

# 1 Grundriß der Mathematik für Physiker

Da die Theoretische Physik eine mathematisierte Naturwissenschaft ist, bedient sie sich der Mathematik zur Erfassung, Durchdringung und Beschreibung physikalischer Naturzusammenhänge. Deshalb fassen wir im Kapitel 1 als Grundlegung für das gesamte Lehrwerk das laufend benötigte mathematische Rüstzeug in der Art einer Fakten- und Formelsammlung zusammen, auf die bei den späteren mathematischen Beweisführungen für physikalische Erkenntnisse zurückgegriffen werden wird. Selbstverständlich sind wir nicht in der Lage, und das ist auch nicht der Sinn dieser Zusammenstellung, diesen mathematischen Grundriß mit der in der Mathematik geübten Strenge zu reproduzieren, geschweige denn auch Beweisführungen wiederzugeben.

Wir verzichten aber auch bewußt auf die in der Mathematik geläufige abstrakte Fassung von Begriffen und Zusammenhängen, sondern wollen uns aus didaktischen Gründen einer mehr anschaulichen Sprache bedienen, um eine schnellere Verständlichkeit zu erreichen. Es ist hinlänglich bekannt, daß die Mathematikausbildung im Physikstudium große Schwierigkeiten bereitet. Das liegt insbesondere an der häufig zu abstrakten Vermittlung des mathematischen Stoffes, so daß die Physikstudenten oft erst durch die Physik einen Sinn in den mathematischen Begriffen und Lehrsätzen entdecken lernen. Wir denken dabei vor allem an die Vektor- und Tensorrechnung, die in der Physikausbildung meist noch einmal vom physikalischen Standpunkt aus vermittelt werden muß.

## 1.1 Mengen, Arithmetik und Algebra, Clifford-Algebra

### 1.1.1 Mengen

Nach G. CANTOR (1845–1918), dem Begründer der Mengenlehre, versteht man unter einer Menge eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen die Elemente der Menge.

Bilden die Elemente  $m_1, m_2, \dots$  die Menge  $\mathbb{M}$ , so schreibt man  $\mathbb{M} = \{m_1, m_2, \dots\}$ . Die Aussage, daß  $m$  Element der Menge  $\mathbb{M}$  ist, faßt man symbolisch so:  $m \in \mathbb{M}$ , während die Verneinung dieser Aussage durch  $m \notin \mathbb{M}$  gekennzeichnet wird.

Die Menge  $\mathbb{N}$  heißt eine Teilmenge oder Untermenge der Menge  $\mathbb{M}$ , symbolisiert durch  $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$ , wenn aus  $m \in \mathbb{N}$  immer  $m \in \mathbb{M}$  folgt. Die Verneinung dazu schreibt man in der Form  $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{M}$ .

Die wichtigsten mittels Mengen auszuführenden Operationen sind:

Bildung der Vereinigungsmenge (Summe)  $\vee$  der Mengen  $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \dots, \mathbb{M}_n$ , worunter man die Menge aller Elemente versteht, die mindestens einer dieser Mengen angehören. Man

schreibt

$$\mathbb{V} = \mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 \cup \dots \cup \mathbb{M}_n . \quad (1.1.1)$$

Bildung des Durchschnitts  $\mathbb{D}$  der Mengen  $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \dots, \mathbb{M}_n$ , worunter man die Menge aller Elemente versteht, die in jeder dieser Mengen enthalten sind. Man schreibt

$$\mathbb{D} = \mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2 \cap \dots \cap \mathbb{M}_n . \quad (1.1.2)$$

Die folgenden Rechenregeln gelten für Vereinigungsmenge, Durchschnitt und Verknüpfungen zwischen beiden ( $\mathbb{M}, \mathbb{N}, \mathbb{P}$  sind Mengen):

$$\begin{aligned} \text{a) } & (\mathbb{M} \cup \mathbb{N}) \cup \mathbb{P} = \mathbb{M} \cup (\mathbb{N} \cup \mathbb{P}) = \mathbb{M} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{P} , \\ \text{b) } & (\mathbb{M} \cap \mathbb{N}) \cap \mathbb{P} = \mathbb{M} \cap (\mathbb{N} \cap \mathbb{P}) = \mathbb{M} \cap \mathbb{N} \cap \mathbb{P} , \\ \text{c) } & (\mathbb{M} \cup \mathbb{N}) \cap \mathbb{P} = (\mathbb{M} \cap \mathbb{P}) \cup (\mathbb{N} \cap \mathbb{P}) , \\ \text{d) } & (\mathbb{M} \cap \mathbb{N}) \cup \mathbb{P} = (\mathbb{M} \cup \mathbb{P}) \cap (\mathbb{N} \cup \mathbb{P}) . \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

### 1.1.2 Arithmetik und Algebra

Unter der Arithmetik versteht man die Lehre von den verschiedenen Zahlenarten (natürliche, ganze, rationale, reelle, komplexe und hyperkomplexe Zahlen), den dabei durchführbaren Rechenoperationen und den zugehörigen Rechenregeln.

Im Unterschied zur Arithmetik befaßt sich die Zahlentheorie mit den Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen der Zahlen (Teilbarkeit, Primzahlverteilung, Darstellungsmöglichkeiten usw.).

Die Algebra im engeren Sinn hingegen ist die Lehre von der Auflösbarkeit und den Lösungsmethoden algebraischer Gleichungen.

Die Algebra hat sich in letzter Zeit ganz besonders rasch entwickelt. Der Begriff Algebra wird heute oft mehrdeutig gebraucht. Gelegentlich bezeichnet man damit sogar selbst eine gewisse Menge von Elementen, hinsichtlich der eine endliche Zahl von Operationen und Axiomen definiert wird (Theorie allgemeiner Algebren).

In diesem Buch wird die lineare Algebra im Vordergrund stehen, da sie bei der physikalischen Anwendung dominiert.

#### *Algebraische Identitäten*

$$\begin{aligned} \text{a) } & (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab , \\ \text{b) } & (a + b + c + \dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab + 2ac + 2bc + \dots , \\ \text{c) } & (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 , \\ \text{d) } & a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) , \\ \text{e) } & a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) , \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

$$\text{f) } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc),$$

$$\text{g) } (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc.$$

### Binomialkoeffizienten

( $k, m, n$  natürliche Zahlen, wobei  $k \leq n$ ;  $x, y$  beliebige reelle Zahlen)

$$\text{a) } \binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{m!},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$\text{b) } \binom{x+y}{m} = \binom{x}{m} \binom{y}{0} + \binom{x}{m-1} \binom{y}{1} + \dots + \binom{x}{0} \binom{y}{m} \quad (1.1.5)$$

(Additionstheorem),

$$\text{c) } \binom{x+1}{m} = \binom{x}{m} + \binom{x}{m-1},$$

$$\text{d) } \binom{m}{0} = 1, \quad 0! = 1 \quad (\text{Festsetzungen}).$$

Sind  $k, n, n-k \gg 1$ , so gilt näherungsweise  $\left(\alpha = \frac{k}{n}\right)$

$$\binom{n}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha(1-\alpha)}} \left[ \frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}} \right]^n. \quad (1.1.6)$$

**Mittelwerte** ( $a_1, a_2, \dots, a_N > 0$ )

$$\text{a) } A(a_1, a_2, \dots, a_N) = \frac{1}{N} (a_1 + a_2 + \dots + a_N)$$

(arithmetisches Mittel),

$$\text{b) } G(a_1, a_2, \dots, a_N) = \sqrt[N]{a_1 a_2 \dots a_N}$$

(geometrisches Mittel), (1.1.7)

$$\text{c) } H(a_1, a_2, \dots, a_N) = \left[ \frac{1}{N} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_N} \right) \right]^{-1}$$

(harmonisches Mittel).

Im Falle zweier Zahlen  $a$  und  $b$  vereinfachen sich diese allgemeinen Formeln zu

$$\begin{aligned} \text{a) } A(a, b) &= \frac{1}{2}(a + b), \\ \text{b) } G(a, b) &= \sqrt{ab}, \\ \text{c) } H(a, b) &= \frac{2ab}{a + b}. \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Für  $0 < a < b$  gilt die Ungleichung

$$a < H(a, b) < G(a, b) < A(a, b) < b. \tag{1.1.9}$$

### 1.1.3 Clifford-Algebra

In weiten Bereichen der Theoretischen Physik wird im reellen oder komplexen Zahlenkörper gerechnet. In der Quantentheorie der Spinphänomene wurden diese Zahlenkörper überschritten. Man stieß dabei auf die hyperkomplexen Zahlen, mit denen wir uns hier gesondert befassen wollen.

In Analogie zu den komplexen Zahlen definiert man eine zur Clifford-Algebra der Ordnung  $n$  gehörige  $2^n$ -dimensionale hyperkomplexe Zahl durch die Aufspannung ( $2^n$  Dimension der Clifford-Algebra)

$$A = \sum_{l=1}^{2^n} i_l a_l \quad (a_l \text{ komplexe Zahlen}), \tag{1.1.10}$$

wobei die  $2n$  hyperkomplexen Elemente  $i_l$  folgender Axiomatik genügen:

1. Kommutativität der hyperkomplexen Elemente mit den komplexen Zahlen ( $a$  komplexe Zahl):

$$i_l a = a i_l. \tag{1.1.11}$$

2. Existenz eines Einselements  $\mathbb{I}$  (unter den  $i_l$ ) mit

$$\mathbb{I} i_l = i_l \mathbb{I} = i_l. \tag{1.1.12}$$

3. Existenz von  $n$  untereinander antikommutierenden hyperkomplexen Elementen (Generatoren)  $i_\alpha$  mit der Normierung auf  $+\mathbb{I}$  oder  $-\mathbb{I}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} \text{a) } i_\alpha i_\beta &= -i_\beta i_\alpha \quad (\alpha \neq \beta) \quad \text{mit} \\ \text{b) } (i_\alpha)^2 &= \mathbb{I} \quad \text{oder} \quad (i_\alpha)^2 = -\mathbb{I}, \quad \text{d. h.} \\ \text{c) } i_\alpha i_\beta + i_\beta i_\alpha &= \pm 2\delta_{\alpha\beta} \mathbb{I}. \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

4. Existenz von weiteren je  $\binom{n}{k}$  hyperkomplexen Elementen, wobei  $k$  die Anzahl der Faktoren angibt ( $k = 2, 3, \dots, n$ ). Das bedeutet:

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} \text{ Elemente } i_{\alpha\beta} &= i_{\alpha}i_{\beta} \quad (\alpha \neq \beta), \\ \binom{n}{3} \text{ Elemente } i_{\alpha\beta\gamma} &= i_{\alpha}i_{\beta}i_{\gamma} \quad (\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma) \text{ usw.} \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Insgesamt ergeben sich damit nach der binomischen Summenformel

$$\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$$

hyperkomplexe Elemente.

#### **Fall $n = 1$ (komplexe Zahlen)**

Es handelt sich dabei um den Spezialfall der 2-dimensionalen komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} i_1 &= 1, \quad i_2 = i \quad (\text{imaginäre Einheit}); \\ a_1, a_2 & \quad (\text{reelle Zahlen}). \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

#### **Fall $n = 2$ (Quaternionen)**

Wir haben es mit 4-dimensionalen Zahlen zu tun, wobei die Schreibweise

$$i_1 = 1, \quad i_2 = i, \quad i_3 = j, \quad i_4 = k \quad (1.1.16)$$

verwendet wird und

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -\mathbb{I}, \quad ij = -ji = k, \\ ki &= -ik = j, \quad jk = -kj = i \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

gilt.

Die Quaternionen haben, als Paulische Spinmatrizen dargestellt, in der Physik eine große Bedeutung erlangt (siehe Abschnitt 1.8.1e).

#### **Fall $n = 3$ (Biquaternionen)**

Wir gehen hier darauf nicht weiter ein.

#### **Fall $n = 4$ (Clifford-Zahlen)**

Die Clifford-Zahlen, dargestellt als Dirac-Matrizen, bilden die mathematische Basis zur Beschreibung des Spins des Elektrons.

## 1.2 Gruppen

### 1.2.1 Grundbegriffe

Die Entwicklung der Theoretischen Physik zeigt, daß die gruppentheoretischen Hilfsmittel, insbesondere in der Quantentheorie, immer bedeutungsvoller geworden sind, da sie tiefe Einblicke in Naturzusammenhänge gestatten. Deshalb sollen im folgenden einige wichtige Begriffe erläutert werden.

Unter einer Gruppe versteht man eine Menge von Elementen, wobei folgende Eigenschaften vorliegen müssen: Für je zwei Elemente  $p$  und  $q$  ist ein Produkt  $pq$  definiert. Es existiert mindestens ein rechtsseitiges Einselement  $e$  mit  $pe = p$ . Zu jedem Element  $p$  gibt es mindestens ein rechtsseitiges Inverses  $p^{-1}$  mit  $pp^{-1} = e$ . Für je 3 Elemente  $p, q, r$  gilt das assoziative Gesetz  $p(qr) = (pq)r = pqr$ .

Aus diesen Gruppenpostulaten läßt sich folgern, daß das rechtsseitige Einselement auch linksseitiges Einselement ist, daß das rechtsseitige Inverse auch linksseitiges Inverses ist, daß nur ein einziges Einselement existiert und daß es ein eindeutiges Inverses gibt.

Die Anzahl der Elemente einer Gruppe heißt Ordnung der Gruppe. Je nachdem, ob eine Gruppe endlich viele oder unendlich viele Elemente besitzt, nennt man sie eine endliche oder eine unendliche Gruppe.

Eine Gruppe, deren Elemente dem kommutativen Gesetz genügen, heißt Abelsche Gruppe.

Die Abbildung einer Gruppe  $\mathbb{G}$  auf eine Gruppe  $f(\mathbb{G})$  heißt homomorph (Homomorphismus), wenn jedem Element  $g$  aus  $\mathbb{G}$  eindeutig ein Element  $f(g)$  aus  $f(\mathbb{G})$  derart entspricht, daß dem Produkt zweier Elemente  $g_i$  und  $g_k$  der Gruppe  $\mathbb{G}$  das Produkt der entsprechenden Elemente  $f(g_i)$  und  $f(g_k)$  der Gruppe  $f(\mathbb{G})$  zugeordnet ist (Relationstreue):

$$g_i g_k \longrightarrow f(g_i) f(g_k) = f(g_i g_k). \quad (1.2.1)$$

Ist eine Zuordnung umkehrbar eindeutig (eindeutig), d. h., ist  $f(\mathbb{G})$  auch homomorph zu  $\mathbb{G}$ , so nennt man die Abbildung isomorph. Eine isomorphe Abbildung einer Gruppe auf sich selbst heißt Automorphismus. Die Menge aller Elemente der Gruppe  $\mathbb{G}$ , die bei einer homomorphen Abbildung auf das Einselement der Gruppe  $f(\mathbb{G})$  abgebildet werden, wird der Kern der homomorphen Abbildung genannt.

Eine Teilmenge von Elementen der Gruppe  $\mathbb{G}$  heißt eine Untergruppe von  $\mathbb{G}$ , wenn sie bezüglich derselben Verknüpfung wie bei  $\mathbb{G}$  eine Gruppe bildet.

Das Einselement und die Gruppe selbst sind triviale Untergruppen.

Unter dem direkten Produkt  $\mathbb{G} = \mathbb{G}_I \times \mathbb{G}_{II}$  der beiden Gruppen  $\mathbb{G}_I$  und  $\mathbb{G}_{II}$ , dessen Definition zur Voraussetzung hat, daß jedes Element von  $\mathbb{G}_I$  mit jedem Element von  $\mathbb{G}_{II}$  kommutiert, versteht man diejenige Gruppe, deren Elemente die Produkte von jeweils einem Element der Gruppe  $\mathbb{G}_I$  mit einem Element der Gruppe  $\mathbb{G}_{II}$  sind. Die Ordnung der Gruppe des direkten Produkts ist also gleich dem Produkt der Ordnungen der einzelnen Gruppen.

### 1.2.2 Kontinuierliche Gruppen

Eine kontinuierliche Gruppe ist eine spezielle unendliche Gruppe, deren Elemente  $g$  eindeutig durch einen Satz von kontinuierlichen reellen Parametern  $\alpha^\mu$  ( $\mu$  oberer Index) bestimmt sind:  $g = g(\alpha^\mu) = g(\alpha^1, \alpha^2, \dots)$ . Das Produkt zweier Elemente  $g = g(\alpha^\mu)$  und  $\bar{g} = g(\bar{\alpha}^\mu)$  der

Gruppe ist dabei durch die Parameterwerte der einzelnen Sätze gemäß  $\bar{g} = g\bar{g} = g(\bar{\alpha}^\mu)$  gegeben, wobei die Größen

$$\bar{\alpha}^\mu = f^\mu(\alpha^\nu; \bar{\alpha}^\lambda) \quad (1.2.2)$$

stetig differenzierbare Funktionen seien ( $\nu, \lambda$  Indizes analog zu  $\mu$ ).

Denkt man sich durch die Gruppenparameter  $\alpha^\mu$  einen Raum aufgespannt (Parameter-raum), so liegt in diesem Raum ein Bereich, der den Definitionsbereich der Gruppe bestimmt und deshalb Gruppenraum heißt. Auf diese Weise wird jedem Punkt des Gruppenraumes ein Gruppenelement zugeordnet. Die Dimensionszahl des Gruppenraumes bezeichnet man als die Dimension der Gruppe. Je nachdem, ob die Dimension endlich oder abzählbar-unendlich ist, spricht man von einer endlich-kontinuierlichen Gruppe oder von einer unendlich-kontinuierlichen Gruppe.

Insbesondere liegt eine Lie-Gruppe (ursprünglich auf eine endlich-kontinuierliche Gruppe bezogen) vor, wenn sich alle Gruppenelemente durch stetige Veränderung der Gruppenparameter ergeben.

Wichtige Gruppen in der Physik sind die Transformationsgruppen. Das sind Gruppen, deren Elemente Transformationen sind. Es kann sich dabei um Koordinatentransformationen, Eichtransformationen, Phasentransformationen oder ähnliche Transformationen handeln. Die Verknüpfung zweier Gruppenelemente bedeutet dabei die Hintereinanderausführung der zwei diesen Gruppenelementen entsprechenden Transformationen.

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß die 3-dimensionalen bzw. 4-dimensionalen allgemeinen Koordinatentransformationen (d. h. Koordinatentransformationen zwischen krummlinigen Koordinaten), wobei die transformierten Größen durch einen Strich am Index gekennzeichnet sind:

$$\text{a) } x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta) \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } x^{a'} = x^{a'}(x^b), \quad (1.2.3)$$

(man beachte die früher festgelegten Indexkonventionen) eine Gruppe bilden: Die Hintereinanderausführung zweier allgemeiner Koordinatentransformationen liefert wieder eine allgemeine Koordinatentransformation. Die Assoziierung der Transformationen ist belanglos. Das Einselement ist die identische Transformation.

Die zu den endlichen Koordinatentransformationen (1.2.3) gehörigen infinitesimalen Koordinatentransformationen lauten:

$$\text{a) } x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta) \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } x^{a'} = x^a + \xi^a(x^b), \quad (1.2.4)$$

wobei die die Identität abändernden Größen  $\xi^\alpha$  bzw.  $\xi^a$  infinitesimal sind.

