x \in \mathcal{A}$ setzen wir $x^0 := 1$.

Satz 2: Sei \mathcal{A} eine Banachalgebra über \mathbb{K} mit Eins. Ist $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{K}$ und Konvergenzradius R , so konvergiert für jedes Element $x \in K_R^{\mathcal{A}}(0) := \{x \in \mathcal{A} \mid \|x\| < R\}$ die Reihe

$$P_{\mathcal{A}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

absolut. Die hierdurch erklärte Funktion $P_{\mathcal{A}}: K_R^{\mathcal{A}}(0) \rightarrow \mathcal{A}$ ist in jeder Kugel $\overline{K}_r^{\mathcal{A}}(0)$ mit $r < R$ Lipschitz-stetig: Für beliebige $x, y \in \overline{K}_r^{\mathcal{A}}(0)$ gilt

$$(13) \quad \|P_{\mathcal{A}}(x) - P_{\mathcal{A}}(y)\| \leq \|x - y\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| r^{k-1}.$$

Für jedes $x \in K_R^{\mathcal{A}}(0)$ ist die Funktion $t \mapsto P_{\mathcal{A}}(tx)$ im Intervall $(-\rho; \rho)$ differenzierbar ($\rho := R/\|x\|$ bzw. $\rho = \infty$ für $x = 0$) und hat die Ableitung

$$(14) \quad \frac{d}{dt} P_{\mathcal{A}}(tx) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{\mathcal{A}}((t+h)x) - P_{\mathcal{A}}(tx)}{h} = x \cdot P'_{\mathcal{A}}(tx);$$

dabei bezeichnet P' die Ableitung von P .

Beweis: Die absolute Konvergenz der Reihe $P_{\mathcal{A}}(x)$ für $x \in K_R^{\mathcal{A}}(0)$ folgt wegen $\|a_k x^k\| \leq |a_k| \cdot \|x\|^k$ aus der absoluten Konvergenz der Reihe $P(z)$ für $|z| < R$. Die Lipschitz-Stetigkeit ergibt sich aus der für $x, y \in \mathcal{A}$ mit $\|x\| \leq r$ und $\|y\| \leq r$ geltenden Abschätzung $\|x^k - y^k\| \leq \|x - y\| \cdot k r^{k-1}$, und diese folgt aus der Identität $x^k - y^k = \sum_{i=0}^{k-1} x^{k-1-i} (x - y) y^i$.

Zum Nachweis von (14) verwenden wir die Potenzreihe

$$\Phi(t) := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|x\|^k t^k, \quad t \in (-\rho; \rho).$$

Es sei $t \in (-\rho; \rho)$ fixiert. Da Φ in $|t|$ differenzierbar ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, daß

$$\left| \frac{\Phi(|t|+h) - \Phi(|t|)}{h} - \dot{\Phi}(|t|) \right| < \varepsilon, \quad \text{falls } |h| < \delta, h \neq 0.$$

Für diese h gilt dann

$$\left\| \frac{P_{\mathcal{A}}((t+h)x) - P_{\mathcal{A}}(tx)}{h} - x \cdot P'_{\mathcal{A}}(tx) \right\| \leq \left| \frac{\Phi(|t|+|h|) - \Phi(|t|)}{|h|} - \dot{\Phi}(|t|) \right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Zusatz: Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\|A\| < R$, wobei $\| \cdot \|$ eine beliebige Operatornorm sei, konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ in dieser Norm; sie konvergiert ferner komponentenweise.

Als Beispiele betrachten wir die geometrische Reihe und die Exponentialreihe.

Geometrische Reihe und Inversenbildung. Es sei \mathcal{A} eine Banachalgebra mit Eins. Dann hat $1 - x$ für jedes Element $x \in \mathcal{A}$ mit $\|x\| < 1$ ein Inverses; und zwar ist

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n =: G_{\mathcal{A}}(x);$$

es gilt nämlich

$$(1 - x) \cdot G_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = 1,$$

und ebenso $G_{\mathcal{A}}(x) \cdot (1 - x) = 1$. □

Die Menge der invertierbaren Elemente einer Banachalgebra \mathcal{A} mit Einselement bezeichnet man mit \mathcal{A}^* . \mathcal{A}^* ist mit der Multiplikation von \mathcal{A} als Verknüpfung eine Gruppe und heißt *Einheitengruppe* von \mathcal{A} . Die Einheitengruppe der Matrizenalgebra $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist die Gruppe $\text{GL}(n, \mathbb{K})$; allgemeiner: Die Einheitengruppe in der Algebra der linearen Abbildungen $X \rightarrow X$ eines endlich-dimensionalen normierten Vektorraums ist die Gruppe $L^*(X, X)$ der Isomorphismen.

Satz 3: Die Einheitengruppe \mathcal{A}^* einer Banachalgebra \mathcal{A} mit Eins ist eine offene Menge in \mathcal{A} , und die Inversenbildung

$$\text{Inv}: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*, \quad x \mapsto x^{-1},$$

ist stetig. Insbesondere ist $\text{Inv}: L^*(X, X) \rightarrow L^*(X, X)$ stetig.

