

2.5.5 Man formuliere Spannungsvektoren in LAGRANGEScher Schreibweise.

2.5.6 Man formuliere die Gleichgewichtsbedingungen (2.26) und die Bewegungsgleichungen (2.28) in der LAGRANGESchen Beschreibungsweise.

2.5.7 Man entwickle aus der Bewegungsgleichung (2.28) die Energiegleichung.

2.5.8 Die Spannungsleistung $\iiint_V D_{ij} \sigma_{ji} dV$ im verformten Körper (Volumen V)

beziehe man auf die Anfangskonfiguration (V_0). Welche *konjugierten Variablen* ergeben sich?

2.5.9 Man definiere einen weiteren Spannungstensor.

2.5.10 Man ermittle die „Dichte“ der Spannungsleistung eines hydrostatischen Spannungszustandes.

2.6 Spannungen im schadhafte Kontinuum

Aufgrund ihres strukturellen Charakters sind Schädigungen in einem Kontinuum im Allgemeinen richtungsabhängig und können somit bei mehraxialer Beanspruchung **nur tensoriell** erfasst werden. Beispielsweise hat die Orientierung von feinen Rissen ein anisotropes makroskopisches Verhalten zur Folge.

Im *tertiären Kriechbereich* treten wachsende Schäden auf, die schließlich den Kriechbruch verursachen. Der Kriechprozeß von Metallen im tertiären Stadium ist gekennzeichnet durch die Ausbildung von mikroskopischen Rissen und durch Porenbildung an Korngrenzen.

Zur Berücksichtigung von Werkstoffschädigungen, die sich im tertiären Kriechstadium ausbilden, führen MURAKAMI / OHNO (1981) und BETTEN (1981b) einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe ein. Ebenso benutzt RABOTNOV (1968) einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe und definiert einen symmetrischen *net-stress Tensor* $\hat{\sigma}$ durch eine lineare Transformation

$$\sigma_{ij} = \Omega_{ijkl} \hat{\sigma}_{kl} \quad (2.43)$$

Darin nimmt er den vierstufigen Tensor Ω als symmetrisch an. Von BETTEN (1982b) wird jedoch gezeigt, dass der Tensor Ω in (2.43) nur symmetrisch bezüglich des ersten Indexpaares (ij) ist, nicht aber bezüglich des zweiten (kl), d.h., der *net-stress Tensor* ist im anisotropen Schadenszustand nicht symmetrisch. Bei BETTEN (1982b) wird ein *net-stress Tensor* konstruiert, der in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegt werden kann, wobei nur der symmetrische Anteil mit dem von

RABOTNOV eingeführteu *net-stress Tensor* übereinstimmt. Zum Nachweis dieser Zusammenhänge geht BETTEN (1982b) von einem schiefsymmetrischen *Kontinuitätstensor* dritter Stufe (Ψ_{ijk}) aus, formuliert ein System von *Bivektoren* für CAUCHYS Tetraeder, das sich in einem geschädigten Zustand befindet, und erhält schließlich einen *Schadenstensor* zweiter Stufe, der bezüglich des zugrundegelegten Koordinatensystems *Diagonalgestalt* hat.

Ein von den Vektoren \mathbf{X} und \mathbf{Y} aufgespanntes Parallelogramm kann im dreidimensionalen Raum durch

$$S_i = \varepsilon_{ijk} X_j Y_k \equiv \{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}\}_i \quad (2.44a)$$

oder in der dualen Form

$$S_{ij} = \varepsilon_{ijk} S_k \iff S_i = \varepsilon_{ijk} S_{jk} / 2 \quad (2.44b)$$

dargestellt werden (*Plangröße*). Aus den Beziehungen (2.44a,b) entnimmt man unmittelbar die Zerlegung

$$S_{ij} = 2! X_{[i} Y_{j]} \equiv \begin{vmatrix} X_i & X_j \\ Y_i & Y_j \end{vmatrix}. \quad (2.45)$$

Solch ein alternierendes Produkt zweier Vektoren \mathbf{X} und \mathbf{Y} wird *einfacher Bivektor* \mathbf{S} genannt, der drei wesentliche, nicht verschwindende Koordinaten S_{23} , S_{31} , S_{12} besitzt. Die Absolutwerte dieser Koordinaten sind die Projektionen der betrachteten Parallelogrammfläche auf die Koordinatenebenen $x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$, $x_3 = \text{const.}$ Somit kann der zweistufige Tensor (2.45) als *Flächenvektor* (*Plangröße*) gedeutet werden, dessen Richtung und Richtungssinn durch das Kreuzprodukt (2.44a) festgelegt sind.