Spezielle Transformationsgruppen, die die Symmetrie physikalischer Gegebenheiten (geometrische Konstellation, Lagrange-Funktion, Hamilton-Funktion usw.) gewährleisten, heißen Symmetriegruppen. Sie sind für die Physik deshalb besonders wichtig, weil aus gewissen konstatierten Symmetrien auf die Erhaltungsgesetze der Physik geschlossen werden kann (Noether-Theorem). Aus den Erhaltungsgesetzen können dann die Erhaltungsgrößen abgelesen werden, deren grundlegende Bedeutung sofort einleuchtet, denn es sind diejenigen Größen, die bei oft sehr komplizierten physikalischen Prozessen (z. B. in der Kernphysik oder Elementarteilchenphysik) konstant bleiben und dadurch dem Experiment zugänglich sind.

Die Koordinatentransformations-Symmetriegruppen nennt man Bewegungsgruppen. Dabei hat der Begriff der Bewegung seinen Ursprung in der Tatsache, daß der Ausdruck für das Quadrat des Abstandes zweier auf einem Körper markierter Punkte mit den kartesischen Koordinaten  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  bei Ausführung einer solchen Transformation seine äußere Form beibehält:

$$\begin{aligned} l'^2 &= (x_{2'} - x_{1'})^2 + (y_{2'} - y_{1'})^2 + (z_{2'} - z_{1'})^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Bekanntlich besitzen gerade die Translationen und Drehungen diese bemerkenswerte Eigenschaft. Das sind Transformationen, die man als starre Bewegungen des kartesischen Koordinatensystems bei Festhalten eines Körpers (passive Interpretation) oder als starre Bewegungen eines Körpers bei Festhalten des Koordinatensystems (aktive Interpretation) ansehen kann.

Die Tatsache der Beibehaltung der äußeren Form eines mathematischen Ausdrucks bei Ausführung einer Transformation nennt man Forminvarianz oder Kovarianz. Diese Begriffe spielen in der heutigen Physik eine sehr große Rolle, da sie mit den Symmetrien in der Physik und deshalb mit den Erhaltungsgesetzen zu tun haben.

Ein für die Anwendung kontinuierlicher Gruppen lehrreiches Beispiel ist die im Abschnitt 1.8.1e durchgeführte Behandlung der Drehungen in komplexer Beschreibung.

### 1.2.3 Darstellung von Gruppen

Unter einer Darstellung einer vorgegebenen Gruppe versteht man eine homomorphe Abbildung dieser Gruppe auf eine andere, zweckmäßigerweise bereits bekannte oder auch leichter zugängliche Gruppe, die dann wegen der Homomorphie einen besseren Einblick in die Struktur der ursprünglichen Gruppe gestattet. Im Falle einer Isomorphie sind natürlich beide Gruppen von gleicher Struktur. Man spricht dann von einer treuen Darstellung. Eine große Rolle als Darstellungsgruppen spielen die Transformationsgruppen, weshalb oft die homomorphe Abbildung einer abstrakten Gruppe auf eine insbesondere lineare Transformationsgruppe angestrebt wird.

Da lineare Transformationen eine übersichtliche Formulierung im Matrizenkalkül gefunden haben, ist es zweckmäßig, zur Darstellung einer abstrakten Gruppe die zugeordnete Gruppe der Matrizen heranzuziehen, die wegen der Multiplikationsregel für Matrizen quadratisch sein müssen. Die Anzahl  $p$  der Reihen (Zeilen oder Spalten) der Darstellungsmatrizen wird die Dimension der Darstellung genannt.

Zwei Darstellungen heißen äquivalent, wenn die Matrizen  $D$  der einen Darstellung mit den Matrizen  $\check{D}$  der anderen Darstellung durch eine Äquivalenztransformation (Ähnlichkeitstransformation)

$$\check{D} = CDC^{-1} \quad (1.2.6)$$

verknüpft sind, wobei  $C$  eine fest vorgegebene Transformationsmatrix ist. Äquivalente Darstellungen werden als gleich angesehen.

Unter dem Darsteller versteht man eine Spaltenmatrix  $\Psi$  mit  $p$  Elementen. Durch die Darstellungsmatrix  $D$  eines Gruppenelements wird gemäß

$$\check{\Psi} = D\Psi \quad (1.2.7)$$



eine für das Gruppenelement charakteristische Äquivalenztransformation des Darstellers  $\check{\Psi}$  auf einen anderen Darsteller  $\check{\Psi}$  vermittelt. Die Anzahl  $p$  der Elemente des Darstellers ist dabei gleich der Dimension der Darstellung. Der von  $p$  voneinander unabhängigen Darstellern aufgespannte Raum heißt Darstellungsraum.

Geht man von einer  $K$ -parametrischen Lie-Gruppe aus, die durch die  $p$ -reihigen Matrizen  $D(\alpha^\mu)$  dargestellt wird, so kann man sich diese Matrizen nach den Parametern in eine Reihe entwickelt denken:

$$\begin{aligned} \text{a) } D(\alpha^\mu) &= \mathbb{I} + \sum_{\mu=1}^K I_\mu \alpha^\mu + \sum_{\mu,\nu=1}^K J_{\mu\nu} \alpha^\mu \alpha^\nu + \dots \quad \text{mit} \\ \text{b) } D(0) &= \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

wobei für die Koeffizienten

$$I_\mu = \left( \frac{\partial D(\alpha^\sigma)}{\partial \alpha^\mu} \right)_{\alpha^\sigma=0} \quad \text{usw.} \quad (1.2.9)$$

gilt.

Die dabei auftretenden Entwicklungskoeffizienten 1. Ordnung, die selbst Matrizen sind, spielen im Zusammenhang mit der Darstellung physikalischer Operatoren (z. B. Impuls, Energie, Drehimpuls) eine große Rolle. Sie heißen infinitesimale Gruppenelemente. Die Entwicklungskoeffizienten 2. Ordnung, ebenfalls Matrizen, kann man wegen der Symmetrie des Produkts  $\alpha^\mu \alpha^\nu$  als in  $\mu$  und  $\nu$  symmetrisch ansehen:

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 D(\alpha^\sigma)}{\partial \alpha^\mu \partial \alpha^\nu} \right)_{\alpha^\sigma=0} = J_{\nu\mu}. \quad (1.2.10)$$

In analoger Weise ergibt die Entwicklung der Funktionen (1.2.2)

$$\bar{\alpha}^\mu = \alpha^\mu + \bar{\alpha}^\mu + \sum_{\sigma,\tau=1}^K A_{\sigma\tau}^\mu \alpha^\sigma \bar{\alpha}^\tau + \dots \quad (1.2.11)$$

mit

$$A_{\sigma\tau}^\mu = \left( \frac{\partial^2 f^\mu(\alpha^\rho, \bar{\alpha}^\rho)}{\partial \alpha^\sigma \partial \bar{\alpha}^\tau} \right)_{\alpha^\rho, \bar{\alpha}^\rho=0}. \quad (1.2.12)$$

Für die Untersuchung der Lie-Gruppen und ihrer Darstellungen sind nun die in den unteren Indizes antisymmetrischen Lie-Cartanschen Strukturkonstanten

$$C_{\sigma\tau}^\mu = A_{\sigma\tau}^\mu - A_{\tau\sigma}^\mu = -C_{\tau\sigma}^\mu \quad (1.2.13)$$

von grundsätzlicher Bedeutung.

Es läßt sich das Theorem beweisen, daß zwei auf dem gleichen Gruppenraum erklärte Darstellungen einer Lie-Gruppe, die dieselben infinitesimalen Gruppenelemente  $I_\mu$  besitzen, übereinstimmen.

Weiter gilt die Lie-Cartansche Strukturrelation (Integrabilitätsbedingung)

$$[I_\varrho, I_\sigma] = C_{\varrho\sigma}^\mu I_\mu, \quad (1.2.14)$$

die für die Identifizierung von Gruppen eine große Rolle spielt. Der Klammerausdruck auf der linken Seite bedeutet dabei den Kommutator  $[I_\varrho, I_\sigma] = I_\varrho I_\sigma - I_\sigma I_\varrho$ .

Wir betrachten nun eine Matrizendarstellung einer Gruppe. Gelingt es, durch eine feste Äquivalenztransformation der Art (1.2.6) alle Matrizen der Darstellung auf dieselbe Stufenform

$$D(g) \longrightarrow \left( \begin{array}{c|c|c|c} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 \\ \hline & & & \end{array} \right) \quad (1.2.15)$$

mit Nullen oberhalb der Stufen zu bringen, so heißt die Darstellung reduzibel. Unter Umständen läßt sich die Treppenstruktur der Darstellung durch weitere feste Äquivalenztransformationen noch verfeinern. Man sagt dann, daß sich die Darstellung weiter reduzieren lassen. Gelingt keine weitere Reduktion mehr, so nennt man die Darstellung vollständig ausreduziert oder irreduzibel.

Ist eine Darstellung vollständig ausreduziert, so läßt sie sich in gewissen Fällen durch eine feste Äquivalenztransformation sogar noch weiter auf die Quasi-Diagonalform

$$D(g) \longrightarrow \left( \begin{array}{c|c|c} D^{(1)}(g) & 0 & 0 \\ \hline 0 & D^{(2)}(g) & 0 \\ \hline 0 & 0 & D^{(3)}(g) \\ \hline \end{array} \right) \quad (1.2.16)$$

bringen. Man spricht dann davon, daß sich die Darstellung zerfällen läßt.

Eine zerfällbare Darstellung ist eindeutig in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegbar, wenn man von der Reihenfolge in der Quasi-Diagonalform und von Äquivalenztransformationen absieht. Umgekehrt kann man aus irreduziblen Darstellungen durch Anordnung ihrer Matrizen in Quasi-Diagonalform und Ausführung von Äquivalenztransformationen reduzible Darstellungen aufbauen, die durch die entstehenden Übermatrizen gegeben sind.

Es ist einleuchtend, daß das Studium der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe als der elementaren darstellungstheoretischen Gegebenheiten von ganz besonderem Interesse ist. Deshalb gibt es eine Reihe von Lehrsätzen zu diesem Fragenkreis. Wir weisen auf zwei hin:

#### **Satz von Maschke**

Jede reduzible Darstellung einer endlichen Gruppe ist zerfällbar.

#### **Schur-Auerbach-Theorem**

Zu jeder Matrizendarstellung einer Gruppe existiert eine äquivalente unitäre Matrizendarstellung (Darstellung mit lauter unitären Darstellungsmatrizen).

### 1.3 Determinanten

Unter einer Determinante  $N$ -ter Ordnung, symbolisch geschrieben als

$$\det(A_{\Gamma\Sigma}) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{vmatrix}, \quad (1.3.1)$$

versteht man eine homogene Funktion  $N$ -ten Grades der  $N^2$  Elemente  $A_{\Gamma\Sigma}$ . Ihre Entwicklung ergibt  $N!$  Summanden mit  $\frac{1}{2}N!$  positiven und  $\frac{1}{2}N!$  negativen Gliedern.

Mit Hilfe des gemäß

$$\Delta_{12\dots N} = 1 \quad (1.3.2)$$

normierten, in allen Indexpaaren antisymmetrischen Levi-Civita-Symbols

$$\Delta_{\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_N} = -\Delta_{\Gamma_2\Gamma_1\dots\Gamma_N} \quad \text{usw.}, \quad (1.3.3)$$

für das

$$\sum_{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N=1}^N \Delta_{\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_N} \Delta_{\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_N} = N! \quad (1.3.4)$$

gilt, läßt sich die Determinante (1.3.1) folgendermaßen konkret schreiben:

$$\begin{aligned} \det(A_{\Gamma\Sigma}) &= \frac{1}{N!} \sum_{\substack{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N=1 \\ \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N=1}}^N \Delta_{\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_N} \Delta_{\Sigma_1\Sigma_2\dots\Sigma_N} \cdot \\ &\quad \cdot A_{\Gamma_1\Sigma_1} A_{\Gamma_2\Sigma_2} \dots A_{\Gamma_N\Sigma_N} \\ &= \sum_{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N=1}^N \Delta_{\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_N} A_{\Gamma_1 1} A_{\Gamma_2 2} \dots A_{\Gamma_N N} \\ &= \sum_{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N=1}^N \Delta_{\Sigma_1\Sigma_2\dots\Sigma_N} A_{1\Sigma_1} A_{2\Sigma_2} \dots A_{N\Sigma_N}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Aus dieser Darstellung lassen sich eine Reihe wichtiger, für die praktische Rechnung sehr nützlicher Lehrsätze ableiten:

1. Eine Determinante ändert beim Transponieren (Vertauschen von Zeilen und Spalten) ihren Wert nicht.
2. Beim Vertauschen zweier Reihen (Zeilen, Spalten) einer Determinante ändert diese ihr Vorzeichen.
3. Nullsatz: Stimmen zwei Reihen einer Determinante miteinander überein, so ist ihr Wert null.

4. Faktorensatz: Der gemeinsame Faktor aller Elemente einer Reihe kann vor die Determinante gezogen werden.
5. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man jeweils zu den Elementen einer Reihe die mit einem konstanten Faktor multiplizierten Elemente einer anderen Reihe addiert.  
Daraus folgt, daß eine Determinante verschwindet, wenn zwei Reihen linear abhängig sind.
6. Additionssatz: Die Addition zweier Determinanten gleicher Ordnung, die sich nur in einer Reihe unterscheiden, erfolgt gemäß der Formel

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_N \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ (\alpha_1 + \beta_1) & (\alpha_2 + \beta_2) & \dots & (\alpha_N + \beta_N) \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Die zu dem Element  $A_{\Gamma\Sigma}$  gehörige Unterdeterminante  $U_{\Gamma\Sigma}$  erhält man durch Streichen der  $\Gamma$ -ten Zeile und  $\Sigma$ -ten Spalte in der Ausgangsdeterminante. Der der Unterdeterminante  $U_{\Gamma\Sigma}$  zugeordnete Minor  $M_{\Gamma\Sigma}$  ist durch

$$M_{\Gamma\Sigma} = U_{\Gamma\Sigma}(-1)^{\Gamma+\Sigma} \tag{1.3.7}$$

gegeben.

Gemäß dem Entwicklungssatz für Determinanten gilt

$$\sum_{\Gamma=1}^N A_{\Omega\Gamma} M_{\Lambda\Gamma} = \sum_{\Gamma=1}^N A_{\Gamma\Omega} M_{\Gamma\Lambda} = \det(A_{\Gamma\Sigma}) \delta_{\Omega\Lambda}, \tag{1.3.8}$$

wobei  $\delta_{\Omega\Lambda}$  das Kronecker-Symbol mit der Eigenschaft

$$\delta_{\Omega\Lambda} = \begin{cases} 1 & \text{für } \Omega = \Lambda, \\ 0 & \text{für } \Omega \neq \Lambda \end{cases} \tag{1.3.9}$$

ist.

Aus dem Entwicklungssatz (1.3.8) folgt, daß der Wert einer Determinante, bei der alle Elemente auf der einen Seite der Hauptdiagonale null sind, gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1N} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2N} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{NN} \end{vmatrix} = A_{11} A_{22} A_{33} \dots A_{NN}. \tag{1.3.10}$$

Weiter folgt aus dem Entwicklungssatz (1.3.8) für die Determinante der Minoren

$$\det(M_{A\Gamma}) = [\det(A_{A\Gamma})]^{N-1}. \quad (1.3.11)$$

Eine Determinante hat den Rang  $R$ , wenn alle möglichen Unterdeterminanten höherer Ordnung als  $R$  verschwinden.

Die Ränderung (Säumung) einer Determinante  $\det(A_{\Gamma\Sigma})$ , ausgeführt gemäß

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} & x_N \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

mit den Elementen  $\{x_1, \dots, x_N, 1\}$  ändert den Wert einer Determinante nicht. Durch die Ränderung wird die Addition zweier Determinanten verschiedener Ordnung ermöglicht.

Schließlich erwähnen wir noch, daß die Ableitung einer Determinante gleich der Summe von  $N$  Determinanten ist, die man dadurch erhält, daß man in der 1. Determinante die Elemente der 1. Reihe durch deren Ableitungen, in der 2. Determinante die Elemente der 2. Reihe durch deren Ableitungen, usw., ersetzt.

## 1.4 Matrizen

### 1.4.1 Grundbegriffe

Eine  $(MN)$ -reihige Matrix ist eine Anordnung von  $M \cdot N$  Zahlen in  $M$  Zeilen und  $N$  Spalten:

$$A = (A_{\Gamma\Sigma}) = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{M1} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix}. \quad (1.4.1)$$

Eine Matrix hat den Rang  $R$ , wenn alle in ihr möglichen Determinanten höherer Ordnung als  $R$  verschwinden.

Eine quadratische Matrix mit  $N$  Reihen nennt man von  $N$ -ter Ordnung.

Unter dem Defekt einer Matrix versteht man die Differenz

$$D = N - R. \quad (1.4.2)$$

Die Einheitsmatrix bezeichnen wir mit  $\mathbb{I} = (\delta_{\Gamma\Sigma})$ , die Nullmatrix mit  $\mathbb{O}$ . Wenn keine inhaltlichen Schwierigkeiten auftreten, schreiben wir:  $\mathbb{I} = 1$ ,  $\mathbb{O} = 0$ .

Es ist nur die Summenbildung gleichartiger Matrizen möglich:

$$(C_{\Gamma\Sigma}) = (A_{\Gamma\Sigma}) + (B_{\Gamma\Sigma}) = (A_{\Gamma\Sigma} + B_{\Gamma\Sigma}). \quad (1.4.3)$$

Es ist nur die Produktbildung einer  $(MN)$ -reihigen Matrix mit einer  $(NP)$ -reihigen Matrix definiert:

$$(C_{\Gamma\Sigma}) = (A_{\Gamma\Omega}) \cdot (B_{\Omega\Sigma}) = \left( \sum_{\Omega=1}^N A_{\Gamma\Omega} B_{\Omega\Sigma} \right). \quad (1.4.4)$$

Daraus folgt, daß für die Multiplikation von Matrizen das kommutative Gesetz im allgemeinen nicht gilt.

Die Differentiation und Integration von Matrizen erfolgt elementweise gemäß

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d}{dt}(A_{\Gamma\Sigma}) &= \left( \frac{dA_{\Gamma\Sigma}}{dt} \right), \\ \text{b) } \int (A_{\Gamma\Sigma}) dt &= \left( \int A_{\Gamma\Sigma} dt \right). \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Die Determinante eines Produktes endlicher quadratischer Matrizen ist gleich dem Produkt der Determinanten der Matrizen:

$$\det(C_{\Gamma\Sigma}) = \det(A_{\Gamma\Sigma}) \cdot \det(B_{\Gamma\Sigma}). \quad (1.4.6)$$

Die Inverse  $A^{-1}$  einer regulären Matrix  $A$  genügt der Relation

$$\begin{aligned} \text{a) } AA^{-1} &= A^{-1}A = \mathbb{I} \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } \sum_{\Omega=1}^N A_{\Gamma\Omega}(A^{-1})_{\Omega\Sigma} &= \delta_{\Gamma\Sigma}. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Durch Vergleich mit (1.3.8) erkennt man den Zusammenhang der Inversen mit den Minoren, nämlich

$$\text{a) } (A^{-1})_{\Omega\Sigma} = \frac{1}{\tilde{A}} M_{\Sigma\Omega} \quad \text{mit} \quad \text{b) } \tilde{A} = \det(A_{\Gamma\Sigma}). \quad (1.4.8)$$

Diese Formel ist nur auf reguläre Matrizen ( $\tilde{A} \neq 0$ ), nicht aber auf singuläre (entartete) Matrizen ( $\tilde{A} = 0$ ) anwendbar.