Beweis: Sei $a \in \mathcal{A}^*$. Dann enthält \mathcal{A}^* auch die Kugel um a mit dem Radius $r := 1/\|a^{-1}\|$. Aus $\|x - a\| \leq 1/\|a^{-1}\|$ folgt nämlich zunächst

$$\|1 - a^{-1}x\| \leq \|a^{-1}\| \cdot \|a - x\| < 1;$$

also ist $a^{-1}x$ invertierbar und damit auch x . Mithin ist \mathcal{A}^* offen. Ferner ist das zu $x \in K_r(a)$ inverse Element gegeben durch

$$x^{-1} = G_{\mathcal{A}}(1 - a^{-1}x) a^{-1}.$$

Die durch $x \mapsto 1 - a^{-1}x$ und durch $y \mapsto ya^{-1}$ definierten Abbildungen in \mathcal{A} sind Lipschitz-stetig und $G_{\mathcal{A}}: K_1(0) \rightarrow \mathcal{A}$ ist stetig nach obigem Satz. Somit ist auch $x \mapsto x^{-1}$ stetig. □

Bemerkung: Die geometrische Reihe wird oft angewendet, um Operatoren zu invertieren. Man bezeichnet sie auch als *Neumannsche Reihe* nach Carl Neumann (1832–1925), der sie erstmals zur Lösung gewisser Integralgleichungen einsetzte.

Die Exponentialabbildung. Wie im Fall $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ definiert und zeigt man

$$\exp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \exp x = e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Die Exponentialabbildung in \mathcal{A} hat dieselben charakteristischen Eigenschaften wie die Exponentialfunktion in \mathbb{C} :

Satz 4: Für vertauschbare Elemente $x, y \in \mathcal{A}$, d. h. Elemente mit $xy = yx$, gilt das Additionstheorem

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

Insbesondere ist für jedes $x \in \mathcal{A}$ durch $\gamma(t) := e^{tx}$, $t \in \mathbb{K}$, ein Homomorphismus $\gamma: \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}^*$ definiert. Dieser ist differenzierbar, und es gilt

(15)

$$\dot{\gamma}(t) = (e^{tx})' = x e^{tx}.$$

Beweis: Das Additionstheorem beweist man wie in Band 1, 8.1. Damit ergibt sich auch die Invertierbarkeit von e^x ; es gilt nämlich $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$. Die weiteren Behauptungen sind mit Satz 3 gezeigt. \square

Die Exponentialabbildung in einer Banachalgebra hat vielfältige Anwendungen. Wegen (15) spielt sie zum Beispiel eine fundamentale Rolle bei Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten; siehe 4.3.

Beispiele:

1. Sei $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann ist $A^k = \text{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$, und es ergibt sich

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

2. Sei $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $t \in \mathbb{K}$. Wegen $I^{2k} = (-1)^k E$ erhält man

$$e^{tI} = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) E + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) I = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Wegen dieser Formel wird die Matrix I oft als *infinitesimale Erzeugende der Drehgruppe* bezeichnet.

3. Sei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aE + bI$, I wie in Beispiel 2. E und I sind vertauschbar; also gilt $e^{tA} = e^{taE} \cdot e^{tbI}$ für $t \in \mathbb{K}$. Mit Beispiel 1 und 2 folgt

$$e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Ist $AB \neq BA$, so hat man im allgemeinen $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Zum Beispiel gilt mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{A+B} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.7 Aufgaben

- Für Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ gilt
 - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
 - $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
- Jede offene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Vereinigung abzählbar vieler offener Kugeln.
- Eine Norm $\| \cdot \|$ auf einem Vektorraum V wird genau dann von einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert, d. h., es gilt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, wenn sie das *Parallelogrammgesetz* erfüllt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Welche p -Normen auf \mathbb{K}^n werden von einem Skalarprodukt induziert?

- Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige, daß die durch $F(x) := \sup_{y \in J} \{f(x, y)\}$ definierte Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.
- Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0, 0) = 0$ und $f(x, y) := |y/x^2| \cdot e^{-|y/x^2|}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist in $(0, 0)$ unstetig, aber die Beschränkung $f|_G$ auf jede Gerade G durch den Nullpunkt ist stetig auf G .
- Man zeige, daß die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ und der Zylinder $Z := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ homöomorph sind. Ein Homöomorphismus $f: \mathbb{C}^* \rightarrow Z$ ist gegeben durch

$$f(z) := \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \ln |z| \right).$$