Ein differentiell kleines Tetraeder (Bild 2.2) in einem ungeschädigten Kontinuum kann durch das System von *Bivektoren*

$$\left. \begin{aligned} d^1 S_i &= -\varepsilon_{ijk} (dx_2)_j (dx_3)_k / 2, \\ d^2 S_i &= -\varepsilon_{ijk} (dx_3)_j (dx_1)_k / 2, \\ d^3 S_i &= -\varepsilon_{ijk} (dx_1)_j (dx_2)_k / 2, \\ d^4 S_i &= \varepsilon_{ijk} [(dx_1)_j - (dx_3)_j] [(dx_2)_k - (dx_3)_k] / 2 \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

charakterisiert werden (Bild 2.9a), wobei die Summe auf den Nullvektor führt:

$$\boxed{d^1 S_i + d^2 S_i + d^3 S_i + d^4 S_i = 0_i}, \quad (2.47)$$

d.h., die orientierte Oberfläche des Tetraeders ist null⁴.

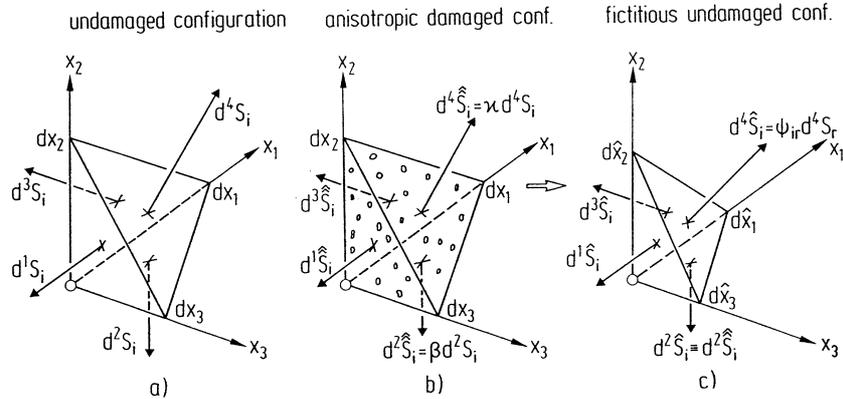


Bild 2.9 Systeme von Bivektoren a) ungeschädigte Konfiguration, b) anisotrop geschädigte Konfiguration c) fiktive ungeschädigte Konfiguration

Dasselbe Tetraeder kann im geschädigten Zustand (Bild 2.9b) durch das folgende System von *Bivektoren* charakterisiert werden:

$$\left. \begin{aligned} d^1 \hat{S}_i &= -\alpha_{ijk} (dx_2)_j (dx_3)_k / 2 && \equiv \alpha d^1 S_i, \\ d^2 \hat{S}_i &= -\beta_{ijk} (dx_3)_j (dx_1)_k / 2 && \equiv \beta d^2 S_i, \\ d^3 \hat{S}_i &= -\gamma_{ijk} (dx_1)_j (dx_2)_k / 2 && \equiv \gamma d^3 S_i, \\ d^4 \hat{S}_i &= \frac{1}{2} \kappa_{ijk} [(dx_1)_j - (dx_3)_j] [(dx_2)_k - (dx_3)_k] && \equiv \kappa d^4 S_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Darin sind $\alpha_{ijk} \equiv \alpha \epsilon_{ijk}$, \dots , $\gamma_{ijk} \equiv \gamma \epsilon_{ijk}$ vollständig schiefsymmetrische Tensoren dritter Stufe mit den wesentlichen Koordinaten $\alpha_{123} \equiv \alpha$, $\beta_{123} \equiv \beta$, $\gamma_{123} \equiv \gamma$. Man erkennt, dass sich die Vektoren $d^1 \hat{S}_i, \dots, d^4 \hat{S}_i$ in Bild 2.9b nur in ihren Längen von den entsprechenden Vektoren der schadlosen