Die Spur einer Matrix ist die Summe der Hauptdiagonalelemente:

$$\text{spur}(A_{\Gamma\Sigma}) = \text{trace}(A_{\Gamma\Sigma}) = \sum_{\Gamma=1}^N A_{\Gamma\Gamma}. \quad (1.4.9)$$

Für die Spur einer Summe bzw. eines Produktes von Matrizen gilt

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{spur}(A_{\Gamma\Sigma} + B_{\Gamma\Sigma}) &= \text{spur}(A_{\Gamma\Sigma}) + \text{spur}(B_{\Gamma\Sigma}), \\ \text{b) } \text{spur}(AB) &= \text{spur} \left( \sum_{\Omega=1}^N A_{\Gamma\Omega} B_{\Omega\Sigma} \right) = \sum_{\Omega, \Gamma=1}^N A_{\Gamma\Omega} B_{\Omega\Gamma} = \text{spur}(BA). \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

In der Physik werden folgende an Matrizen ausgeübte Operationen gebraucht:

1. Transponierung (Vertauschung von Zeilenindex und Spaltenindex):

$$(A_{\Gamma\Sigma})^T = (A_{\Sigma\Gamma}). \quad (1.4.11)$$

2. Komplexe Konjugierung (Überführung der Matrixelemente in ihre komplex-konjugierten Werte):

$$(A_{\Gamma\Sigma})^* = (A_{\Gamma\Sigma}^*). \quad (1.4.12)$$

## 3. Hermitesche Konjugierung (Transponierung und komplexe Konjugierung):

$$\text{a) } A^+ = A^{T*} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } (A_{\Gamma\Sigma})^+ = (A_{\Sigma\Gamma}^*). \quad (1.4.13)$$

Für die Transponierung, hermitesche Konjugierung und Bildung des Inversen gelten die Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \text{a) } (AB)^T &= B^T A^T, \\ \text{b) } (AB)^+ &= B^+ A^+, \\ \text{c) } (AB)^{-1} &= B^{-1} A^{-1}. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Eine Matrix kann folgende inneren Eigenschaften haben:

Symmetrie:

$$\text{a) } A^T = A \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } A_{\Gamma\Sigma} = A_{\Sigma\Gamma}, \quad (1.4.15)$$

Antisymmetrie:

$$\text{a) } A^T = -A \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } A_{\Gamma\Sigma} = -A_{\Sigma\Gamma}, \quad (1.4.16)$$

Hermitezität:

$$\text{a) } A^+ = A \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } A_{\Gamma\Sigma}^* = A_{\Sigma\Gamma}, \quad (1.4.17)$$

Antihermitezität:

$$\text{a) } A^+ = -A \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } A_{\Gamma\Sigma}^* = -A_{\Sigma\Gamma}, \quad (1.4.18)$$

Orthogonalität:

$$\text{a) } A^T = A^{-1}, \quad \text{b) } \tilde{A}^2 = 1, \quad (1.4.19)$$

Unitarität:

$$\text{a) } A^+ = A^{-1}, \quad \text{b) } \tilde{A}^* \cdot \tilde{A} = 1. \quad (1.4.20)$$

Daraus erkennt man, daß eine reelle unitäre Matrix orthogonal ist.

Für die Determinanten unitärer Matrizen gilt wegen (1.4.20b)

$$\tilde{A} = e^{i\tilde{\Phi}} \quad (\tilde{\Phi} \text{ reell}). \quad (1.4.21)$$

Im Falle  $\tilde{A} = 1$ , d. h.  $\tilde{\Phi} = 0$ , nennen wir eine unitäre Matrix unimodular.

Jede beliebige Matrix ist eindeutig zerlegbar in die Summe aus einer symmetrischen und antisymmetrischen Matrix bzw. hermiteschen und antihermiteschen Matrix:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } A &= \frac{1}{2}(A + A^+) + \frac{1}{2}(A - A^+). \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

Ist  $A$  hermitesch und  $U$  unitär, so ist  $U^+AU$  hermitesch:

$$(U^+AU)^+ = U^+A^+U = U^+AU.$$

### 1.4.2 Direkte Summe und Kronecker-Produkt

Unter der direkten Summe der beiden Matrizen  $A$  und  $B$ , geschrieben in der Form

$$C = A \dot{+} B, \quad (1.4.23)$$

versteht man die Übermatrix der Gestalt

$$C = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right). \quad (1.4.24)$$

Für die direkte Summe gelten die Sätze ( $A, B, E, F$  geeignete Matrizen):

- a)  $(A \dot{+} B) + (E \dot{+} F) = (A + E) \dot{+} (B + F)$ ,
  - b)  $\lambda(A \dot{+} B) = \lambda A \dot{+} \lambda B$  ( $\lambda$  Zahlenfaktor),
  - c)  $(A \dot{+} B)(E \dot{+} F) = AE \dot{+} BF$ ,
  - d) Aus  $C = A \dot{+} B$  folgt  $\text{spur } C = \text{spur } A + \text{spur } B$ .
- (1.4.25)

Die direkte Summe wird durch das Symbol  $\Sigma^\bullet$  gekennzeichnet.

Ist  $A$  eine  $M$ -reihige und  $B$  eine  $N$ -reihige Matrix, so ist das Kronecker-Produkt  $A \times B$  dieser beiden Matrizen eine  $(MN)$ -reihige Matrix der Struktur

$$A \times B = \begin{pmatrix} A_{11}B \dots A_{1M}B \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ A_{M1}B \dots A_{MM}B \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} A_{11}B_{11} & \dots & A_{11}B_{1N} & A_{1M}B_{11} & \dots & A_{1M}B_{1N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{11}B_{N1} & \dots & A_{11}B_{NN} & A_{1M}B_{N1} & \dots & A_{1M}B_{NN} \\ \hline A_{M1}B_{11} & \dots & A_{M1}B_{1N} & A_{MM}B_{11} & \dots & A_{MM}B_{1N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{M1}B_{N1} & \dots & A_{M1}B_{NN} & A_{MM}B_{N1} & \dots & A_{MM}B_{NN} \end{array} \right). \quad (1.4.26)$$

Aus dieser Definition des Kronecker-Produktes resultieren folgende wichtige Sätze:

1. Das Kronecker-Produkt ist im allgemeinen nicht kommutativ:

$$A \times B \neq B \times A. \quad (1.4.27)$$

2. Für das Kronecker-Produkt gilt das assoziative Gesetz:

$$A \times (B \times E) = (A \times B) \times E = A \times B \times E. \quad (1.4.28)$$

3. Für das Kronecker-Produkt gilt das distributive Gesetz:

$$(A + B) \times E = A \times E + B \times E. \quad (1.4.29)$$



4. Das Kronecker-Produkt von Diagonalmatrizen ergibt wieder eine Diagonalmatrix.
5. Sind  $A$  und  $E$  zwei  $M$ -reihige und  $B$  und  $F$  zwei  $N$ -reihige Matrizen, so gilt die Rechenregel

$$(A \times B)(E \times F) = (AE) \times (BF). \quad (1.4.30)$$

6. Die Spur des Kronecker-Produktes ist gleich dem Produkt der Spuren der einzelnen Faktoren:

$$\text{spur}(A \times B) = \text{spur } A \cdot \text{spur } B. \quad (1.4.31)$$

7. Sind  $A$  und  $B$  unitäre Matrizen, so ist das Kronecker-Produkt auch wieder eine unitäre Matrix, d. h., aus  $A^+ = A^{-1}$ ,  $B^+ = B^{-1}$  folgt

$$(A \times B)^+ = (A \times B)^{-1}. \quad (1.4.32)$$

### 1.4.3 Unendliche Matrizen und Matrixfunktionen

In der Physik stößt man bei der Darstellung von Operatoren oft auf unendliche Matrizen, mit denen in der Regel wie mit endlichen Matrizen gearbeitet wird. Man sollte aber daran denken, daß Produkte unendlicher Matrizen nur dann definiert sind, wenn die Konvergenz der auftretenden Reihen gewährleistet ist, also im Sinne von (1.4.4)

$$C_{\Gamma\Sigma} = \sum_{\Omega=1}^{\infty} A_{\Gamma\Omega} B_{\Omega\Sigma} \quad (1.4.33)$$

existiert.

Auch unendliche Reihen von Matrizen treten in der Physik gelegentlich auf:

$$F(A) = \sum_{\Omega=-\infty}^{\infty} c_{\Omega} A^{\Omega} \quad (c_{\Omega} \text{ Entwicklungskoeffizienten}). \quad (1.4.34)$$

Man nennt eine solche Reihe konvergent, wenn die hinsichtlich jedes Matrixelements von  $F(A)$  entstehende unendliche Reihe konvergiert. In diesem Sinne versteht man z. B. in gewohnter Weise die folgenden Funktionen von Matrizen (Matrixfunktionen):

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{1}{\mathbb{I} - A} = \mathbb{I} + A + A^2 + \dots, \\ \text{b) } & \sin A = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \dots, \\ \text{c) } & \cos A = \mathbb{I} - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \dots, \\ \text{d) } & e^A = \mathbb{I} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.4.35)$$

Für die Matrix-Exponentialfunktion benötigt man oft eine Reihe von Formeln, die wir im folgenden auflisten wollen:

1. Es gelten die Relationen

$$\begin{aligned} (e^A)^T &= e^{A^T}, & (e^A)^* &= e^{A^*}, \\ (e^A)^+ &= e^{A^+}, & (e^A)^{-1} &= e^{-A}. \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

2. Es ist

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}. \quad (1.4.37)$$

3. Baker-Hausdorff-Theorem:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (1.4.38)$$

falls der Kommutator  $[A, B]$  eine Skalarmatrix (Produkt von komplexer Zahl und Einheitsmatrix) ist. Kommutieren  $A$  und  $B$ , so entsteht

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}. \quad (1.4.39)$$

4. Es gilt die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} e^{iB} A e^{-iB} &= A + i[B, A] + \frac{i^2}{2!} [B, [B, A]] \\ &+ \frac{i^3}{3!} [B, [B, [B, A]]] + \dots \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

5. Für die Determinante der Matrix-Exponentialfunktion ist

$$\det e^A = e^{\text{spur } A}. \quad (1.4.41)$$

#### 1.4.4 Transformation von Matrizen auf Diagonalforn, Eigenwertproblem, Hauptachsentransformation

In den verschiedensten Gebieten der Physik stößt man auf das Problem der Transformation von Matrizen auf Diagonalforn. Deshalb wollen wir hier die wichtigsten Fakten wiedergeben.

Wir gehen von einer  $N$ -reihigen quadratischen Matrix  $A$  und einer  $N$ -zeiligen Spaltenmatrix  $X$  aus, die mittels einer regulären Matrix  $C$  gemäß (1.2.6) und (1.2.7) wie folgt:

$$\text{a) } \check{A} = CAC^{-1}, \quad \text{b) } \check{X} = CX, \quad (1.4.42)$$

transformiert werden. Eine solche Transformation heißt bekanntlich Äquivalenztransformation (Ähnlichkeitstransformation). Die Matrizen  $A$  und  $\check{A}$  selbst nennt man äquivalent.

Unter dem zur Matrix  $A$  gehörigen Säkularpolynom (charakteristisches Polynom) versteht man die Determinante

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{I}) &= \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & \dots & A_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} - \lambda \end{vmatrix} & (1.4.43) \\ &= (-1)^N \lambda^N + (-1)^{N-1} \sum_{\Gamma=1}^N A_{\Gamma\Gamma} \lambda^{N-1} + \dots \\ &\quad - \sum_{\Gamma=1}^N M_{\Gamma\Gamma} \lambda + \tilde{A}, \end{aligned}$$

wobei  $\lambda$  ein freier Parameter und  $M_{\Gamma\Sigma}$  der durch den Entwicklungssatz von Determinanten (1.3.8) definierte, zu  $A_{\Gamma\Sigma}$  gehörige Minor ist. Aus der Invarianz

$$\det(\tilde{A} - \lambda \mathbb{I}) = \det(C(A - \lambda \mathbb{I})C^{-1}) = \det(A - \lambda \mathbb{I}) \quad (1.4.44)$$

folgt, daß die Koeffizienten des Säkularpolynoms Invarianten gegenüber der obigen Äquivalenztransformation sind. Häufig gebrauchte Invarianten in diesem Sinne sind die Determinante  $\tilde{A}$  und die beiden Spuren  $\sum_{\Gamma=1}^N A_{\Gamma\Gamma}$  und  $\sum_{\Gamma=1}^N M_{\Gamma\Gamma}$ .

Die Zerlegung des Säkularpolynoms in Linearfaktoren in der Form

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_N) \quad (1.4.45)$$

führt auf die Eigenwerte  $\lambda_\Gamma$  der Matrix  $A$ , die gerade die Nullstellen des Säkularpolynoms sind. Die Gesamtheit aller Eigenwerte, die auch mit bestimmten Vielfachheiten auftreten können, bezeichnet man als das Spektrum der Matrix  $A$ .

Die algebraische Gleichung  $N$ -ten Grades

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0, \quad (1.4.46)$$

aus der diese Nullstellen zu ermitteln sind, heißt die zur Matrix  $A$  gehörige Säkulargleichung (charakteristische Gleichung). Wegen der Invarianz des Säkularpolynoms bei Äquivalenztransformationen sind auch die Eigenwerte  $\lambda_\Gamma$  Invarianten bei Äquivalenztransformationen.

Auf die Säkulargleichung stößt man bei der Lösung der Eigenwertgleichung

$$\text{a) } AX = \lambda X \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } (A - \lambda \mathbb{I})X = 0, \quad (1.4.47)$$

wobei  $X$  eine Spaltenmatrix der Form

$$X = (X_\Sigma) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \quad (1.4.48)$$

ist. Ausgeschrieben stellt die Matrizengleichung (1.4.47b) ein lineares Gleichungssystem dar, das nur dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn die Systemdeterminante verschwindet, also

(1.4.46) gilt. Die zu einem Eigenwert  $\lambda_\Gamma$  gehörige Eigenlösung  $X_{(\Gamma)}$ , die mithin der Gleichung

$$(A - \lambda_\Gamma \mathbb{I})X_{(\Gamma)} = 0 \quad (1.4.49)$$

genügt, heißt Eigenvektor.

Den Ausdruck

$$R(\lambda) = \frac{1}{\det(A - \lambda \mathbb{I})} \quad (1.4.50)$$

bezeichnet man als Resolvente zu  $A$ . Für die Eigenwerte ( $\lambda = \lambda_\Gamma$ ) existiert wegen (1.4.46) die Resolvente nicht.

Für das Studium der gegenüber Äquivalenztransformationen invarianten Eigenschaften einer Matrix ist es zweckmäßig, diese Matrix durch eine Äquivalenztransformation auf eine möglichst einfache Form zu bringen. Die einfachste Form einer Matrix ist die Diagonalfom (Normalform). Gelingt es, die Diagonalfom durch eine Äquivalenztransformation zu erreichen, so kommen als die Diagonalelemente gerade die Eigenwerte zu stehen:

$$A^{(\text{diag})} = (\lambda_\Gamma \delta_{\Gamma\Sigma}) = CAC^{-1}. \quad (1.4.51)$$

Wegen der Invarianz der Determinante und der Spur einer Matrix bei Äquivalenztransformationen resultieren aus der letzten Gleichung die wichtigen Relationen

$$\begin{aligned} \text{a) } \tilde{A} &= \det A = \det A^{(\text{diag})} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_N, \\ \text{b) } \text{spur } A &= \text{spur } A^{(\text{diag})} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N. \end{aligned} \quad (1.4.52)$$

Aus der ersten Gleichung erkennt man, daß eine Matrix singular ( $\tilde{A} = 0$ ) wird, wenn ein Eigenwert null wird. Außerdem folgt daraus, daß der Rang gleich der Anzahl der nichtverschwindenden Eigenwerte ist.

Über die Transformierbarkeit einer Matrix auf Diagonalfom existiert folgender Satz:

Eine Matrix  $A$  läßt sich durch folgende beiden Äquivalenztransformationen auf Diagonalfom bringen:

*Fall A:* Alle Eigenwerte sind voneinander verschieden.

Die Transformationsmatrix baut sich in diesem Fall aus den zu den Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren auf, und zwar ist die  $\Gamma$ -te Spalte von  $C^{-1}$  bis auf einen freibleibenden Proportionalitätsfaktor gerade der Eigenvektor  $X_{(\Gamma)}$ .

*Fall B:* Es liegt eine symmetrische, hermitesche oder unitäre Matrix vor.

In diesen Fällen stellt das Eigenwert-Spektrum ein vollständiges Invariantensystem dar, d. h., es gibt keine weiteren Invarianten. Eine symmetrische Matrix wird durch eine orthogonale, eine hermitesche oder unitäre Matrix durch eine unitäre Transformationsmatrix auf Diagonalfom transformiert.

Über die Reellität der Eigenwerte gilt folgende Aussage: Die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix (damit auch einer reellen symmetrischen Matrix als Spezialfall) sind reell:

$\lambda_\Gamma^* = \lambda_\Gamma$ . Diese Feststellung zieht nach sich, daß die Eigenwerte einer antihermiteschen Matrix (damit auch einer reellen antisymmetrischen Matrix als Spezialfall) rein imaginär sind:  $\lambda_\Gamma^* = -\lambda_\Gamma$ .

Die zu verschiedenen Eigenwerten einer hermiteschen oder antihermiteschen Matrix (damit auch einer reellen symmetrischen oder reellen antisymmetrischen Matrix als Spezialfall) gehörigen Eigenvektoren sind zueinander orthogonal. Wegen der Linearität der Eigenwertgleichung lassen sich diese Eigenvektoren auf 1 normieren, so daß sie dann ein Orthonormalsystem bilden:

$$X_{(\Gamma)}^+ X_{(\Sigma)} = \delta_{\Gamma\Sigma}. \quad (1.4.53)$$

Weiter erwähnen wir, daß die Produkte  $AB$  und  $BA$  dieselben Eigenwerte und damit dasselbe Säkularpolynom besitzen:

$$\det(AB - \lambda\mathbb{I}) = \det(BA - \lambda\mathbb{I}). \quad (1.4.54)$$

Außerdem ist die durch vollständige Induktion zu gewinnende Erkenntnis nützlich, daß für Matrixpolynome  $P(A)$  die Eigenwerte durch  $P(\lambda_\Gamma)$  gegeben sind:

$$\det(P(A) - P(\lambda_\Gamma)\mathbb{I}) = 0. \quad (1.4.55)$$

Besitzt das Eigenwertproblem mehrfach auftretende Eigenwerte (mehrfache Wurzeln der Säkulargleichung (1.4.46), so nennt man es entartet. Insbesondere heißt ein Eigenwert  $\lambda_\Gamma$ , der  $\nu_\Gamma$ -fach auftritt,  $(\nu_\Gamma - 1)$ -fach entartet. Offensichtlich muß

$$\sum_{\Gamma} \nu_\Gamma = N \quad (1.4.56)$$

gelten, wobei über die Sätze von Eigenwerten summiert wird.

Die zu mehrfachen Eigenwerten  $\lambda_\Gamma$  gehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren  $X_{(\Gamma,\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, \nu_\Gamma$ ) sind im allgemeinen nicht unmittelbar zueinander orthogonal. Sie lassen sich aber orthonormieren. Man bildet zu diesem Zweck die Linearkombinationen

$$\bar{X}_{(\Gamma,\beta)} = \sum_{\alpha=1}^{\nu_\Gamma} c_{\Gamma,\beta\alpha} X_{(\Gamma,\alpha)} \quad (\beta = 1, 2, \dots, \nu_\Gamma) \quad (1.4.57)$$

und unterwirft diese der Orthonormalitätsbedingung (1.4.53). Zweckmäßigerweise bedient man sich dabei des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens, bei dem ein Dreieckschema aufgebaut wird.