7. Es sei $A \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ eine nicht-singuläre, symmetrische Matrix mit $k \geq 1$ positiven Eigenwerten. Man zeige: Die Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = 1\}$ ist homöomorph zu $S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$.
8. Es seien A, B nicht leere, abgeschlossene und disjunkte Teilmengen eines metrischen Raumes X . Dann gibt es offene disjunkte Mengen U, V in X mit $A \subset U$ und $B \subset V$.
Hinweis: Es gibt eine stetige Funktion $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi|_A = 0$, $\varphi|_B = 1$.
9. Sei $a \in \mathbb{K}^n$. Man ermittle für die Linearform $L_a: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto a^T x$, die Operatornorm bezüglich der 1-Norm auf \mathbb{K}^n .
10. Man zeige: Die abgeschlossene Einheitskugel in ℓ^2 ist nicht kompakt; dagegen ist die Menge $Q \subset \ell^2$ der Folgen $z = (z_1, z_2, \dots)$ mit $|z_\nu| \leq \frac{1}{\nu}$ kompakt; Q heißt *Hilbertwürfel*.
11. Es sei K ein kompakter und Y ein beliebiger metrischer Raum. Dann ist jede stetige Bijektion $f: K \rightarrow Y$ sogar ein Homöomorphismus.
12. Es sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X und $\{U_i\}_{i \in I}$ sei eine Überdeckung von K durch offene Mengen in X . Dann gibt es ein $r > 0$ derart, daß jede Kugel $K_r(x)$, $x \in K$, in einer der Mengen U_i liegt.
13. *Satz von Baire.* Sei (A_k) eine Folge abgeschlossener Mengen im \mathbb{R}^n derart, daß ihre Vereinigung A eine offene Kugel enthält. Dann enthält auch mindestens ein A_k eine offene Kugel.
Hinweis: Angenommen, alle A_k° sind leer. Dann gibt es eine Folge abgeschlossener Kugeln $K_k \subset A$ mit $K_{k+1} \subset K_k$ und $A_k \cap K_k = \emptyset$. Man zeige, daß $\bigcap_{k=1}^\infty K_k$ nicht leer ist, und leite einen Widerspruch ab.
14. Man zeige: Zu jeder stetigen Funktion $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, gibt es ein Paar antipodaler Punkte $x, -x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.
Beispiel: Bei jeder stetigen Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche gibt es antipodale Orte, in denen gleichzeitig dieselbe Temperatur herrscht.
Hinweis: Zwischenwertsatz.
15. Ist G ein Gebiet im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, und V ein affiner Unterraum des \mathbb{R}^n einer Dimension $\leq n - 2$, so ist auch $G \setminus V$ ein Gebiet.
16. Je zwei Punkte einer zusammenhängenden offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ lassen sich durch eine stetig differenzierbare Kurve in U verbinden.
17. Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zeige man:
- Ist $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar, so gilt $T^{-1} \cdot e^A \cdot T = e^{T^{-1} A T}$.
 - $\det e^A = e^{\text{Spur } A}$.

18. Es sei \mathcal{A} eine Banachalgebra mit Einselement. Man zeige:

- a) Sind $G(z) = \sum_0^\infty c_k z^k$ und $F(z) = \sum_1^\infty a_k z^k$ konvergente Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien R_G bzw. R_F und ist $x \in \mathcal{A}$ ein Element mit $\|x\| < R_F$ und $\sum_1^\infty |a_k| \cdot \|x\|^k < R_G$, so gilt

$$(G \circ F)_{\mathcal{A}}(x) = G_{\mathcal{A}}(F_{\mathcal{A}}(x)).$$

Man vergleiche Band 1, 14.2.

- b) Für jedes $x \in \mathcal{A}$ mit $\|1 - x\| < 1$ konvergiert die Reihe

$$\ln(1 + x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

absolut, und es gilt $\exp(\ln(1 + x)) = 1 + x$.

19. *Normen und konvexe Mengen im \mathbb{R}^n* . Man zeige:

- (i) Für jede Norm auf \mathbb{R}^n ist die Kugel $\overline{K}_1(0)$ konvex und symmetrisch (d. h., mit x liegt auch $-x$ in $\overline{K}_1(0)$).
- (ii) Sei umgekehrt $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, die konvex und symmetrisch ist, und deren offener Kern nicht leer ist. Setzt man $\|0\| = 0$ und

$$\|x\| := \frac{1}{\max \{t \in \mathbb{R} \mid tx \in K\}} \quad \text{für } x \neq 0,$$

so ist $\| \cdot \|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n , und es gilt $\overline{K}_1(0) = K$.

20. *Spektralradius einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$* . Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A , so heißt $\rho(A) := \max \{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ *Spektralradius* von A ; $\|A\|_2$ bezeichne die Operatornorm von $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ bezüglich der euklidischen Norm auf \mathbb{C}^n . Man zeige:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(\overline{A}^T A)}.$$

21. Seien $P, Q: V \rightarrow V$ lineare Abbildungen eines normierten Vektorraums $V \neq 0$, die die sogenannte *Heisenberg-Relation* $PQ - QP = \text{id}$ erfüllen. Dann können P und Q nicht zugleich stetig sein.

Hinweis: Es gilt (*) $PQ^n - Q^n P = nQ^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wären P und Q stetig, so folgte für großes n $\|Q^{n-1}\| = 0$, also $Q^{n-1} = 0$. Induktiv folgte aus (*) weiter $Q^k = 0$ für $k \leq n-1$.