⁴ Ebenso ist die orientierte Oberfläche eines jeden geschlossenen Polyeders null. Dieser Satz gilt sowohl für konvexe als auch nicht konvexe Polyeder.

Konfiguration (Bild 2.9a) unterscheiden, nicht jedoch in ihren Richtungen. Mithin wird ihre Vektorsumme im allgemeinen nicht verschwinden:

$$\boxed{d^1\hat{S}_i + d^2\hat{S}_i + d^3\hat{S}_i + d^4\hat{S}_i \neq 0_i} . \quad (2.49)$$

Eine Ausnahme ist der *isotrope* Schadzuzustand mit $\alpha = \beta = \gamma = \kappa$ oder der *schadlose* Zustand mit $\alpha = \beta = \gamma = \kappa = 1$ gemäÙ (2.47).

Weiterhin wird in Bild 2.9c eine fiktive ungeschädigte Konfiguration betrachtet, die durch das System von *Bivektoren*

$$\left. \begin{aligned} d^1\hat{S}_i &= -\varepsilon_{ijk} (d\hat{x}_2)_j (d\hat{x}_3)_k / 2 \equiv d^1\hat{S}_i, \\ d^2\hat{S}_i &= -\varepsilon_{ijk} (d\hat{x}_3)_j (d\hat{x}_1)_k / 2 \equiv d^2\hat{S}_i, \\ d^3\hat{S}_i &= -\varepsilon_{ijk} (d\hat{x}_1)_j (d\hat{x}_2)_k / 2 \equiv d^3\hat{S}_i, \\ d^4\hat{S}_i &= \varepsilon_{ijk} [(d\hat{x}_1)_j - (d\hat{x}_3)_j] [(d\hat{x}_2)_k - (d\hat{x}_3)_k] / 2, \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

charakterisiert ist, wobei analog zu (2.47) die Vektorsumme wieder verschwindet:

$$\boxed{d^1\hat{S}_i + d^2\hat{S}_i + d^3\hat{S}_i + d^4\hat{S}_i = 0_i} . \quad (2.51)$$

Die drei *Flächenvektoren* $d^1\hat{S}_i, \dots, d^3\hat{S}_i$ in (2.50) sind identisch den entsprechenden Vektoren der geschädigten Konfiguration. Der vierte Vektor $d^4\hat{S}_i$ hat denselben Betrag wie $d^4\hat{S}_i$; er unterscheidet sich von d^4S_i nach Länge und Richtung. Daher sind die beiden Vektoren $d^4\hat{S}_i$ und d^4S_i durch einen linearen Operator zweiter Stufe (Tensor zweiter Stufe) miteinander verknüpft:

$$\boxed{d^4\hat{S}_i = \psi_{ir} d^4S_r} . \quad (2.52)$$

Vergleicht man die Systeme der Bivektoren (2.46), (2.48) und (2.50) miteinander, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.47) und (2.51) in Verbindung mit der Transformation (2.52) die Beziehung

$$\begin{aligned} \psi_{ir} \varepsilon_{ijk} [(dx_2)_j (dx_3)_k + (dx_3)_j (dx_1)_k + (dx_1)_j (dx_2)_k] = \\ = \alpha_{ijk} (dx_2)_j (dx_3)_k + \beta_{ijk} (dx_3)_j (dx_1)_k + \gamma_{ijk} (dx_1)_j (dx_2)_k , \end{aligned} \quad (2.53)$$

worin die Überschiebung $\Psi_{ir}\varepsilon_{rjk}$ auf einen *Kontinuitätstensor* dritter Stufe führt:

$$\Psi_{ir}\varepsilon_{rjk} \equiv \Psi_{ijk} = \Psi_{i[jk]}, \quad (2.54)$$

der *schiefsymmetrisch* bezüglich des eingeklammerten Indexpaares $[jk]$ ist.