Hinsichtlich der simultanen Transformierbarkeit mehrerer Matrizen auf Diagonalform gilt die Feststellung: Liegt ein Satz hermitescher oder unitärer quadratischer Matrizen derselben Ordnung vor, die alle paarweise miteinander kommutieren, so existiert eine unitäre Transformationsmatrix, die alle Matrizen des Satzes simultan auf Diagonalform transformiert.

### 1.4.5 Bilinearform, hermitesche Form und quadratische Form

Wir gehen von den beiden Spaltenmatrizen mit  $N$  Elementen

$$\text{a) } X = (X_\Gamma) \quad \text{und} \quad \text{b) } Y = (Y_\Gamma) \quad (1.4.58)$$

und einer quadratischen Matrix  $N$ -ter Ordnung  $A = (A_{\Gamma\Sigma})$  aus. Die Bildung

$$2F = Y^+ AX = \sum_{\Gamma, \Sigma=1}^N A_{\Gamma\Sigma} Y_{\Gamma}^* X_{\Sigma}, \quad (1.4.59)$$

die eine Funktion der  $2N$  Variablen  $X_{\Gamma}$  und  $Y_{\Gamma}^*$  darstellt, heißt Bilinearform. Die Mitnahme des Faktors 2 erweist sich später bei der Gradientenbildung als zweckmäßig.

Daraus resultiert für den Spezialfall  $Y = X$  im Falle einer hermiteschen Matrix  $A = A^+$  die hermitesche Form

$$2F = X^+ AX = \sum_{\Gamma, \Sigma=1}^N A_{\Gamma\Sigma} X_{\Gamma}^* X_{\Sigma}. \quad (1.4.60)$$

Durch komplexe Konjugation ergibt sich deren Reellität:

$$F^* = F. \quad (1.4.61)$$

Ist  $U$  die unitäre Transformationsmatrix, welche  $A$  auf Diagonalfom bringt, gilt also

$$UAU^+ = A^{(\text{diag})}, \quad (1.4.62)$$

so resultiert bei Verwendung der Symbolik

$$\check{X} = UX \quad (1.4.63)$$

für die hermitesche Form die Diagonalfom:

$$2F = \check{X}^+ A^{(\text{diag})} \check{X} = \sum_{\Gamma=1}^N \lambda_{\Gamma} \check{X}_{\Gamma}^* \check{X}_{\Gamma}, \quad (1.4.64)$$

in der als die neuen Koeffizienten gerade die Eigenwerte der Matrix auftreten.

Damit zwei hermitesche Formen durch eine unitäre Transformation ineinander übergeführt werden können, ist notwendig und hinreichend, daß die zugehörigen Matrizen dieselben Eigenwerte besitzen. Im Spezialfall einer reellen symmetrischen Matrix und reeller Spaltenmatrizen geht die hermitesche Form (1.4.60) bzw. (1.4.64) in die quadratische Form

$$2F = X^T AX = \sum_{\Gamma, \Sigma=1}^N A_{\Gamma\Sigma} X_{\Gamma} X_{\Sigma} = \sum_{\Gamma=1}^N \lambda_{\Gamma} (\check{X}_{\Gamma})^2 \quad (1.4.65)$$

über, wobei die unitäre Transformationsmatrix zu einer reellen orthogonalen Transformationsmatrix wird, so daß die Transformation als Drehung des Koordinatensystems zu interpretieren ist:

$$\begin{aligned} \text{a) } \check{X} &= \Omega X \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } \check{X}_{\Gamma} &= \Omega_{\Gamma\Sigma} X_{\Sigma} \quad (\Omega^T = \Omega^{-1}), \end{aligned} \quad (1.4.66)$$

wenn man von den beiden Vorzeichen für die Transformationsdeterminante gemäß (1.4.19b) bei Gewährleistung des kontinuierlichen Übergangs aus der identischen Transformation die folgende Vorzeichenwahl trifft:

$$\det \Omega = 1. \quad (1.4.67)$$

Setzt man  $F = \text{const}$ , so beschreibt die Gleichung (1.4.65) eine Fläche 2. Grades (Ellipsoid, Hyperboloid). Die ausgeführte Transformation bringt also die Fläche 2. Grades auf Hauptachsenform (Verschwinden der gemischten Glieder). Deshalb spricht man von einer Hauptachsentransformation der quadratischen Form.

Die Signatur  $S$  einer hermiteschen Form ist die Differenz aus der Anzahl  $P$  der positiven Eigenwerte und der Anzahl  $N$  der negativen Eigenwerte:

$$S = P - N. \quad (1.4.68)$$

Hinsichtlich der Definitheitseigenschaften einer hermiteschen Form (1.4.60) bzw. (1.4.64) klassifiziert man:

$$\begin{aligned} 2F > 0 & \text{ positiv-definit,} \\ 2F < 0 & \text{ negativ-definit,} \\ 2F = 0 & \text{ semidefinit,} \\ 2F \leq 0 & \text{ indefinit.} \end{aligned} \quad (1.4.69)$$

Im Falle positiver (negativer) Definitheit sind also alle  $N$  Eigenwerte positiv (negativ). Sind gewisse Eigenwerte positiv und gewisse negativ, so liegt Indefinitheit vor. Ist der Rang  $R < N$  und haben die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R$  gleiches Vorzeichen, so haben wir es mit Semidefinitheit zu tun.

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die quadratische Form (1.4.65) positiv-definit ist, sind die Ungleichungen

$$A_{\Gamma\Gamma} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_{\Gamma\Gamma} & A_{\Gamma\Sigma} \\ A_{\Sigma\Gamma} & A_{\Sigma\Sigma} \end{vmatrix} > 0, \dots, \tilde{A} = \det A > 0. \quad (1.4.70)$$

Diese Ungleichungen kann man sich leicht klarmachen, da man durch Nullsetzen von Variablen  $X_\Gamma$  die betrachtete quadratische Form in quadratische Formen geringerer Dimensionzahl überführen kann, die gleichfalls positiv-definit sein müssen. Aufgrund der Erkenntnis (1.4.52a) werden dann wegen des positiven Wertes der Eigenwerte dieser entstehenden quadratischen Formen alle zugehörigen Determinanten positiv. Im Falle der Semidefinitheit steht in (1.4.70) statt des Größerzeichens das Gleichheitszeichen.

Im Spezialfall  $N = 2$  ist die Situation hinsichtlich der Definitheitseigenschaften einer quadratischen Form besonders übersichtlich:

Wenn für die Determinante (Diskriminante)  $\tilde{A} = \det A$  gilt:

$$\tilde{A} = \lambda_1 \lambda_2 = A_{11} A_{22} - (A_{12})^2 \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ (definit Fall)} \\ = 0 \text{ (semidefinit Fall)} \\ < 0 \text{ (indefinit Fall)} \end{array} \right\}, \quad (1.4.71)$$

$$\text{dann ist } \left\{ \begin{array}{l} 2F > 0 \text{ oder } < 0, \\ 2F \geq 0 \text{ oder } \leq 0, \\ 2F \leq 0. \end{array} \right.$$

Wir kommen darauf in Formel (1.7.14) noch einmal zurück.

## 1.4.6 Infinitesimale Matrizen Transformationen

Im Abschnitt 1.4.4 haben wir die Äquivalenztransformation (1.4.42a) einer Matrix kennengelernt. Insbesondere interessieren in der Physik auch solche Äquivalenztransformationen, die durch eine infinitesimale Abänderung der identischen Transformation gegeben sind:

$$\text{a) } C = \mathbb{I} + \alpha \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } C_{\Gamma\Sigma} = \delta_{\Gamma\Sigma} + \alpha_{\Gamma\Sigma}. \quad (1.4.72)$$

Dabei ist  $\alpha$  eine infinitesimale Matrix. Im Sinne der Infinitesimalität werden bei Produktbildungen nur Größen 1. Ordnung mitgenommen, so daß statt (1.4.42a) wegen

$$\text{a) } C^{-1} = \mathbb{I} - \alpha \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } (C^{-1})_{\Gamma\Sigma} = \delta_{\Gamma\Sigma} - \alpha_{\Gamma\Sigma} \quad (1.4.73)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \text{a) } \check{A} &= A + \alpha A - A\alpha = A + [\alpha, A], \\ \text{b) } \check{X} &= X + \alpha X \end{aligned} \quad (1.4.74)$$

zu stehen kommt, wobei der Klammerausdruck der Kommutator ist. Ist die Transformation unitär ( $C \rightarrow U$ ), so folgt aus (1.4.20) die Bedingung

$$\text{a) } \alpha^\dagger = -\alpha \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } \alpha_{\Gamma\Sigma}^* = -\alpha_{\Sigma\Gamma}. \quad (1.4.75)$$

Im weiteren Spezialfall einer orthogonalen Transformation ( $U \rightarrow \Omega$ ) geht dann daraus wegen (1.4.19a)

$$\text{a) } \alpha^T = -\alpha \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } \alpha_{\Gamma\Sigma} = -\alpha_{\Sigma\Gamma} \quad (1.4.76)$$

hervor.

## 1.5 Algebraische Gleichungen

### 1.5.1 Lineare algebraische Gleichungen

Wir gehen von dem aus  $N$  Gleichungen bestehenden inhomogenen linearen algebraischen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{a) } AX &= B \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } \sum_{A=1}^N A_{\Gamma A} X_A &= B_\Gamma \quad (1. \text{ Normalform}) \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

aus, wobei  $A = (A_{\Gamma\Sigma})$  eine quadratische Matrix  $N$ -ter Ordnung und  $X$  und  $B$  zugehörige Spaltenmatrizen seien:

$$X = (X_\Gamma) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}, \quad B = (B_\Gamma) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}. \quad (1.5.2)$$



Vorgegeben ist dabei die Matrix  $A$  und die Inhomogenität  $B$ . Gesucht ist  $X$ , d. h., man hat die  $N$  Unbekannten  $X_\Gamma$  zu ermitteln.

Der Übergang vom inhomogenen Gleichungssystem (1.5.1) zum zugeordneten homogenen Gleichungssystem entspricht dem Nullsetzen der Inhomogenität ( $B = 0$ ):

$$\begin{aligned} \text{a) } AX^{(h)} &= 0 \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } \sum_{\Lambda=1}^N A_{\Gamma\Lambda} X_\Lambda^{(h)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ist die Summe aus der allgemeinen Lösung des homogenen Gleichungssystems und einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.

Liegen bei einem Gleichungssystem mehr Gleichungen als Unbekannte vor, so heißt es überbestimmt. Ist die Zahl der Gleichungen kleiner als die Zahl der Unbekannten, so heißt es unterbestimmt (diophantisch).

*Fall  $R = N$ :*

Hier stimmen Rang und Ordnung der Matrix überein, d. h., der Defekt verschwindet ( $D = 0$ ). Es liegt also eine reguläre Matrix  $A$  ( $\tilde{A} \neq 0$ ) vor, so daß die Inverse  $A^{-1}$  existiert. Verschwindender Defekt bedeutet, daß zwischen den einzelnen Gleichungen (1.5.3) keine lineare Abhängigkeit besteht.

Die Auflösung des inhomogenen Gleichungssystems (1.5.1) nach  $X$  lautet dann:

$$\text{a) } X = A^{-1}B \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } X_\Lambda = \sum_{\Gamma=1}^N (A^{-1})_{\Lambda\Gamma} B_\Gamma. \quad (1.5.4)$$

In diesem Fall ist also die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems gleichbedeutend mit der Ermittlung der Inversen. Mittels (1.4.8) läßt sich die letzte Gleichung auch als

$$\text{a) } X_\Lambda = \frac{\Delta_\Lambda}{\tilde{A}} \quad \text{mit} \quad \text{b) } \Delta_\Lambda = \sum_{\Gamma=1}^N M_{\Gamma\Lambda} B_\Gamma \quad (1.5.5)$$

schreiben. Diese Auflösungsformel entspricht der Cramerschen Regel, wobei die Größen  $\Delta_\Lambda$  dadurch gewonnen werden können, daß man in  $\tilde{A}$  die Elemente der  $\Lambda$ -ten Spalte durch die Elemente von  $B$  ersetzt.

Aus der letzten Gleichung erkennt man, daß wegen  $B_\Gamma = 0$  das homogene Gleichungssystem (1.5.3) nur die trivialen Lösungen  $X_\Lambda^{(h)} = 0$  haben kann.

*Fall  $R < N$ :*

Hier haben wir es mit einer singulären Matrix  $A$  ( $\tilde{A} = 0$ ) zu tun, so daß keine Inverse  $A^{-1}$  existiert. Es bestehen wegen des nichtverschwindenden Defekts  $D$  lineare Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Gleichungen von (1.5.3).

Aus (1.5.5) erkennen wir, daß das inhomogene Gleichungssystem höchstens dann nicht-triviale Lösungen für  $X_\Lambda$  besitzt, wenn die folgende Nebenbedingung erfüllt ist:

$$\sum_{\Gamma=1}^N M_{\Gamma\Lambda} B_\Lambda = 0. \quad (1.5.6)$$

Das homogene Gleichungssystem (1.5.3) kann wegen  $B_\Gamma = 0$  entsprechend (1.5.5) nur dann nichttriviale Lösungen ( $X_A^{(h)} \neq 0$ ) aufweisen, wenn die Systemdeterminante verschwindet:

$$\tilde{A} = 0. \quad (1.5.7)$$

Es existieren in diesem Fall gerade  $D$  linear unabhängige Lösungen  $\xi_{(\Gamma)}$  ( $\Gamma = 1, 2, \dots, D$ ). Da die Linearkombination mit beliebigen Koeffizienten  $c_\Gamma$  wieder Lösung ist, schreibt sich die allgemeine Lösung in der Matrizenform

$$X^{(h)} = \sum_{\Gamma=1}^D c_\Gamma \xi_{(\Gamma)}. \quad (1.5.8)$$

Im Falle  $D = 1$  lassen sich die Elemente der Lösung  $\xi_{(1)}$  durch die Elemente der Minoren ausdrücken:

$$\xi_{(1)A} = \mu M_{\Sigma A} \quad (\mu \text{ freier Faktor, } \Sigma \text{ beliebig}). \quad (1.5.9)$$

Durch die Ersetzung

$$A = H - \lambda \mathbb{I} \quad (1.5.10)$$

geht das inhomogene Gleichungssystem (1.5.1) über in ( $\lambda_\Gamma$  Eigenwerte)

$$\begin{aligned} \text{a) } & (H - \lambda_\Gamma \mathbb{I})X = B \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } & \sum_{\Lambda=1}^N (H_{\Gamma\Lambda} - \lambda_\Gamma \delta_{\Gamma\Lambda})X_\Lambda = B_\Gamma \quad (2. \text{ Normalform}). \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

Es ist gelegentlich nützlich, die Lösung  $X$  dieses inhomogenen Gleichungssystems als Reihenentwicklung nach den orthonormierten Eigenlösungen  $Y_{(\Gamma)}$  der Eigenwertgleichung

$$(H - \lambda_\Gamma \mathbb{I})Y_{(\Gamma)} = 0 \quad (1.5.12)$$

zu besitzen. Setzt man die Hermitezität  $H^+ = H$  voraus, so ist die Reellität der Eigenwerte und die Orthonormalität

$$Y_{(\Gamma)}^* Y_{(\Sigma)} = \delta_{\Gamma\Sigma} \quad (1.5.13)$$

gesichert. Man entwickelt nun  $X$  und  $B$  nach den Eigenlösungen  $Y_{(\Gamma)}$  und erhält die Darstellung

$$X = \sum_{\Gamma=1}^N \frac{1}{\lambda_\Gamma - \lambda} \left( Y_{(\Gamma)}^+ B \right) Y_{(\Gamma)}. \quad (1.5.14)$$

## 1.5.2 Nichtlineare algebraische Gleichungen

Die Normalform einer algebraischen Gleichung  $N$ -ten Grades lautet:

$$z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N = 0 \quad (1.5.15)$$

( $a_\Gamma$  konstante Koeffizienten).

Die linke Seite läßt sich als folgende Produktzerlegung

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N) = 0 \quad (1.5.16)$$

(Fundamentalsatz der Algebra)

schreiben, wobei die  $z_\Gamma$  die  $N$  Wurzeln der algebraischen Gleichung (1.5.15) sind.

H. ABEL (1802–1829) konnte beweisen, daß die allgemeine algebraische Gleichung 5. Grades und damit auch die allgemeinen Gleichungen höheren Grades nicht durch Radikale auflösbar sind. É. GALOIS (1811–1832) ist der auf gruppentheoretischen Methoden basierende Einblick zu verdanken, welche speziellen Gleichungen beliebigen Grades durch Radikale lösbar sind.

Die quadratische Gleichung in Normalform

$$z^2 + pz + q = 0 \quad (1.5.17)$$

besitzt die beiden Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (1.5.18)$$

Man nennt den unter der Wurzel stehenden Ausdruck

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad (1.5.19)$$

die Diskriminante der Normalform.

Die Normalform der kubischen Gleichung lautet ( $r, s, t$  reell):

$$z^3 + rz^2 + sz + t = 0. \quad (1.5.20)$$

Eine der 3 Wurzeln muß reell sein. Für das Produkt aus allen drei Wurzeln gilt gemäß dem Satz von Vieta:

$$z_1 z_2 z_3 = -t. \quad (1.5.21)$$

Durch die Substitution

$$z = \zeta - \frac{r}{3} \quad (1.5.22)$$

gewinnt man die reduzierte Form

$$\zeta^3 + \mu\zeta + \nu = 0 \quad (1.5.23)$$

der kubischen Gleichung, wobei

$$\text{a) } \mu = s - \frac{r^2}{3}, \quad \text{b) } \nu = \frac{2r^3}{27} - \frac{sr}{3} + t \quad (1.5.24)$$

ist.

$$\text{Fall } \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^3 \geq 0:$$

Die Cardanischen Formeln für die Lösung lauten:

$$\text{a) } \zeta_1 = u + v, \quad \text{b) } \zeta_{2,3} = -\frac{1}{2}(u + v) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(u - v), \quad (1.5.25)$$

wobei

$$\begin{aligned} \text{a) } u &= \sqrt[3]{-\frac{\nu}{2} + \sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^3}}, \\ \text{b) } v &= \sqrt[3]{-\frac{\nu}{2} - \sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^3}} \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

gilt.

Liegt in diesem Fall das Ungleichheitszeichen ( $>$ ) vor, dann bekommt man eine reelle und zwei komplexe Wurzeln, die beim Übergang zum Gleichheitszeichen zu einer reellen Doppelwurzel werden, so daß drei reelle Wurzeln entstehen.

$$\text{Fall } \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^3 < 0 \quad (\text{„casus irreducibilis“}):$$

In diesem Fall ( $\mu, \nu$  reell mit  $\mu < 0$ ) existieren in trigonometrischer Darstellung die drei reellen Wurzeln:

$$\begin{aligned} \text{a) } \zeta_1 &= 2\varrho \cos \frac{\varphi}{3}, \\ \text{b) } \zeta_2 &= 2\varrho \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \\ \text{c) } \zeta_3 &= 2\varrho \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (1.5.27)$$

mit

$$\text{a) } \varrho = \sqrt[3]{-\frac{\mu}{3}}, \quad \text{b) } \cos \varphi = -\frac{\nu}{2\varrho^3}. \quad (1.5.28)$$

Die formelmäßig algebraische Auflösung der allgemeinen Gleichung 3. Grades gelang zuerst S. DEL FERRO (etwa 1465–1526), der sie aber nicht publizierte. Unabhängig davon fand sie auch N. TARTAGLIA (etwa 1500–1557), der sie G. CARDANO (1501–1576) anvertraute. Letzterer publizierte sie. Der Name „casus irreducibilis“ rührt daher, daß zur Zeit der Auffindung

der Cardanischen Formeln das Rechnen im Komplexen noch nicht entwickelt war, so daß dieser „irreduzible Fall“ erst später mathematisch zugänglich wurde.

Bei der Lösung der algebraischen Gleichung 4. Grades benutzt man die Resultate, welche bei der Lösung der Gleichung 3. Grades gewonnen wurden. Wir verzichten auf die Wiedergabe der komplizierten Endformeln, sondern verweisen lediglich auf den Spezialfall der biquadratischen Gleichung

$$z^4 + Pz^2 + Q = 0 \quad (1.5.29)$$

die sofort durch die Substitution  $Z = z^2$  in eine quadratische Gleichung überführbar ist.

## 1.6 Vektoralgebra

### 1.6.1 Einführung

Etwa gleichzeitig und unabhängig voneinander haben H. GRASSMANN (1809–1877) und W. R. HAMILTON (1805–1865) die Vektorrechnung entwickelt, die inzwischen zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel in der Theoretischen Physik geworden ist.

In der Mathematik wird der Begriff des Vektors bzw. Vektorraumes meist sehr abstrakt gefaßt. Der Vektorraum wird als eine Menge von Elementen eingeführt, die einer gewissen Algebra genügen. Selbst die gesamte lineare Algebra wird gelegentlich als Theorie  $n$ -dimensionaler Vektorräume angesehen.

In der Theoretischen Physik benötigen wir zur besseren Verständlichmachung physikalischer Zusammenhänge eine mehr anschauliche Fassung des Vektorbegriffes, die natürlich zur mathematischen Konzeption nicht im Widerspruch stehen darf, sondern vielmehr durch die Bezugnahme auf den 3-dimensionalen physikalischen Raum oder die 4-dimensionale Raum-Zeit das physikalisch Wesentliche in den Vordergrund stellen soll.

Bekanntlich sind Skalare solche Größen, die allein durch die Angabe eines Zahlenwertes (etwa auf einer Skala) bestimmt sind. Dagegen sind Vektoren Größen, zu deren vollständigen Erfassung man neben einem Zahlenwert, nämlich dem Betrag (Länge des Vektors, falls eine geometrische Veranschaulichung möglich ist), noch die Richtung dieser Größe angeben muß.

### 1.6.2 $n$ -dimensionaler Raum

Um die in der Physik vorwiegend vorkommenden Fälle  $n = 2$  (2-dimensionale Fläche),  $n = 3$  (3-dimensionaler Raum) und  $n = 4$  (4-dimensionale Raum-Zeit) zu überdecken, stellen wir zuerst die allgemein-gültigen Fakten zusammen.

Wir legen zunächst einen  $n$ -dimensionalen Raum zugrunde. Zur Festlegung eines Punktes in diesem Raum benutzen wir die unabhängigen Koordinaten  $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ , die im allgemeinen krummlinig sind. Die Verwendung oberer Indizes ist dabei sehr zweckmäßig. Es mögen in diesem Abschnitt ausnahmsweise kleine lateinische Indizes die  $n$  Dimensionen des Raumes durchlaufen.

Ein Vektor (Vektorfeld), hier durch ein halbfettes Symbol  $\mathbf{a}(x^i)$  gekennzeichnet, ist ein vom Raumpunkt abhängiges geometrisches Objekt mit bestimmten Transformationseigen-

schaften bei Koordinatentransformationen, das für einen festen Raumpunkt folgenden algebraischen Linearitätsaxiomen genügt:

1. Kommutativität für die Addition:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}; \quad (1.6.1)$$

2. Assoziativität für die Addition:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}); \quad (1.6.2)$$

3. Kommutativität bei Multiplikation mit einer komplexen Zahl  $z$ :

$$\mathbf{a}z = z\mathbf{a}; \quad (1.6.3)$$

4. Distributivität bei Multiplikation mit einer komplexen Zahl  $z$ :

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})z = \mathbf{a}z + \mathbf{b}z. \quad (1.6.4)$$

Der betrachtete  $n$ -dimensionale Raum läßt sich durch die  $n$  linear unabhängigen kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  (mit unterem Index), die ein Basisvektorsystem (Basis,  $n$ -Bein) bilden, aufspannen. Die Zerlegung eines Vektors  $\mathbf{a}$  nach den Richtungen der Basisvektoren lautet:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i a^i = \mathbf{e}_i a^i. \quad (1.6.5)$$

(Wir gehen jetzt hier und im folgenden zur Einsteinschen Summenkonvention über, d. h., bei doppelt auftretenden unteren und oberen Indizes wird das Summenzeichen einfach weggelassen.) Die skalaren Größen  $a^i$  heißen die kontravarianten Komponenten des Vektors  $\mathbf{a}$ .

Die multiplikative Verknüpfung zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , geschrieben als  $\mathbf{a}\mathbf{b}$ , soll einen Skalar ergeben. Sie wird deshalb Skalarprodukt (inneres Produkt) genannt. Für das Skalarprodukt sollen die Axiome:

1. Kommutativität:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}; \quad (1.6.6)$$

2. Distributivität:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{c} \quad (1.6.7)$$

gelten.

Die Skalarprodukte der Basisvektoren bezeichnen wir wie folgt:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g_{ij} = g_{ji}. \quad (1.6.8)$$

Die in den Indizes  $i$  und  $j$  symmetrischen Größen  $g_{ij}$  heißen die kovarianten Komponenten des metrischen Tensors.

Mittels der Linearkombination

$$\mathbf{e}^k = g^{ki} \mathbf{e}_i \quad (1.6.9)$$

werden die kontravarianten Basisvektoren (mit oberem Index) eingeführt, die das kontravariante (duale, reziproke) Basisvektorsystem bilden. Die dabei auftretenden und noch näher zu bestimmenden Koeffizienten  $g^{ki}$  nennt man die kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors.

Die Skalarprodukte zwischen den kovarianten und den kontravarianten Basisvektoren normiert man gemäß

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}^k = \delta_i^k = g_i^k, \quad (1.6.10)$$

wobei  $\delta_i^k$  das Kronecker-Symbol ist, für das in diesem Zusammenhang aus Einheitlichkeitsgründen gern  $g_i^k$  geschrieben wird. Man nennt diese Beziehung Orthonormalitätsrelation für die Basisvektoren.

Multipliziert man (1.6.9) mit  $\mathbf{e}^j$  durch, so zeigt sich, daß die kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors gerade die aus den kontravarianten Basisvektoren gebildeten Skalarprodukte sind, woraus sich die Symmetrie in den Indizes  $j$  und  $k$  ergibt:

$$g^{jk} = g^{kj} = \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k. \quad (1.6.11)$$

Multipliziert man (1.6.9) mit  $\mathbf{e}_j$  durch, so resultiert die Orthonormalitätsrelation

$$g_{ij} g^{ik} = g_{ji} g^{ki} = g_j^k \quad (1.6.12)$$

zwischen den kovarianten und kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors.

Einer kurzen Sprechweise halber nennt man oft die Komponenten  $g_{ij}$  oder  $g^{ij}$  des metrischen Tensors selbst metrischen Tensor.

Während gemäß (1.6.5) der Vektor  $\mathbf{a}$  im kovarianten Basisvektorsystem aufgespannt ist, wird er gemäß

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}^k a_k \quad (1.6.13)$$

im kontravarianten Basisvektorsystem aufgespannt. Es gelten die folgenden Zusammenhänge zwischen den kovarianten und kontravarianten Vektorkomponenten:

$$\text{a) } a_k = g_{ki} a^i, \quad \text{b) } a^i = g^{ik} a_k. \quad (1.6.14)$$

Das sind wichtige Regeln für die Bewegung der Indizes mittels des metrischen Tensors. Insbesondere werden nach diesen Regeln aus den kontravarianten Koordinatendifferentialen  $dx^i$  die kovarianten Koordinatendifferentiale

$$dx_k = g_{ki} dx^i \quad (1.6.15)$$

gebildet.

Der Betrag eines Vektors  $\mathbf{a}$  ist durch

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{|a_i a^i|} \geq 0 \quad (1.6.16)$$

gegeben.

Vermöge der Darstellungen (1.6.5) und (1.6.13) läßt sich das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a} = e_i a^i$  und  $\mathbf{b} = e_i b^i$  wie folgt schreiben:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = a_i b^i = g_{ij} a^i b^j = g^{ij} a_i b_j . \quad (1.6.17)$$

Daraus wird der Winkel  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  zwischen diesen beiden Vektoren gemäß

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (1.6.18)$$

definiert. Aus dieser Formel wird geometrisch klar, daß das Skalarprodukt eines Vektors mit einem Einheitsvektor die Projektion des Vektors auf die Richtung des Einheitsvektors angibt.

Die Dreiecksungleichung für zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  lautet:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| . \quad (1.6.19)$$

Schließlich erwähnen wir noch das dyadische Produkt zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , symbolisiert durch  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ . Es handelt sich dabei um eine abstrakte Größe, die weder Skalar noch Vektor ist, sondern einen speziellen Tensor 2. Stufe (Produkt der Komponenten zweier Vektoren) darstellt.

Es möge gelten:

1. Assoziativität bei Multiplikation mit einer komplexen Zahl  $z$ :

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})z = \mathbf{a} \circ \mathbf{b}z, \quad z(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = z\mathbf{a} \circ \mathbf{b}; \quad (1.6.20)$$

2. Kommutativität bei Multiplikation mit einer komplexen Zahl  $z$ :

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})z = z(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}); \quad (1.6.21)$$

3. Distributivität:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{a} \circ \mathbf{c} + \mathbf{b} \circ \mathbf{c} . \quad (1.6.22)$$

Man beachte, daß das dyadische Produkt nicht kommutativ ist.

Das Produkt des dyadischen Produkts mit einem Vektor soll einen Vektor gemäß

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}) \quad (\text{Richtung von } \mathbf{a}, \text{ Betrag } |\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c})|) \quad (1.6.23)$$

bzw.

$$\mathbf{c}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{c}\mathbf{a})\mathbf{b} \quad (\text{Richtung von } \mathbf{b}, \text{ Betrag } |\mathbf{b}(\mathbf{c}\mathbf{a})|) \quad (1.6.24)$$

ergeben.

In der Geometrie spielt der Bogendifferentialvektor (Linielementvektor) einer vorgegebenen Raumkurve  $x^i = x^i(\lambda)$  ( $\lambda$  Kurvenparameter) eine große Rolle. Das ist bei der im folgenden stets gewählten natürlichen Anpassung der Basis an die Koordinatenlinien der Ausdruck

$$d\mathbf{s} = e_i dx^i . \quad (1.6.25)$$



Durch Quadrieren resultiert daraus

$$(ds)^2 = (ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j . \quad (1.6.26)$$

Dabei beschreibt  $ds$  den Abstand infinitesimal benachbarter Punkte auf der Raumkurve. Diese Größe heißt Bogendifferential (Linielement).

Die bisherigen Ausführungen über den  $n$ -dimensionalen Raum waren an keine besonderen Einschränkungen gebunden. Spezialisiert man sich nun auf einen Euklidischen Raum (Raum ohne Krümmung und Torsion), so braucht man keine krummlinigen Koordinaten, sondern kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit geradlinige Koordinaten zugrunde legen. Krummlinige Koordinaten sind aber in einem Riemannschen Raum (Raum mit Krümmung, aber ohne Torsion) unumgänglich.

Ist die Metrik definit, so heißt die Geometrie im Euklidischen Raum bzw. Riemannschen Raum Euklidische Geometrie bzw. Riemannsche Geometrie.

Von einer pseudo-Euklidischen Geometrie bzw. pseudo-Riemannschen Geometrie spricht man, wenn ein Euklidischer Raum bzw. Riemannscher Raum vorliegt, aber die Metrik indefinit ist.

Die Benutzung geradliniger Koordinaten, für die wir mit Rücksicht auf die Spezielle Relativitätstheorie Schiefwinkligkeit zulassen müssen, da wir eine künstlich eingeführte rein imaginäre Zeitkoordinate vermeiden wollen, bedeutet, daß die Basisvektoren  $e_i$  und  $e^i$  sowie die metrischen Tensoren  $g_{ij}$  und  $g^{ij}$  konstante Größen werden. Dadurch erreichen wir eine große Vereinfachung des mathematischen Apparates, da wir dann auf den allgemeinen Kovarianzkalkül verzichten können.

Im 3-dimensionalen Raum wählen wir, wenn wir nicht absichtlich wegen der physikalischen Problemstellung krummlinige Koordinaten verwenden müssen, geradlinig-rechtwinklige (kartesische) Koordinaten, wodurch die Unterscheidung zwischen kovarianten und kontravarianten Größen überflüssig, also eine noch weitere Vereinfachung des mathematischen Apparates erreicht wird.

### 1.6.3 3-dimensionaler Euklidischer Raum

Die 4-dimensionale Raum-Zeit bildet für die Spezielle Relativitätstheorie die fundamentale Basis. Hier wollen wir den für die Physik sehr wichtigen Formelapparat für den 3-dimensionalen Euklidischen Raum zusammenstellen.

Zunächst knüpfen wir an die Aufspannung (1.6.5) eines Vektors in einer allgemeinen Basis, also bei Benutzung allgemeiner Koordinaten, an:

$$\mathbf{a} = e_\mu a^\mu , \quad (1.6.27)$$

wobei wir an unsere Summenkonvention erinnern, daß nämlich kleine griechische Indizes von 1 bis 3 laufen.

In der Praxis wird es nun so sein, daß im Dreidimensionalen in der Regel orthogonale krummlinige und im besonderen kartesische (geradlinig-rechtwinklige) Koordinaten benutzt werden. Deshalb setzen wir für das Folgende Orthogonalität der Basis voraus. Dann verein-

facht sich der mathematische Apparat beträchtlich, denn es gilt (keine Summation)

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{e}^\mu &= g^{\mu\mu} \mathbf{e}_\mu, & \text{b) } g_{\mu\nu} &= g_{\mu\mu} \delta_{\mu\nu}, \\ \text{c) } g^{\mu\nu} &= g^{\mu\mu} \delta_{\mu\nu}, & \text{d) } g^{\mu\mu} &= \frac{1}{g_{\mu\mu}} \end{aligned} \quad (1.6.28)$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{a) } a_\mu &= g_{\mu\mu} a^\mu, \\ \text{b) } \mathbf{a}\mathbf{b} &= \sum_{\mu=1}^3 g_{\mu\mu} a^\mu b^\mu, \\ \text{c) } (ds)^2 &= \sum_{\mu=1}^3 g_{\mu\mu} (dx^\mu)^2. \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

Im folgenden wollen wir uns jetzt noch klar machen, warum man selbst bei Spezialisierung auf geradlinig-schiefwinklige Koordinaten, wie es in der Speziellen Relativitätstheorie der Fall ist, kovariante und kontravariante Größen braucht. Der Grund liegt einfach in der Schiefwinkligkeit der Basisvektorsysteme  $\{\mathbf{e}_i\}$  bzw.  $\{\mathbf{e}^i\}$ , woraus die Schiefwinkligkeit der zugeordneten Koordinatensysteme folgt. Es zeigt sich nämlich, daß die Parallelprojektion eines Vektors auf die kovariante Basis zu den kontravarianten Komponenten und die Senkrechtprojektion auf die kontravariante Basis zu den kovarianten Komponenten führt.

Im 3-dimensionalen Euklidischen Raum fallen bei Benutzung kartesischer Koordinaten Parallelprojektion und Senkrechtprojektion zusammen.

In Abb. 1.1 haben wir die Situation um die kovarianten und kontravarianten Größen 2-dimensional veranschaulicht, wobei wir die Zuordnungen ( $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  geradlinig-schiefwinklige Koordinaten)

$$\text{a) } \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y, \quad \text{b) } \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^x, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^y \quad (1.6.30)$$

trafen und gemäß (1.6.10) die Orthogonalitäten

$$\mathbf{e}_x \mathbf{e}^y = 0, \quad \mathbf{e}_y \mathbf{e}^x = 0 \quad (1.6.31)$$

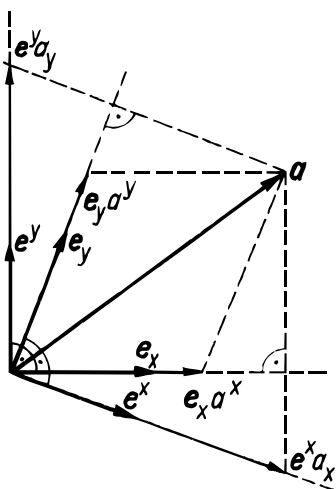
beachteten.

Arbeiten wir im 3-dimensionalen Raum mit den kartesischen Koordinaten  $\{x, y, z\}$  und der zugehörigen Basis (Einheitsvektorsystem)  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , so fallen die kovarianten und kontravarianten Größen zusammen:

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1 &= x^1 = x, & x_2 &= x^2 = y, & x_3 &= x^3 = z, \\ \text{b) } \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}^1 = \mathbf{i}, & \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}^2 = \mathbf{j}, & \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}^3 = \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

Es gilt

$$\text{a) } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \quad \text{b) } \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{k}\mathbf{i} = 0. \quad (1.6.33)$$



**Abbildung 1.1:** Zerlegung eines Vektors in einer kovarianten und kontravarianten Basis

Das heißt gemäß (1.6.8), daß der metrische Tensor zum Einheitstensor

$$\text{a) } (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{b) } \det(g_{\mu\nu}) = 1 \quad (1.6.34)$$

wird.

Diese Spezialisierung vereinfacht die Rechnungen beträchtlich. Man wird deshalb, falls nicht krummlinige oder schiefwinklige Koordinaten aus der Problemstellung heraus benutzt werden müssen, stets kartesische Koordinaten verwenden. Die Summenkonvention erstreckt sich dann, wenn ihre Benutzung zweckmäßig ist, auf nur kovariante (untere) Indizes. Die Aufspannung eines Vektors und das Skalarprodukt schreiben sich hier als

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{a} &= \mathbf{e}_\mu a_\mu = i a_x + j a_y + k a_z, \\ \text{b) } \mathbf{a} \mathbf{b} &= a_\mu b_\mu = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned} \quad (1.6.35)$$

Im weiteren ist gelegentlich die Benutzung des vollantisymmetrischen 3-dimensionalen Levi-Civita-Symbols  $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$  nützlich, das für zwei gleiche Indizes verschwindet. Für lauter verschiedene Indizes in geordneter Reihenfolge ist es auf eins normiert. Es gilt gemäß (1.3.3) und (1.3.2)

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta_{\alpha\beta\gamma} &= -\Delta_{\beta\alpha\gamma} = -\Delta_{\gamma\beta\alpha} = -\Delta_{\alpha\gamma\beta}, \\ \text{b) } \Delta_{123} &= 1, \\ \text{c) } \Delta_{\mu\alpha\beta} \Delta_{\mu\lambda\tau} &= \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\tau} - \delta_{\alpha\tau} \delta_{\beta\lambda}. \end{aligned} \quad (1.6.36)$$

Im 3-dimensionalen Raum ist das Vektorprodukt (äußeres Produkt) aus zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{e}_\alpha \Delta_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma \\ &= \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x), \end{aligned} \quad (1.6.37)$$

ein sehr nützlicher Begriff. Man kann dafür symbolisch die Determinantenschreibweise

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.6.38)$$

verwenden. Aus dieser Definition erkennt man, daß es ein Vektor mit folgenden Eigenschaften ist:

1. Antikommutativität:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (1.6.39)$$

Daraus ersieht man, daß das Vektorprodukt aus parallelen Vektoren ( $\mathbf{b} = az$ ,  $z$  Skalar) verschwindet.