Wegen $\alpha_{ijk} \equiv \alpha\varepsilon_{ijk}$ usw. sind die Terme auf der rechten Seite in (2.53) Vektoren mit den Beträgen $|2d^1\hat{S}_i| = \alpha_{1jk}(dx_2)_j(dx_3)_k$ usw. (Ü 2.6.4)

und mit den Richtungen der Basisvektoren ${}^1e_i, {}^2e_i, {}^3e_i$ des rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems. Somit kann die Beziehung (2.53) in Verbindung mit (2.54) in der Form

$$\Psi_{ijk}[(dx_2)_j(dx_3)_k + \dots] = {}^1e_i\alpha_{1jk}(dx_2)_j(dx_3)_k + \dots, \quad (2.55)$$

geschrieben werden, aus der man unmittelbar die Zerlegung

$$\Psi_{ijk} = {}^1e_i\alpha_{1jk} + {}^2e_i\beta_{2jk} + {}^3e_i\gamma_{3jk} \quad (2.56a)$$

entnimmt, bzw. wegen $\alpha_{1jk} = \alpha\varepsilon_{1jk}$ etc. auch:

$$\Psi_{ijk} = \alpha {}^1e_i\varepsilon_{1jk} + \beta {}^2e_i\varepsilon_{2jk} + \gamma {}^3e_i\varepsilon_{3jk}. \quad (2.56b)$$

In Analogie zu (2.44b) findet man aus (2.54) die *duale Form*

$$\Psi_{ijk} \equiv \Psi_{i[jk]} = \varepsilon_{jkr}\Psi_{ir} \iff \Psi_{ir} = \varepsilon_{rjk}\Psi_{ijk}/2 \quad (2.57)$$

und schließlich die *Diagonalform*

$$\Psi_{ij} = \Psi_{ipq}\varepsilon_{jpq}/2 = \text{diag}\{\alpha, \beta, \gamma\}. \quad (2.58a)$$

Setzt man (2.56b) in (2.58a) ein und beachtet man $\delta_{1j} \equiv {}^1e_j$ etc., so erkennt man, dass der *Kontinuitätstensor* zweiter Stufe in *Dyaden* zerlegt werden kann, die man aus den Basisvektoren bildet:

$$\Psi_{ij} = \alpha \left\{ {}^1e \otimes {}^1e \right\}_{ij} + \beta \left\{ {}^2e \otimes {}^2e \right\}_{ij} + \gamma \left\{ {}^3e \otimes {}^3e \right\}_{ij}. \quad (2.58b)$$

Die Beziehungen (2.57) und (2.58a) sind in Bild 2.10 veranschaulicht (BETTEN, 1983).

Im linken Teil des Bildes 2.10 wird der schiefsymmetrische Charakter des Kontinuitätstensors dritter Stufe gemäß (2.54) deutlich. Die drei wesentlichen Koordinaten α, β, γ dieses Tensors sind die Bruchteile der tra-

genden Querschnittsflächen $x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$, $x_3 = \text{const.}$ des Tetraeders in Bild 2.9b. Diese Werte werden experimentell an Proben ermittelt, die man aus den drei orthogonalen Richtungen x_1 , x_2 , x_3 einem Werkstoff entnommen hat.

anisotropic damage ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$) :

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Bild 2.10 Dualer Kontinuitätstensor

Schädigungen können sich bisweilen auch isotrop ausbilden, wie es von JOHNSON (1960) an der Aluminiumlegierung R.R.59 beobachtet wurde. Für solche Spezialfälle ($\alpha = \beta = \gamma \equiv \psi$) ist der Kontinuitätstensor zweiter Stufe ein Kugeltensor:

$$\Psi_{ijk} = \psi \varepsilon_{jkr} \delta_{ir} = \psi \varepsilon_{ijk} \iff \Psi_{ir} = \psi \varepsilon_{rjk} \varepsilon_{ijk} = \psi \delta_{ir}, \quad (2.59)$$

während der dreistufige Kontinuitätstensor im Gegensatz zu (2.54) vollständig schiefsymmetrisch wird ($\Psi_{ijk} \equiv \Psi_{[ijk]}$).