2. Distributivität:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \quad (1.6.40)$$

Der Betrag des Vektorprodukts ist durch

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \quad (1.6.41)$$

gegeben, wobei  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist. Daraus folgt, daß der Betrag des Vektorprodukts gerade die Fläche des Parallelogramms beschreibt, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird. Der Produktvektor selber steht auf diesem Parallelogramm im Sinne einer Rechtsschraube senkrecht und gibt damit dem Parallelogramm eine Orientierung.

Die Basisvektoren  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  genügen den Relationen:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \\ \text{b) } & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (1.6.42)$$

allgemein:

$$\text{c) } \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = \Delta_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\gamma.$$

Sie bilden in zyklischer Weise ein Rechtssystem, d. h., durch eine Rechtsschraube wird bei Festhalten von  $\mathbf{k}$  der Vektor  $\mathbf{i}$  in den Vektor  $\mathbf{j}$  übergeführt, usw.

Das Skalarprodukt eines Vektors  $\mathbf{a}$  mit dem Vektorprodukt  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ , also

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad (1.6.43)$$

nennt man Spatprodukt. Es bedeutet geometrisch das Volumen des von den Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  aufgespannten Parallelepipeds.

Im Falle der Komplanarität der Vektoren (Lage in einer Ebene) verschwindet es.

Unter der Gramschen Determinante aus den drei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  versteht man den Ausdruck

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}^2 & (\mathbf{ab}) & (\mathbf{ac}) \\ (\mathbf{ba}) & \mathbf{b}^2 & (\mathbf{bc}) \\ (\mathbf{ca}) & (\mathbf{cb}) & \mathbf{c}^2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2 (\mathbf{bc})^2 - \mathbf{b}^2 (\mathbf{ca})^2 - \mathbf{c}^2 (\mathbf{ab})^2 \\ &\quad + 2(\mathbf{ab})(\mathbf{bc})(\mathbf{ca}). \end{aligned} \quad (1.6.44)$$

Sie bedeutet geometrisch das Quadrat des Volumens des aufgespannten Parallelepipeds. Der Begriff der Gramschen Determinante kann sinngemäß auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden.

Weiter notieren wir noch folgende nützliche Vektorformeln:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a}), \quad (1.6.45)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - (\mathbf{ba})\mathbf{c}, \quad (1.6.46)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, \quad (1.6.47)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{bc})(\mathbf{ad}), \quad (1.6.48)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= [\mathbf{a}(\mathbf{c} \times \mathbf{d})] \mathbf{b} - [\mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{d})] \mathbf{a} \\ &= [\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{d})] \mathbf{c} - [\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (1.6.49)$$

$$[\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})][\mathbf{d}(\mathbf{f} \times \mathbf{g})] = \begin{vmatrix} (\mathbf{ad}) & (\mathbf{af}) & (\mathbf{ag}) \\ (\mathbf{bd}) & (\mathbf{bf}) & (\mathbf{bg}) \\ (\mathbf{cd}) & (\mathbf{cf}) & (\mathbf{cg}) \end{vmatrix}. \quad (1.6.50)$$

Schließlich erwähnen wir, daß für die  $N$  Flächen eines geschlossenen Polyeders, die durch die auf den Flächen senkrecht stehenden und in den Außenraum zeigenden Vektoren  $\sigma_\Gamma$  im Sinne des Vektorprodukts beschrieben werden, die Formel

$$\sum_{\Gamma=1}^N \sigma_\Gamma = 0 \quad (1.6.51)$$

gilt. Beim Übergang zu einer krummen geschlossenen Fläche resultiert daraus

$$\oint d\sigma = 0. \quad (1.6.52)$$

Dabei ist der Flächenelementvektor  $d\sigma$  in kartesischen Koordinaten durch

$$d\sigma = e_\alpha d\sigma_\alpha = \mathbf{i} d\sigma_x + \mathbf{j} d\sigma_y + \mathbf{k} d\sigma_z \quad (1.6.53)$$

mit den der Orientierung Rechnung tragenden Komponenten

$$d\sigma_x = dy dz, \quad d\sigma_y = -dz dx, \quad d\sigma_z = dx dy \quad (1.6.54)$$

gegeben.

## 1.7 Reelle und komplexe Analysis

### 1.7.1 Einige Grundbegriffe

#### *Homogene Funktionen*

Eine Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  heißt homogen vom Grad  $\alpha$ , wenn

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.7.1)$$

( $\lambda$  Parameter)

gilt. Differenzierbare homogene Funktionen genügen der Eulerschen Homogenitätsrelation

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = \alpha f. \quad (1.7.2)$$

Homogene Funktionen treten in verschiedenen Bereichen der Physik auf, insbesondere in der Thermodynamik.

#### *Vollständiges (totales) Differential*

Das Differential

$$du = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i \quad (1.7.3)$$

heißt vollständig, wenn die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad (1.7.4)$$

für alle  $i, k$  erfüllt sind. Für vollständige Differentiale gilt

$$f_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \text{d. h.} \quad (1.7.5)$$

$$du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i. \quad (1.7.6)$$

In diesem Fall wird das Kurvenintegral (Linienintegral) zwischen zwei Punkten  $P_0$  und  $P$  vom durchlaufenen Integrationsweg unabhängig, so daß eine Funktion  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  existiert, aus der durch Differentialbildung (1.7.6) entsteht:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{P_0}^P du = \sum_{i=1}^n \int_{P_0}^P f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i. \quad (1.7.7)$$

Für einen geschlossenen Weg gilt dann

$$\oint du = 0. \quad (1.7.8)$$

**Quadratische Formen**

Im Abschnitt 1.4.5 lernten wir reelle quadratische Formen in beliebiger Dimensionszahl  $N$  kennen. Da der Fall  $N = 2$  in der Physik häufig gebraucht wird, wollen wir diese Spezialisierung etwas detaillierter behandeln.

Aus (1.4.65) geht

$$2F = A_{11}X^2 + 2A_{12}XY + A_{22}Y^2 = \lambda_1\check{X}^2 + \lambda_2\check{Y}^2 \quad (1.7.9)$$

$$(X_1 = X, X_2 = Y)$$

hervor. Die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  resultieren dabei aus der Säkulargleichung

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(A_{11} + A_{22}) + [A_{11}A_{22} - (A_{12})^2] = 0 \quad (1.7.10)$$

zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A_{11} - A_{22})^2 + 4(A_{12})^2}. \quad (1.7.11)$$

Damit können wir die früheren allgemeinen Formeln (1.4.52) bestätigen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lambda_1\lambda_2 &= \det A = \tilde{A} = A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 \\ &\quad \text{(Diskriminante),} \\ \text{b) } \lambda_1 + \lambda_2 &= A_{11} + A_{22}. \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

Aussagen über Definitheitseigenschaften gewinnt man durch die folgende Schreibung von (1.7.9):

$$\frac{2F}{Y^2} = A_{11}x^2 + 2A_{12}x + A_{22} = \frac{1}{A_{11}} \left[ \tilde{A} + (A_{11}x + A_{12})^2 \right] \quad (1.7.13)$$

$$\left( x = \frac{X}{Y} \right).$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned}
 \text{a) Definitheit} & \quad \frac{2F}{Y^2} > 0 \quad (A_{11} > 0) \text{ oder} \\
 & \quad \frac{2F}{Y^2} < 0 \quad (A_{11} < 0) \text{ für} \\
 & \quad \tilde{A} > 0 \text{ (zwei komplexe Wurzeln),} \\
 \text{b) Semidefinitheit} & \quad \frac{2F}{Y^2} \geq 0 \text{ oder} \\
 & \quad \frac{2F}{Y^2} \leq 0 \text{ für} \\
 & \quad \tilde{A} = 0 \quad (\lambda_1 = A_{11} + A_{22}, \lambda_2 = 0), \\
 \text{c) Indefinitheit} & \quad \frac{2F}{Y^2} \leq 0 \text{ für} \\
 & \quad \tilde{A} < 0 \text{ (zwei reelle Wurzeln).}
 \end{aligned} \tag{1.7.14}$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit der Spezialisierung (1.4.71).

### **Extrema und Wendepunkt**

Die notwendigen Bedingungen dafür, daß eine Funktion  $f(x, y)$  in einem Punkt ein Extremum (Maximum oder Minimum) annimmt, sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_{,y} = 0. \tag{1.7.15}$$

Diese Stationaritätsbedingungen bedeuten noch nicht, daß  $f(x, y)$  in diesem Punkt extremal wird. Es kann nämlich auch ein Sattel vorliegen. Aus der Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}
 f(x+h, y+k) &= f(x, y) + hf_{,x} + kf_{,y} \\
 &+ \frac{1}{2!} [h^2 f_{,x,x} + 2hk f_{,x,y} + k^2 f_{,y,y}] + \dots
 \end{aligned} \tag{1.7.16}$$

erkennt man, daß diese Frage durch die Definitheitseigenschaft des Gliedes 2. Ordnung, das als eine quadratische Form aufgefaßt werden kann, entschieden wird. Durch Vergleich mit (1.7.9) und (1.7.14) ergeben sich als hinreichende Bedingungen:

1. für ein Extremum:

$$f_{,x,x} f_{,y,y} - (f_{,x,y})^2 > 0 \quad \begin{array}{l} (f_{,x,x} > 0 \text{ Minimum,} \\ f_{,x,x} < 0 \text{ Maximum),} \end{array} \tag{1.7.17}$$

2. für ein Nichtextremum:

$$f_{,x,x} f_{,y,y} - (f_{,x,y})^2 < 0. \tag{1.7.18}$$

Soll  $f(x, y)$  ein Extremum unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  annehmen, so kann man entweder gemäß der Eliminationsmethode mittels der letzten Gleichung  $y$  in  $f(x, y)$  eliminieren und damit das Problem auf eine übliche Extremalaufgabe zurückführen, oder gemäß der



Lagrangeschen Multiplikatorenmethode durch Einführung eines Multiplikators  $\lambda$  die gestellte Aufgabe auf die obige Extremalaufgabe für die Funktion

$$F(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (1.7.19)$$

mit den notwendigen Bedingungen

$$f_{,x} + \lambda g_{,x} = 0, \quad f_{,y} + \lambda g_{,y} = 0 \quad (1.7.20)$$

zurückführen.

Ein Wendepunkt einer Funktion ist im einfachsten Fall durch das Verschwinden der 2. Ableitung definiert, wobei aber die 3. Ableitung nicht auch gleichzeitig verschwinden darf.

### **Envelope**

Wir betrachten die in einer Ebene gelegene Kurvenschar

$$f(x, y; c) = 0, \quad (1.7.21)$$

die durch die Veränderung des Scharparameters  $c$  erzeugt wird. Die Enveloppe (Einhüllende) dieser Kurvenschar ist der geometrische Ort der Schnittpunkte infinitesimal benachbarter Scharkurven. Für diese Schnittpunkte gilt

$$\frac{\partial f(x, y; c)}{\partial c} = 0. \quad (1.7.22)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen kann man den Parameter  $c$  eliminieren und erhält dann die Envelopengleichung.

## **1.7.2 Längen, Flächen, Volumina**

### **Längenberechnung**

Wir betrachten folgende im 3-dimensionalen Raum gelegene und in den kartesischen Koordinaten  $\{x, y, z\}$  beschriebene Raumkurve in Parameterdarstellung ( $\lambda$  Parameter)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda) = i x(\lambda) + j y(\lambda) + k z(\lambda). \quad (1.7.23)$$

Der Bogendifferentialvektor (Linienelementvektor) ist durch

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz \quad (1.7.24)$$

gegeben, woraus für das Quadrat des Linienelements  $ds$ , das den Abstand infinitesimal benachbarter Punkte auf der Raumkurve beschreibt,

$$(ds)^2 = (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (1.7.25)$$

folgt. Gehen wir von den kartesischen Koordinaten zu den allgemeinen Koordinaten  $\{x^\alpha\} = \{x^1, x^2, x^3\}$  über:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(x, y, z), \\ x^2 &= x^2(x, y, z), \\ x^3 &= x^3(x, y, z), \end{aligned} \quad (1.7.26)$$

so entsteht im Einklang mit (1.6.25) und (1.6.26) aus (1.7.24) und (1.7.25)

$$\text{a) } ds = e_\alpha dx^\alpha \quad \text{und} \quad \text{b) } (ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.7.27)$$

(Anwendung der Summenkonvention mit  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ). Daraus folgt für die Bogenlänge zwischen zwei Punkten  $P_0$  und  $P$  auf der Kurve  $\left(\dot{x} = \frac{dx}{d\lambda} \text{ usw.}\right)$

$$\begin{aligned} S &= \int_{P_0}^P ds = \int_{P_0}^P \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \\ &= \int_{P_0}^P \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\lambda. \end{aligned} \quad (1.7.28)$$

Die Berechnung von Bogenlängen führt schon bei relativ einfachen Kurven über die Klasse elementarer Integrale hinaus. So resultiert für die Ellipse, beschrieben durch

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } x &= a \sin \lambda, \quad y = b \cos \lambda \quad (\text{Parameterdarstellung}) \end{aligned} \quad (1.7.29)$$

( $a$  und  $b$  Halbachsenabschnitte,  $\lambda$  Winkelparameter), das elliptische Integral 2. Gattung

$$S = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \lambda} d\lambda \quad (1.7.30)$$

mit

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (\varepsilon \text{ numerische Exzentrizität}). \quad (1.7.31)$$

Für den Ellipsenumfang ergibt sich näherungsweise

$$\begin{aligned} S_{\text{Ellipse}} &= 2\pi a \left( 1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 - \dots \right) \\ &\approx \pi \left( 3\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right), \end{aligned} \quad (1.7.32)$$

woraus für den Kreisumfang ( $b = a, \varepsilon = 0$ )

$$S_{\text{Kreis}} = 2\pi a \quad (1.7.33)$$

entsteht.

**Flächenberechnung**

Der Flächeninhalt einer von einer stückweise glatten Kurve umschlossenen ebenen Fläche ist durch das Kurvenintegral

$$A = \frac{1}{2} \oint (x \, dy - y \, dx) = \oint x \, dy = - \oint y \, dx \quad (1.7.34)$$

gegeben.

Die Anwendung dieser Formel auf die durch (1.7.29) beschriebene Ellipse liefert für die Ellipsenfläche

$$A_{\text{Ellipse}} = \pi ab, \quad (1.7.35)$$

woraus für die Kreisfläche

$$A_{\text{Kreis}} = \pi a^2 \quad (1.7.36)$$

hervorgeht.

Eine im 3-dimensionalen Raum gelegene 2-dimensionale Fläche wird in Parameterdarstellung ( $u, v$  Gaußsche Parameter) durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}x(u, v) + \mathbf{j}y(u, v) + \mathbf{k}z(u, v) \quad (1.7.37)$$

beschrieben. Daraus resultiert für den Linienelementvektor (1.7.24) durch Umrechnung der Ausdruck ( $x^1 \rightarrow u, x^2 \rightarrow v$ )

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = \mathbf{e}_u \, du + \mathbf{e}_v \, dv \quad (1.7.38)$$

mit den kovarianten Basisvektoren

$$\mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v}. \quad (1.7.39)$$

Durch Quadrieren folgt aus (1.7.38) die Erste Grundform der Fläche

$$(ds)^2 = E(du)^2 + 2F \, du \, dv + G(dv)^2 \quad (1.7.40)$$

mit den Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Ordnung

$$E = (\mathbf{e}_u)^2, \quad F = \mathbf{e}_u \mathbf{e}_v, \quad G = (\mathbf{e}_v)^2. \quad (1.7.41)$$

Für den Flächeninhalt der betrachteten Fläche findet man

$$A = \int d\sigma = \iint \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (1.7.42)$$

Vergleicht man die 2-dimensionalen Ergebnisse (1.7.38) und (1.7.40) mit den allgemeinen Resultaten (1.6.25) und (1.6.26), so kommt man zu der Identifizierung ( $A, B = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \text{a) } & x^1 = u, \quad x^2 = v, \\ \text{b) } & \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_u, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_v, \\ \text{c) } & g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G, \\ \text{d) } & \det(g_{AB}) = EG - F^2, \end{aligned} \quad (1.7.43)$$

so daß man für (1.7.42) auch

$$A = \iint \sqrt{\det(g_{AB})} dx^1 dx^2 \quad (1.7.44)$$

schreiben kann.

In der Ebene ist diese 2-dimensionale Integralformel mit der 1-dimensionalen Kurvenintegralformel (1.7.34) äquivalent.

### **Volumenberechnung**

In kartesischen Koordinaten ist das Volumen eines Körpers im 3-dimensionalen Raum durch das Integral

$$V = \iiint dx dy dz \quad (1.7.45)$$

gegeben. Geht man zu den allgemeinen Koordinaten  $\{x^\alpha\} = \{x^1, x^2, x^3\}$  analog zu (1.7.26) über:

$$x^1 = x^1(x, y, z), \quad x^2 = x^2(x, y, z), \quad x^3 = x^3(x, y, z), \quad (1.7.46)$$

so folgt durch Umrechnung mittels der Funktionaldeterminante

$$V = \iiint \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.7.47)$$

Dafür läßt sich analog zum 2-dimensionalen Spezialfall (1.7.44) auch

$$V = \iiint \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (1.7.48)$$

schreiben. In diesem Sinne ist das 3-dimensionale Volumen identisch mit der Fläche einer 3-dimensionalen Hyperfläche, die in einem höherdimensionalen Raum eingebettet ist.

Die Anwendung der Volumenformel (1.7.47) auf das durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.7.49)$$

( $a, b, c$  Halbachsenabschnitte) beschriebene Ellipsoid ergibt für das Ellipsoidvolumen

$$V_{\text{Ellipsoid}} = \frac{4\pi}{3} abc, \quad (1.7.50)$$

woraus für das Kugelvolumen ( $a = b = c$ )

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (1.7.51)$$

entsteht.

**Oberfläche und Volumen einer Kugel im  $n$ -dimensionalen Raum**

Die Gleichung für eine im  $n$ -dimensionalen Raum gelegene Kugel lautet:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2 = R^2 \quad (R \text{ Kugelradius}). \quad (1.7.52)$$

Wendet man die obigen Formeln an, so gelangt man schließlich zu den geschlossenen Ausdrücken:

$$A_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^{n-1} \quad (\text{Oberfläche}), \quad (1.7.53)$$

$$V_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n \quad (\text{Volumen}). \quad (1.7.54)$$

Dabei ist  $\Gamma(x)$  die Gammafunktion.

Aus den letzten beiden Formeln folgt

$$\begin{aligned} \text{a) } A_2 &= 2\pi R, & V_2 &= \pi R^2 & (\text{üblicher Kreis}), \\ \text{b) } A_3 &= 4\pi R^2, & V_3 &= \frac{4\pi}{3} R^3 & (\text{übliche Kugel}), \\ \text{c) } A_4 &= 2\pi^2 R^3, & V_4 &= \frac{\pi^2}{2} R^4 & (\text{kosmologisches Kugelmodell}). \end{aligned} \quad (1.7.55)$$

**1.7.3 Reihenentwicklungen****Taylor-Reihe**

Ist  $f(x)$  im Entwicklungszentrum  $x = x_0$  beliebig oft differenzierbar und sind Konvergenz und Darstellung gesichert, so gilt die Taylor-Entwicklung

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}. \quad (1.7.56)$$

Bei zwei unabhängigen Variablen lautet die Entwicklung

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) \\ &\left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.7.57)$$

**Trigonometrische Reihe und Fourier-Integral**

Später werden wir die allgemeine Fourier-Entwicklung kennenlernen, die als Verallgemeinerung der Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen anzusehen ist, mit der wir uns hier befassen wollen.