Anstelle des *Kontinuitatstensors* (2.54) kann ein *Schadenstensor* ω eingeführt werden, der gema

$$\omega_{ijk} := \varepsilon_{ijk} - \Psi_{ijk}, \quad \omega_{ij} := \delta_{ij} - \Psi_{ij} \quad (2.60a,b)$$

definiert ist und durch die duale Beziehung

$$\omega_{ijk} \equiv \omega_{i[jk]} = \varepsilon_{jkr} \omega_{ir} \iff \omega_{ir} = \varepsilon_{rjk} \omega_{ijk} / 2 \quad (2.60)$$

charakterisiert werden kann.

Der CAUCHYSche Spannungstensor σ_{ij} in Bild 2.11a ist durch die Beziehung (2.2) oder auch durch die Formel (2.30) definiert.

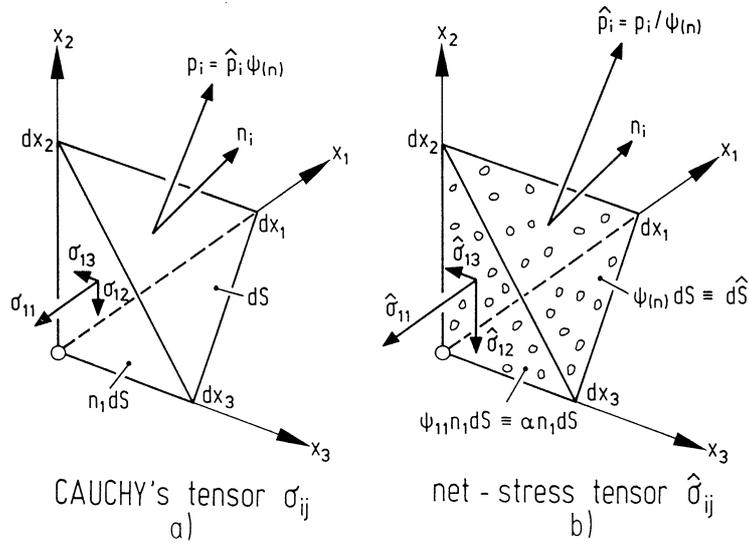


Bild 2.11 Spannungstensor **a)** im ungeschädigten **b)** im geschädigten Kontinuum

In gleicher Weise kann der *aktuelle net-stress Tensor* $\hat{\sigma}_{ij}$ in Bild 2.11b definiert werden (BETTEN, 1982b):

$$\hat{p}_i \psi_{(n)} = \psi_{jk} \hat{\sigma}_{ki} n_j, \quad d\hat{P}_i = p_i d\hat{S} = \hat{\sigma}_{ji} d\hat{S}_j, \quad (2.61a,b)$$

wobei die Flächenelemente dS und $d\hat{S}$ in Bild (2.11a,b) von demselben Kraftvektor beaufschlagt werden ($dP_i \equiv d\hat{P}_i$), so dass man in Verbindung mit (2.52) die Transformation

$$\sigma_{ij} = \psi_{ir} \hat{\sigma}_{rj} \quad (2.62)$$

erhält.

Analog (2.43) kann der Zusammenhang (2.62) auch durch die Transformation

$$\sigma_{ij} = (\psi_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \psi_{jp}) \hat{\sigma}_{pq} / 2 \equiv \Phi_{ijpq} \hat{\sigma}_{pq}, \quad (2.63a)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = (\psi_{ip}^{(-1)} \delta_{jq} + \psi_{iq}^{(-1)} \delta_{jp}) \sigma_{pq} / 2 \equiv \Phi_{ijpq} \sigma_{pq} \quad (2.63b)$$

ersetzt werden, wenn man die vierstufigen Tensoren Φ und Φ einführt, die wie (2.35a,b) nur bezüglich zweier Indizes symmetrisch sind:

$$\Phi_{ijpq} = \Phi_{jipq} , \quad \Phi_{ijpq} = \Phi_{ijqp} , \quad (2.64a,b)$$

wodurch die Symmetrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ und die „Nichtsymmetrie“ $\hat{\sigma}_{ij} \neq \hat{\sigma}_{ji}$ zum Ausdruck kommt.

Beispielsweise kann der Tensor (2.64a) gemäß

$$\begin{aligned} \Phi_{ijpq} = & (\psi_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \psi_{jp} + \psi_{iq} \delta_{jp} + \delta_{ip} \psi_{jq}) / 4 + \\ & + (\psi_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \psi_{jp} - \psi_{iq} \delta_{jp} - \delta_{ip} \psi_{jq}) / 4 \end{aligned} \quad (2.65)$$

in einen symmetrischen und einen schiefssymmetrischen Teil zerlegt werden (BETTEN, 1982b), wobei der symmetrische Anteil mit dem von RABOTNOV (1968) eingeführten Tensor Ω gemäß (2.43) übereinstimmt.

Die „Nichtsymmetrie“ des *aktuellen net-stress Tensors* $\hat{\sigma}_{ij} \neq \hat{\sigma}_{ji}$, die im anisotropen Schadensfall (2.58a,b), (2.62) auch durch

$$\hat{\sigma}_{12} / \hat{\sigma}_{21} = \beta / \alpha , \quad \hat{\sigma}_{23} / \hat{\sigma}_{32} = \gamma / \beta , \quad \hat{\sigma}_{31} / \hat{\sigma}_{13} = \alpha / \gamma \quad (2.66)$$

zum Ausdruck kommt, ist ein Nachteil, der sich bei der Formulierung von *Materialgleichungen* für den *tertiären Kriechbereich* auswirkt. Daher wird von BETTEN (1983) ein *symmetrischer Pseudo-net-stress Tensor* t eingeführt, der durch die Transformation

$$t_{ij} = (\hat{\sigma}_{ik} \psi_{kj}^{(-1)} + \psi_{ki}^{(-1)} \hat{\sigma}_{jk}) / 2 \quad (2.67)$$

definiert ist und wegen (2.63b) aus dem CAUCHYschen Spannungstensor σ gemäß

$$t_{ij} = C_{ijpq}^{(-1)} \sigma_{pq} \quad (2.68)$$

hervorgeht. Darin ist

$$C_{ijpq}^{(-1)} \equiv \left(\psi_{ip}^{(-1)} \psi_{jq}^{(-1)} + \psi_{iq}^{(-1)} \psi_{jp}^{(-1)} \right) / 2 \quad (2.69)$$

ein *symmetrischer* Tensor vierter Stufe:

$$C_{ijpq}^{(-1)} = C_{jipq}^{(-1)} = C_{ijqp}^{(-1)} = C_{pqij}^{(-1)} . \quad (2.70)$$

Im ungeschädigten Zustand ($\psi_{ij} = \delta_{ij}$) stimmt t_{ij} mit σ_{ij} überein, während bei vollständiger Schädigung ($\psi_{ij} = 0_{ij}$) der Tensor (2.69) und damit auch t_{ij} singular werden.

Die inverse Transformation (2.68) ist durch

$$\sigma_{ij} = C_{ijpq} t_{pq} \quad (2.71)$$

gegeben (Ü 2.5.3), wobei

$$C_{ijpq} \equiv (\psi_{ip} \psi_{jq} + \psi_{iq} \psi_{jp}) / 2 \quad (2.72)$$

ein *Kontinuitätstensor* vierter Stufe ist, der dieselben Symmetrieeigenschaften besitzt wie (2.70). Aufgrund dieser Symmetrieeigenschaften kann der Tensor (2.72) als 6×6 Matrix dargestellt werden, die wegen (2.58a,b) die Diagonalgestalt

$$C_{ijpq} = \text{diag} \{ C_{1111}, C_{2222}, C_{3333}, C_{1212}, C_{2323}, C_{3131} \}, \quad (2.73a)$$

$$C_{ijpq} = \text{diag} \{ \alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \alpha\beta/2, \beta\gamma/2, \gamma\alpha/2 \} \quad (2.73b)$$

besitzt, so dass die Koordinaten des *Pseudo-net-stress Tensors* (2.68) durch

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= \sigma_{11} / \alpha^2, & t_{12} &= \sigma_{12} / (\alpha\beta), & t_{13} &= \sigma_{13} / (\alpha\gamma), \\ t_{21} &= t_{12}, & t_{22} &= \sigma_{22} / \beta^2, & t_{23} &= \sigma_{23} / (\beta\gamma), \\ t_{31} &= t_{13}, & t_{32} &= t_{23}, & t_{33} &= \sigma_{33} / \gamma^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

gegeben sind.

Um den „formal“ eingeführten Tensor (2.67) bzw. (2.68) auch mechanisch interpretieren zu können, wird in (2.61b) der *aktuelle net-stress Tensor* $\hat{\sigma}$ über (2.62) durch CAUCHYS Tensor σ ersetzt, so dass wegen $d\hat{P}_i \equiv dP_i$ die Beziehung

$$dP_i = \sigma_{ji} \psi_{jr}^{(-1)} d\hat{S}_r \quad (2.75a)$$

folgt, die wegen (2.71) und (2.72) auch durch

$$dP_i = \psi_{ip} t_{pr} d\hat{S}_r \quad (2.75b)$$

ausgedrückt werden kann. Eine Überschiebung mit $\psi_{ki}^{(-1)}$ führt dann auf $\psi_{ki}^{(-1)} dP_i = t_{kr} d\hat{S}_r$ oder nach Vertauschen von Indizes auf:

$$\psi_{ik}^{(-1)} dP_k \equiv d\tilde{P}_i = t_{ji} d\hat{S}_j . \quad (2.76)$$

Damit ist der *Pseudo-net-stress Tensor* \mathbf{t} in analoger Weise wie der *aktuelle net-stress Tensor* $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ gemäß (2.61b) oder wie der CAUCHYSche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ gemäß (2.30) definiert (BETTEN, 1983):

Der symmetrische Tensor \mathbf{t} verknüpft über die Lineartransformation (2.76) einen Flächenelementvektor $d\hat{S}_j$ des „geschädigten“ Kontinuums mit einem *Pseudo-Kraftvektor*

$$d\tilde{P}_i = \psi_{ik}^{(-1)} dP_k . \quad (2.77)$$

Dieser „Pseudo-Kraftvektor“ stimmt im „ungeschädigten“ Zustand ($\psi_{ij} = \delta_{ij}$) mit dem aktuellen Kraftvektor dP_i überein und wird bei vollständiger Schädigung ($\psi_{ij} = 0_{ij}$) singulär.

Schließlich sei noch auf eine formale Analogie zwischen dem *Pseudo-net-stress Tensor* t_{ij} und dem *zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Tensor* \tilde{T}_{ij} hingewiesen, die man erkennt, wenn man (2.37) mit (2.76) und (2.36) mit (2.77) vergleicht. Man muss wohl nicht betonen, dass $d\tilde{P}_i$ in (2.36), (2.37) und in (2.76), (2.77) unterschiedliche Bedeutung hat, so dass man dieselbe Bezeichnung $d\tilde{P}_i$ belassen kann.

Übungsaufgaben

2.6.1 Man weise (2.47) nach.

2.6.2 Man stelle die Gleichgewichtsbedingungen für ein schadhafte Kontinuum auf. Dabei sollen Massenkräfte unberücksichtigt bleiben.

2.6.3 Aus der Symmetrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ des CAUCHYSchen Spannungstensors leite man Zerlegungen des *net-stress Tensors* $\hat{\sigma}_{ij}$ her.

2.6.4 Man zeige: $\left| d^1 \hat{S}_i \right| = \alpha_{1jk} (dx_2)_j (dx_3)_k / 2$.