Besitzt  $f(x)$  die Periodenlänge  $l$ , d. h.  $f(x) = f(x + l)$ , sind ferner  $f(x)$  und  $f'(x)$  im Grundgebiet  $0 \leq x \leq l$  stückweise stetig, so gilt die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{2\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{l} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\frac{2\pi i n x}{l}}, \end{aligned} \quad (1.7.58)$$

wobei die Fourier-Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} \text{a) } a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{2\pi n \xi}{l} d\xi \quad (n = 0, 1, \dots, \infty), \\ b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{2\pi n \xi}{l} d\xi \quad (n = 0, 1, \dots, \infty), \\ \text{b) } \alpha_n &= \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l f(\xi) e^{-\frac{2\pi i n \xi}{l}} d\xi \quad (n = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (1.7.59)$$

gegeben sind und

$$F(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

ist.

Während bei der Taylor-Entwicklung der Wert einer Funktion an einer Stelle durch die Eigenschaften der Funktion im Entwicklungszentrum bestimmt wird, ist bei der Fourier-Entwicklung das Verhalten der Funktion im ganzen Periodizitätsintervall maßgebend.

Die Möglichkeit der obigen Fourier-Entwicklung basiert auf der Tatsache, daß die trigonometrischen Funktionen ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

Es bestehen die Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^l \cos \frac{2\pi m \xi}{l} \cos \frac{2\pi n \xi}{l} d\xi &= \int_0^l \sin \frac{2\pi m \xi}{l} \sin \frac{2\pi n \xi}{l} d\xi = \frac{1}{2} \delta_{mn}, \\ \int_0^l \cos \frac{2\pi m \xi}{l} \sin \frac{2\pi n \xi}{l} d\xi &= 0, \\ \text{b) } \int_0^l e^{\frac{2\pi i(n-m)\xi}{l}} d\xi &= l \delta_{mn}. \end{aligned} \quad (1.7.60)$$

Die obigen Fourier-Koeffizienten befriedigen die Parseval-Formel

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi)^2 d\xi &= \frac{(a_0)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n)^2 + (b_n)^2] \\ &= \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^* \alpha_n. \end{aligned} \quad (1.7.61)$$

Weiter gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n(x-\xi)}{l}} = \delta(x - \xi), \quad (1.7.62)$$

wobei  $\delta(x - \xi)$  die Diracsche Deltafunktion ist.

Schließlich ist bemerkenswert, daß das mittlere Fehlerquadrat der Approximation einer Funktion durch die zugehörige endliche Fourier-Summe minimal wird.

Wird das Grundgebiet unendlich groß ( $l \rightarrow \infty$ ), gilt also  $-\infty < x < \infty$ , so geht die trigonometrische Reihe (1.7.58) unter der Annahme  $F(x) = f(x)$  in das Fourier-Integral

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [a(\xi) \cos(\xi x) + b(\xi) \sin(\xi x)] d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\xi) e^{i\xi x} d\xi \end{aligned} \quad (1.7.63)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{a) } a(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \cos(\eta\xi) d\eta, \\ b(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \sin(\eta\xi) d\eta, \\ \text{b) } \alpha(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-i\eta\xi} d\eta \end{aligned} \quad (1.7.64)$$

über. Die Vollständigkeitsrelation (1.7.62) nimmt dann die Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta(x-\xi)} d\eta = 2\pi\delta(x - \xi) \quad (1.7.65)$$

an.

Die Fouriersche Integraldarstellung (1.7.63) ist für (nichtperiodische) Funktionen  $f(x)$  gültig, für die  $f(\pm\infty) = 0$  ist, damit die auftretenden Integrale konvergieren.

Als ein Beispiel für eine trigonometrische Reihe geben wir an:

$$\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}, \quad (1.7.66)$$

woraus für  $x = 0$  die Eulersche Formel

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (1.7.67)$$

entsteht.

## 1.7.4 Elemente der Funktionentheorie

### Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Im folgenden seien die Koordinaten  $\{x, y, \dots\}$  reelle Zahlen, während  $z = x + iy$  eine komplexe Zahl sei. Eine komplexe Funktion  $f(x, y, \dots; i)$ , die neben den unabhängigen Variablen  $x, y, \dots$  noch die imaginäre Einheit  $i$  enthält, heißt erklärt, wenn sie durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil auf die Form

$$f(x, y, \dots; i) = u(x, y, \dots) + i v(x, y, \dots)$$

gebracht werden kann. Als Spezialfall ist darin die Klasse der analytischen (holomorphen) Funktionen

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (1.7.68)$$

enthalten, für die notwendigerweise die Schreibung  $f(x, y; i) = f(z)$  möglich sein muß.

Eine Funktion  $w = f(z)$ , für die in einem Bereich  $G$  die Ableitung  $f'(z)$  existiert (gleicher Wert unabhängig von der Richtung der Limesbildung):

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial(iy)} + i \frac{\partial v}{\partial(iy)} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.7.69)$$

oder für die, in äquivalenter Formulierung, im Bereich  $G$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_{,x} = v_{,y}, \quad u_{,y} = -v_{,x} \quad (1.7.70)$$

gelten, heißt in  $G$  regulär. Aus diesen Differentialgleichungen folgt einerseits die Orthogonalität

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = u_{,x}v_{,x} + u_{,y}v_{,y} = 0 \quad (1.7.71)$$

und andererseits die Erfüllung der Laplace-Gleichung:

$$\text{a) } \Delta u = 0, \quad \text{b) } \Delta v = 0 \quad (1.7.72)$$



für den Realteil  $u$  und den Imaginärteil  $v$ . Die Funktionen  $u$  und  $v$  nennt man konjugierte Potentialfunktionen.

Ist eine Funktion  $f(z)$  in einem Gebiet  $G$  nur in höchstens abzählbar unendlich vielen Punkten nicht regulär (singulär), so heißt sie in  $G$  analytisch. Eine analytische Funktion besitzt (abgesehen von den hebbaren Singularitäten) in einem Punkt  $z = z_0$  zwei Arten von Singularitäten: entweder eine außerwesentliche Singularität (Pol), wenn es ein positives  $n$  gibt, so daß  $(z - z_0)^n f(z)$  in diesem Punkt beschränkt ist, oder eine wesentliche Singularität, falls diese Bedingung nicht erfüllt ist. Diese Punkte selbst heißen im ersten Fall außerwesentlich-singulär und im zweiten Fall wesentlich-singulär.

Der Cauchysche Integralsatz besagt, daß das Integral

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) \quad (1.7.73)$$

vom Weg  $C$  unabhängig ist, wenn  $f(z)$  in einem betrachteten einfach-zusammenhängenden Bereich regulär und der in diesem Bereich verlaufende Integrationsweg stückweise glatt ist. Die Richtigkeit dieser Aussage erkennt man sofort, denn die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen (1.7.70) sind gerade die Integrabilitätsbedingungen für die auf der rechten Seite von (1.7.73) stehenden Kurvenintegrale.

### Cauchysche Integralformel

Ist eine Funktion  $f(z)$  in einem Bereich regulär und ist  $C$  ein im Inneren dieses Bereiches gelegener geschlossener Integrationsweg, so gilt die Darstellung

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{wenn } z \text{ innerhalb von } C \text{ liegt} \\ & \text{(positiver Umlauf),} \\ 0, & \text{wenn } z \text{ außerhalb von } C \text{ liegt.} \end{cases} \quad (1.7.74)$$

Die  $n$ -te Ableitung von  $f(z)$  schreibt sich als

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (1.7.75)$$

Ein besonders oft gebrauchter Spezialfall von (1.7.74) ist durch  $f(\zeta) = 1$  gegeben. Man erhält dann die Residuenformel

$$\oint_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i. \quad (1.7.76)$$

Die Anwendung der Cauchyschen Integralformel in der Potentialtheorie führt zur Poissonschen Integralformel

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \Phi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \Phi) + r^2} d\Phi, \quad (1.7.77)$$

nach welcher das Potential im Inneren eines Kreises (Radius  $R$ ) aus den Werten auf dem Umfang berechenbar ist.

### Mehrdeutige analytische Funktionen

Analog zum Reellen treten auch im Komplexen mehrdeutige Funktionen auf. Als Beispiele nennen wir den Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion oder die Wurzelfunktionen, auf die man beim Lösen nichtlinearer Gleichungen stößt:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } w &= \ln z \\
 &= \operatorname{Log} z + 2\pi i n = \operatorname{Log} \varrho + i(\varphi + 2\pi n) \\
 &\quad (z = e^{w+2\pi i n} = \varrho e^{i\varphi}), \\
 \text{b) } w &= z^{\frac{1}{m}} \\
 &= \sqrt[m]{\varrho} e^{\frac{i\varphi}{m}} \\
 &\quad (\operatorname{Log} z \text{ Hauptwert, } n \text{ und } m \text{ ganze Zahlen}).
 \end{aligned} \tag{1.7.78}$$

Die verschiedenen Lösungen einer mehrdeutigen Funktion heißen Zweige der Funktion. Diese Zweige gehen von Punkten aus, in denen die verschiedenen Lösungen zusammenfallen. Man nennt diese Punkte deshalb Verzweigungspunkte (Windungspunkte im Zusammenhang mit Riemannschen Flächen).

Ein Verzweigungspunkt einer Funktion  $w = f(z)$  bei  $z = z_0$  ist von  $(n - 1)$ -ter Ordnung, wenn in ihm  $n$  Zweige entspringen. Für einen solchen Verzweigungspunkt verschwinden die Ableitungen der Umkehrfunktion  $z = g(w)$  bis zur  $(n - 1)$ -ten Ordnung:

$$g'(w_0) = 0, g''(w_0) = 0, \dots, g^{(n-1)}(w_0) = 0, \tag{1.7.79}$$

so daß

$$z = g(w) = g(w_0) + \frac{1}{n!} g^{(n)}(w_0) (w - w_0)^n + \dots \tag{1.7.80}$$

gilt.

Bei mehrdeutigen Funktionen wird demnach ein Punkt der  $z$ -Ebene nicht eindeutig auf einen Punkt der  $w$ -Ebene abgebildet. Man erreicht nun eine eindeutige Zuordnung, indem man die  $z$ -Ebene auffächert, d. h. in Blätter zerlegt, und diese Blätter längs der Verzweigungsschnitte, die jeweils zwischen zwei zusammengehörigen Verzweigungspunkten gelegt werden, zur Riemannschen Fläche verheftet. Das bedeutet, daß man dann bei jedem Umlauf um einen Verzweigungspunkt (Windungspunkt) auf das jeweils nächste Riemannsche Blatt gelangt. Die Anzahl der nötigen Umläufe in der  $z$ -Ebene (Anzahl der Zweige oder Blätter), um einen gewissen  $w$ -Wert wieder zu erhalten, bestimmt die Ordnung des Verzweigungspunktes (geometrische Definition).

Zur Veranschaulichung der Windungspunkte einer Riemannschen Fläche ist die Benutzung der Riemannschen Zahlenkugel zum Zwecke einer gleichberechtigten Behandlung des unendlich fernen Punktes  $z = \infty$  (Abbildung der komplexen Ebene auf eine Kugel mittels stereographischer Projektion) oft sehr nützlich.

### Konforme Abbildung

Die durch eine reguläre Funktion  $w = f(z) = u + iv$  mit  $f'(z) \neq 0$  beschriebene Abbildung der  $z$ -Ebene auf die  $w$ -Ebene (Konformtransformation der Variablen  $z$  in die Variable  $w$ ) nennt

man eine konforme Abbildung. Dabei werden die orthogonalen Kurvenscharen  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  in der  $w$ -Ebene auf zueinander orthogonale Kurvenscharen in der  $z$ -Ebene abgebildet, wie man aus (1.7.71) erkennt. Allgemein läßt sich zeigen, daß die konforme Abbildung die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Winkeltreue (Beibehaltung der Winkel zwischen zwei von einem Punkt ausgehenden Richtungen),
2. Maßstabstreue im Unendlich-Kleinen.

Damit wird die konforme Abbildung im Kleinen ähnlich.

Die konforme Abbildung besitzt in der Physik und Technik eine sehr große praktische Bedeutung (Strömungsphysik, Elektrostatik, Magnetostatik, Wärmeleitung, Diffusion usw.).

Im Rahmen der Strömungsphysik deutet man Verzweigungspunkte als Staupunkte. Wegen (1.7.80) ist in solchen Punkten die Winkeltreue verletzt, denn ein Winkel in der  $w$ -Ebene wird in der  $z$ -Ebene an Verzweigungspunkten  $(n - 1)$ -ter Ordnung  $n$ -mal so groß.

### **Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen**

Es gilt die Taylor-Reihe

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \\ \text{b) } a_k &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}, \end{aligned} \quad (1.7.81)$$

wenn  $f(z)$  in der Umgebung des Entwicklungszentrums  $z = z_0$  eindeutig und regulär ist und der Integrationsweg  $C$  dieses einmal umläuft, dabei aber keine Singularitäten von  $f(z)$  umschließt. Die absolute und gleichmäßige Konvergenz ist im Konvergenzkreis mit einem bestimmten Konvergenzradius  $r_0$  ( $|z - z_0| < r_0$ ) gesichert. Im Konvergenzkreis stellt die Taylorentwicklung als Funktionselement die analytische Funktion dar.

Durch die Substitution  $z_0 = z_1 + c$ , wobei  $z_1$  im Konvergenzkreis liegen möge, erhält man durch Umschreibung von (1.7.81) eine Taylor-Entwicklung mit dem Entwicklungszentrum  $z = z_1$ , und einem neuen Konvergenzkreis:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_1)^k. \quad (1.7.82)$$

Diese Taylor-Reihe ist nun im neuen Konvergenzkreis Funktionselement der analytischen Funktion, usw. Man nennt diesen sukzessiven Prozeß zur Darstellung analytischer Funktionen durch Funktionselemente analytische Fortsetzung.

Ist  $f(z)$  in einem ringförmigen Bereich zwischen zwei konzentrischen Kreisen  $K_1$  (Radius  $r_1$ ) und  $K_2$  (Radius  $r_2$ ) eindeutig und regulär, so gilt für diesen Bereich die Laurent-Reihe ( $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2$ )

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \\ \text{b) } a_k &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.7.83)$$

Diese Laurent-Reihe besteht aus dem steigenden Teil ( $k = 0, 1, \dots$ ) und dem fallenden Hauptteil ( $k = -1, -2, \dots$ ). Ist der Bereich gemäß der Intervallangabe  $0 < |z - z_0| \leq r_2$  auszu dehnen, so ist das Entwicklungszentrum  $z = z_0$  eine isolierte Singularität. Diese ist außerwesentlich bzw. wesentlich, wenn der Hauptteil endlich viele bzw. unendlich viele Glieder aufweist.

Den Koeffizienten

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta = \text{Res } f(z_0) \quad (1.7.84)$$

nennt man das Residuum von  $f(z)$  bei  $z = z_0$ .

### Sattelpunktmethode

Trägt man den Betrag  $|f(z)|$  einer eindeutigen und regulären Funktion  $f(z)$  über der  $z$ -Ebene auf, so erhält man unter Verlust der Information der Phase der analytischen Funktion  $f(z)$  eine gebirgsähnliche Raumfläche. Die in der  $z$ -Ebene gelegenen Kurvenscharen  $u = \text{const}$  bzw.  $v = \text{const}$  kann man als Höhenschichtlinien (Isohypsen) bzw. Falllinien (Gradientenlinien) – oder auch umgekehrt – deuten. Die Raumfläche selbst besitzt, abgesehen vom Sonderfall  $|f(z)| = \text{const}$ , überall negative Krümmung, d. h. keine Maxima und Minima, hat also die Gestalt einer Sattelfläche.

Ein Sattelpunkt bei  $z = z_s = x_s + iy_s$  ist durch  $f'(z_s) = 0$  bzw.  $u_{,x}(x_s, y_s) = 0$  und  $v_{,x}(x_s, y_s) = 0$  definiert, woraus gemäß (1.7.79) die Identifizierung eines Sattelpunktes mit einem Verzweigungspunkt der Umkehrfunktion resultiert. Es läßt sich nun zeigen, daß an der Stelle eines Sattelpunktes die Gleichungen

$$\text{a) } \frac{\partial |f(z)|}{\partial x} = 0, \quad \text{b) } \frac{\partial |f(z)|}{\partial y} = 0 \quad (1.7.85)$$

gelten, die als notwendige Bedingungen für Extremwerte von  $|f(z)|$  bekannt sind.

Soll nun das Integral

$$I = \int_C f(z) dz \quad (1.7.86)$$

längs eines über einen Sattel führenden Weges berechnet werden, wobei  $|f(z)|$  dort ein scharfes Maximum besitzt, so daß der Beitrag zum Integral längs des übrigen Weges vernachlässigt

werden kann, so kann man  $f(z)$  unter Ausnutzung der Sattelpunktsdefinition entwickeln, wobei man bis zur 2. Ordnung geht. Das approximative Resultat lautet:

$$I = \mp \sqrt{\frac{2\pi f(z_s)^3}{-f''(z_s)}}. \quad (1.7.87)$$

### 1.7.5 Elementare transzendente Funktionen

#### Relationen im Komplexen ( $x, \alpha$ reell)

- a)  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$   
(Eulersche Zerlegungsformel),
- b)  $e^{i\alpha x} = (\cos x + i \sin x)^\alpha = \cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)$  (1.7.88)  
(Moivre-Formel),
- c)  $\text{Log}(-x) = \text{Log}|-x| + i\pi$   
(für Hauptwert und  $x > 0$ ).

#### Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

- a)  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$   
 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$
- b)  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$   
 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x},$
- c)  $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad (1.7.89)$   
 $\tan(-x) = -\tan x, \quad \cot(-x) = -\cot x,$
- d)  $\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x,$   
 $\tanh(-x) = -\tanh x, \quad \coth(-x) = -\coth x,$
- e)  $e^x = \cosh x + \sinh x,$
- f)  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$
- g)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$
- h)  $\sinh(ix) = i \sin x, \quad \cosh(ix) = \cos x,$   
 $\tanh(ix) = i \tan x, \quad \coth(ix) = -i \cot x,$   
 $\sin(ix) = i \sinh x, \quad \cos(ix) = \cosh x,$   
 $\tan(ix) = i \tanh x, \quad \cot(ix) = -i \coth x.$

**Zyklometrische Funktionen**

$$\begin{aligned}
\text{a) } \arcsin x &= -i \ln \left( ix + \sqrt{1-x^2} \right), \\
\arccos x &= -i \ln \left( x + i \sqrt{1-x^2} \right), \\
\arctan x &= -\frac{i}{2} \ln \frac{1+ix}{1-ix}, \\
\operatorname{arccot} x &= -\frac{i}{2} \ln \frac{ix-1}{ix+1}, \\
\text{b) } \operatorname{arsinh} x &= \ln \left( x + \sqrt{x^2+1} \right), \\
\operatorname{arcosh} x &= \ln \left( x + \sqrt{x^2-1} \right), \\
\operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \\
\operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.
\end{aligned} \tag{1.7.90}$$

**Relationen zwischen den trigonometrischen Funktionen**

$$\begin{aligned}
\text{a) } \sin x &= \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}, \\
\text{b) } \cos x &= \sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}, \\
\text{c) } \tan x &= \frac{1}{\cot x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}.
\end{aligned} \tag{1.7.91}$$

**Relationen zwischen den Hyperbelfunktionen**

$$\begin{aligned}
\text{a) } \sinh x &= \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}, \\
\text{b) } \cosh x &= \sqrt{1+\sinh^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}} = \frac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}, \\
\text{c) } \tanh x &= \frac{1}{\coth x} = \frac{\sinh x}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}.
\end{aligned} \tag{1.7.92}$$

**Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen und zyklometrische Funktionen**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\
 & \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\
 & \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \\
 & \cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}, \\
 \text{b) } & \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \\
 & \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \\
 & \tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}, \\
 & \coth(x+y) = \frac{\coth x \coth y + 1}{\coth x + \coth y}, \\
 \text{c) } & \arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin \left( x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2} \right), \\
 & \arccos x \pm \arccos y = \arccos \left( xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right), \\
 & \arctan x \pm \arctan y = \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy}, \\
 \text{d) } & \operatorname{arsinh} x \pm \operatorname{arsinh} y = \operatorname{arsinh} \left( x\sqrt{y^2+1} \pm y\sqrt{x^2+1} \right), \\
 & \operatorname{arcosh} x \pm \operatorname{arcosh} y = \operatorname{arcosh} \left( xy \pm \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} \right), \\
 & \operatorname{artanh} x \pm \operatorname{artanh} y = \operatorname{artanh} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}.
 \end{aligned} \tag{1.7.93}$$

**Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen des doppelten Arguments**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \sin(2x) = 2 \sin x \cos x, & \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\
 & \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, & \cot(2x) &= \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}, \\
 \text{b) } & \sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x, & \cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x, \\
 & \tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}, & \coth(2x) &= \frac{\coth^2 x + 1}{2 \coth x}.
 \end{aligned} \tag{1.7.94}$$

**Trigonometrische Funktionen des  $n$ -fachen Arguments**

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(nx) &= n \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \\ &\quad + \binom{n}{5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots, \end{aligned} \quad (1.7.95)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(nx) &= \cos^n x - \binom{n}{2} \sin^2 x \cos^{n-2} x \\ &\quad + \binom{n}{4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \dots \end{aligned}$$

**Potenzen von trigonometrischen Funktionen**

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x), \\ \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x), \\ \text{b) } \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x), \\ \cos^3 x &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos(3x). \end{aligned} \quad (1.7.96)$$

**Trigonometrische und Hyperbelfunktionen des halben Arguments**

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, & \cos \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \\ \tan \frac{x}{2} &= \frac{\sin x}{1 + \cos x}, & \cot \frac{x}{2} &= \frac{\sin x}{1 - \cos x}, \\ \text{b) } \sinh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, & \cosh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}, \\ \tanh \frac{x}{2} &= \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}, & \coth \frac{x}{2} &= \frac{\sinh x}{\cosh x - 1}. \end{aligned} \quad (1.7.97)$$



**Summe von trigonometrischen und Hyperbelfunktionen**

$$\begin{aligned}
\text{a) } \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\
\tan x + \tan y &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}, \\
\cot x + \cot y &= \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}, \\
\text{b) } \sinh x + \sinh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}, \\
\cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}, \\
\tanh x + \tanh y &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh x \cosh y}, \\
\coth x + \coth y &= \frac{\sinh(x+y)}{\sinh x \sinh y}.
\end{aligned} \tag{1.7.98}$$

**Produktzerlegung von trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen**

$$\begin{aligned}
\text{a) } 2 \sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y), \\
2 \cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y), \\
2 \sin x \cos y &= \sin(x-y) + \sin(x+y), \\
\text{b) } 2 \sinh x \sinh y &= \cosh(x+y) - \cosh(x-y), \\
2 \cosh x \cosh y &= \cosh(x+y) + \cosh(x-y), \\
2 \sinh x \cosh y &= \sinh(x+y) + \sinh(x-y).
\end{aligned} \tag{1.7.99}$$

**1.7.6 Einige spezielle Funktionen**

Wir machen uns hier mit einigen in der Physik gelegentlich vorkommenden speziellen Funktionen vertraut, werden aber auf diese Funktionenklasse im Kapitel über Differentialgleichungen noch einmal zurückkommen.

**Fakultätsfunktion  $\Pi(z)$  und Gammafunktion  $\Gamma(z)$** 

$$\Pi(z) = \Gamma(z+1). \tag{1.7.100}$$

Die Fakultätsfunktion wurde von C. F. GAUSS und die Gammafunktion von A. M. LEGENDRE eingeführt. Eine von beiden ist entbehrlich. Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0), \\
 \text{b) } \frac{1}{\Gamma(z)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\underbrace{\quad}_{\infty}} \frac{e^{-t}}{t^z} dt \\
 &\quad (\text{Integrationsweg von } -\infty \text{ um Nullpunkt nach } -\infty), \\
 \text{c) } \Gamma(1) &= 1, \\
 \Gamma(n+1) &= n!, \quad \Gamma(-n+1) = \pm\infty \quad (n \text{ positiv ganz}), \\
 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \\
 \text{d) } \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.
 \end{aligned} \tag{1.7.101}$$

Für natürliche Zahlen  $n \gg 1$  wird  $\Gamma(n+1)$  durch die Stirling-Formel gut approximiert:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \Gamma(n+1) &= n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}, \quad \text{d. h.} \\
 \text{b) } \ln n! &\approx n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \approx n \ln n - n.
 \end{aligned} \tag{1.7.102}$$

### **Eulersche Betafunktion**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \varphi \cos^{2y-1} \varphi d\varphi \quad (t = \sin^2 \varphi), \\
 \text{b) } B(x, y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.
 \end{aligned} \tag{1.7.103}$$

### **Elliptische Integrale**

Integrale der Form

$$\int R\left(t, \sqrt{a_0 t^4 + a_1 t^3 + \dots + a_4}\right) dt \tag{1.7.104}$$

nennt man, wenn  $R$  eine rationale Funktion ist und die algebraische Gleichung

$$a_0 t^4 + a_1 t^3 + \dots + a_4 = 0 \tag{1.7.105}$$

keine mehrfachen Wurzeln besitzt, elliptische Integrale. Diese lassen sich auf die drei Legendreschen Normalformen reduzieren ( $0 < k^2 < 1$ ,  $t = \sin \psi$ ,  $x = \sin \varphi$ ):

a) 1. Gattung:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F(k, \varphi),$$

b) 2. Gattung:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} d\psi = E(k, \varphi),$$

(1.7.106)

c) 3. Gattung  $\left(a^2 = -\frac{1}{\chi}\right)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - a^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ = \chi \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}(1+\chi\sin^2\psi)} \\ = \chi II(k, \chi, \varphi). \end{aligned}$$

Der Name rührt daher, weil Integrale dieser Art bei der Berechnung der Bogenlänge einer Ellipse auftreten. Auf sie stößt man auch bei der Behandlung der Schwingung eines mathematischen Pendels bei endlichen Ausschlägen.

### 1.7.7 Formeln für Summen, Reihen und Produkte

#### a) Summen

Binomische Summe:

$$(a+b)^n = \sum_{\varkappa=0}^n \binom{n}{\varkappa} a^\varkappa b^{n-\varkappa} = n! \sum_{\alpha, \beta=0}^n \frac{a^\alpha b^\beta}{\alpha! \beta!} \quad (1.7.107)$$

$$(\alpha + \beta = n).$$

Polynomische Summe:

$$(a+b+c+\dots+k)^n = n! \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varkappa} \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots k^\varkappa}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \varkappa!} \quad (1.7.108)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \varkappa = n).$$

Cauchysche Ungleichung (Schwarzsche Ungleichung):

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left( \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} b_{\nu} \right)^2 \leq \sum_{\nu=1}^n (a_{\nu})^2 \cdot \sum_{\mu=1}^n (b_{\mu})^2 \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } & \left( \int_{x_0}^{x_1} a(x) b(x) dx \right)^2 \leq \int_{x_0}^{x_1} a(x)^2 dx \cdot \int_{x_0}^{x_1} b(x)^2 dx. \end{aligned} \quad (1.7.109)$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für  $a_{\nu} = \text{const} \cdot b_{\nu}$  bzw.  $a(x) = \text{const} \cdot b(x)$ . In Vektorform lautet die Cauchysche Ungleichung:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2. \quad (1.7.110)$$

### b) Reihen

Riemannsche Zetafunktion (allgemeine harmonische Reihe):

$$\begin{aligned} \text{a) } & \zeta(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots \quad (\alpha > 1), \\ \text{b) } & \zeta(2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Spezialisierung } \alpha = 2). \end{aligned} \quad (1.7.111)$$

Binomische Reihe und Spezialisierungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } & (1+z)^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} z^{\nu} = 1 + \binom{\alpha}{1} z + \binom{\alpha}{2} z^2 + \dots \\ & (|z| < 1, \alpha \text{ reell}), \\ \text{b) } & \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (|z| < 1) \\ & (\text{geometrische Reihe}), \\ \text{c) } & \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \quad (|z| < 1), \\ \text{d) } & \sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2 \cdot 4}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 - \dots \quad (|z| < 1), \\ \text{e) } & \frac{1}{\sqrt{1+z}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 + \dots \quad (|z| < 1). \end{aligned} \quad (1.7.112)$$

Logarithmus:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad (|z| < 1), \\ \text{b) } & \ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \left( z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right) \quad (|z| < 1). \end{aligned} \quad (1.7.113)$$

Exponentialfunktion:

$$e^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^\nu = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad (1.7.114)$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} x^\nu. \quad (1.7.115)$$

Die auftretenden Größen  $B_\nu$  heißen Bernoulli-Zahlen. Es gilt

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, \dots, \quad (1.7.116)$$

$$B_{2\nu+1} = 0 \text{ für } \nu \geq 1.$$

Trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \\ \text{b) } \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \\ \text{c) } \tan z &= z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right), \\ \text{d) } z \cot z &= 1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{45} - \dots \quad (|z| < \pi). \end{aligned} \quad (1.7.117)$$

Hyperbelfunktionen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sinh z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, \\ \text{b) } \cosh z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \\ \text{c) } \tanh z &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} - \dots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right), \\ \text{d) } z \coth z &= 1 + \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{45} + \dots \quad (|z| < \pi). \end{aligned} \quad (1.7.118)$$

Arkusfunktionen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \arcsin z &= z + \frac{1 \cdot z^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot z^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \quad (|z| < 1), \\ \text{b) } \arccos z &= \frac{\pi}{2} - z - \frac{1 \cdot z^3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot z^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \quad (|z| < 1), \\ \text{c) } \arctan z &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \quad (|z| < 1), \\ \text{d) } \operatorname{arccot} z &= \frac{\pi}{2} - z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + \dots \quad (|z| < 1). \end{aligned} \quad (1.7.119)$$

Gaußsches Fehlerintegral:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots \right) \quad (1.7.120)$$

$(\Phi(\infty) = 1).$

Integralsinus:

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots \quad (1.7.121)$$

Integralkosinus:

$$Ci(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = C_E + \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \dots \quad (1.7.122)$$

$(C_E = 0,577216 \dots \text{ Euler-Mascheroni-Konstante}).$

Exponentialintegral:

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{-t}}{t} dt = C_E + \ln x + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \dots \quad (1.7.123)$$

$(x \neq 0).$

Fresnel-Integrale (auftretend in der Optik):

$$\begin{aligned} \text{a) } S(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt = \frac{x}{3 \cdot 1!} - \frac{x^3}{7 \cdot 3!} + \frac{x^5}{11 \cdot 5!} - \dots, \\ \text{b) } C(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt = 1 - \frac{x^2}{5 \cdot 2!} + \frac{x^4}{9 \cdot 4!} - \frac{x^6}{13 \cdot 6!} + \dots \end{aligned} \quad (1.7.124)$$

Integrale (auftretend in der Quantenstatistik):

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t} dt}{e^{z+t} \pm 1} = \sum_{k=1}^{\infty} (\mp 1)^{k-1} \frac{e^{-kz}}{k^{3/2}} = e^{-z} + (\mp 1) \frac{e^{-2z}}{2^{3/2}} + \dots, \\
 \text{b) } & \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{3/2} dt}{e^{z+t} \pm 1} = \sum_{k=1}^{\infty} (\mp 1)^{k-1} \frac{e^{-kz}}{k^{5/2}} = e^{-z} + (\mp 1) \frac{e^{-2z}}{2^{5/2}} + \dots \\
 & \quad (\operatorname{Re} z > 0), \tag{1.7.125} \\
 \text{c) } & \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^t + 1} = \frac{\pi^2}{12}, \\
 \text{d) } & \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^t - 1} = \frac{\pi^4}{15}.
 \end{aligned}$$

### c) Produkte

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \quad (\text{Wallis-Formel}), \\
 \text{b) } & \sin(\pi z) = \pi z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \dots, \\
 \text{c) } & \zeta(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\alpha} = \frac{1}{1 - p_1^{-\alpha}} \cdot \frac{1}{1 - p_2^{-\alpha}} \cdot \frac{1}{1 - p_3^{-\alpha}} \cdot \dots \tag{1.7.126} \\
 & \quad (\text{Riemannsche Zetafunktion}) \\
 & \quad (p_i \text{ durchlaufen alle Primzahlen gr\u00f6\u00dfer als } 1), \\
 \text{d) } & \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{C_E z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}.
 \end{aligned}$$

### 1.7.8 Differentiations- und Integrationsformeln

#### a) Differentiationsformeln

$$\frac{d e^z}{dz} = e^z, \quad \frac{d a^z}{dz} = a^z \ln a, \quad \frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}. \quad (1.7.127)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d \sin z}{dz} &= \cos z, & \frac{d \cos z}{dz} &= -\sin z, \\ \frac{d \tan z}{dz} &= \frac{1}{\cos^2 z}, & \frac{d \cot z}{dz} &= -\frac{1}{\sin^2 z}, \\ \text{b) } \frac{d \sinh z}{dz} &= \cosh z, & \frac{d \cosh z}{dz} &= \sinh z, \\ \frac{d \tanh z}{dz} &= \frac{1}{\cosh^2 z}, & \frac{d \coth z}{dz} &= -\frac{1}{\sinh^2 z}, \\ \text{c) } \frac{d \arcsin z}{dz} &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, & \frac{d \arccos z}{dz} &= -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \\ \frac{d \arctan z}{dz} &= \frac{1}{1+z^2}, & \frac{d \operatorname{arccot} z}{dz} &= -\frac{1}{1+z^2}, \\ \text{d) } \frac{d \operatorname{arsinh} z}{dz} &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, & \frac{d \operatorname{arcosh} z}{dz} &= \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \\ \frac{d \operatorname{artanh} z}{dz} &= \frac{1}{1-z^2}, & \frac{d \operatorname{arcoth} z}{dz} &= \frac{1}{1-z^2}. \end{aligned} \quad (1.7.128)$$

#### b) Integrationsformeln

Im folgenden listen wir einige öfter gebrauchte Integrationsformeln auf, die nicht immer unmittelbar aus den Differentiationsformeln ablesbar sind:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \ln z \, dz &= z \ln z - z, \\ \text{b) } \int \tan z \, dz &= -\ln |\cos z|, \\ \text{c) } \int \cot z \, dz &= \ln |\sin z|, \\ \text{d) } \int \tanh z \, dz &= \ln |\cosh z|, \\ \text{e) } \int \coth z \, dz &= \ln |\sinh z|, \\ \text{f) } \int \arcsin z \, dz &= z \arcsin z + \sqrt{1-z^2}, \\ \text{g) } \int \arctan z \, dz &= z \arctan z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2), \end{aligned} \quad (1.7.129)$$



$$\begin{aligned}
\text{h) } \int \sin^2 z \, dz &= \frac{1}{2}(z - \sin z \cos z), \\
\text{i) } \int \cos^2 z \, dz &= \frac{1}{2}(z + \sin z \cos z), \\
\text{j) } \int \frac{dz}{\sin^2 z} &= -\cot z, & \text{k) } \int \frac{dz}{\cos^2 z} &= \tan z, & (1.7.129) \\
\text{l) } \int \frac{dz}{\sin z} &= \ln \tan \frac{z}{2}, \\
\text{m) } \int \frac{dz}{\sin z \cos z} &= \ln \tan z.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{a) } \int \frac{dz}{z} &= \ln z, \\
\text{b) } \int \frac{z \, dz}{1+z} &= z - \ln(1+z), & (1.7.130) \\
\text{c) } \int \frac{dz}{1-z^2} &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \operatorname{artanh} z \quad \text{für } |z| < 1, \\
\text{d) } \int \frac{dz}{1-z^2} &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \operatorname{arcoth} z \quad \text{für } |z| > 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{a) } \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} &= \arccos \frac{1}{z}, \\
\text{b) } \int \sqrt{z^2+1} \, dz &= \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} z + \frac{z}{2} \sqrt{z^2+1}, & (1.7.131) \\
\text{c) } \int \sqrt{z^2-1} \, dz &= -\frac{1}{2} \operatorname{arcosh} z + \frac{z}{2} \sqrt{z^2-1}, \\
\text{d) } \int \sqrt{1-z^2} \, dz &= \frac{1}{2} \arcsin z + \frac{z}{2} \sqrt{1-z^2}.
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + 2bz + c} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{b^2-c}} \ln \frac{z+b-\sqrt{b^2-c}}{z+b+\sqrt{b^2-c}} \\ \quad \text{für } c < b^2, \\ \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \arctan \left( \frac{z+b}{\sqrt{c-b^2}} \right) \\ \quad \text{für } c > b^2. \end{cases} \quad (1.7.132)$$

$$\int \frac{(az+b) \, dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{z_1-z_2} [(az_1+b) \ln(z-z_1) - (az_2+b) \ln(z-z_2)]. \quad (1.7.133)$$

$$\int \frac{dz}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} = \frac{z}{a^2 \sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (1.7.134)$$

$$\text{a) } \int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + 2bz + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( b + az + \sqrt{a} \sqrt{az^2 + 2bz + c} \right),$$

$$(a > 0, b^2 - ac \neq 0),$$

$$\text{b) } \int \frac{dz}{\sqrt{-az^2 + 2bz + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{az - b}{\sqrt{b^2 + ac}}$$

$$(a > 0, b^2 + ac \neq 0), \quad (1.7.135)$$

$$\text{c) } \int z e^{-z^2} dz = -\frac{1}{2} e^{-z^2},$$

$$\text{d) } \int z^3 e^{-z^2} dz = -\frac{1}{2} e^{-z^2} (z^2 + 1).$$

Auch die Kenntnis von bestimmten Integralen ist in der Physik oft erforderlich. Wir geben einige wichtige bestimmte Integrale an:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)},$$

$$(1.7.136)$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{\sin(at)}{t} dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \left[ \frac{\sin\left(\frac{at}{2}\right)}{\frac{at}{2}} \right]^2 d\left(\frac{at}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } a > 0, \\ 0 & \text{für } a = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a < 0. \end{cases} \quad (1.7.137)$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} \frac{\cos(at)}{t} dt = \infty,$$

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt &= \int_0^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \quad (m, n = 0, \pm 1, \dots), \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7.138)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (1.7.139)$$

$$\begin{aligned} a) \int_0^{\infty} e^{-t^n} dt &= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\Gamma(x) \text{ Gammafunktion}), \\ b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} t dt = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right), \\ c) \int_0^1 \frac{dt}{1-t^3} &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{3}} t dt = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right), \\ d) \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t^3}} &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{3}} t dt = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt[3]{4}} \Gamma^3\left(\frac{2}{3}\right), \\ e) \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} t dt = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right). \end{aligned} \quad (1.7.140)$$

$$\begin{aligned} a) \int_0^{\infty} t^n e^{-yt} dt &= \frac{n!}{y^{n+1}} \quad (\text{ganzzahliges } n \geq 0), \\ b) \int_0^{\infty} t^{2n} e^{-xt^2} dt &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1} x^{n+\frac{1}{2}}}, \\ c) \int_0^{\infty} t^{2n+1} e^{-xt^2} dt &= \frac{n!}{2x^{n+1}} \quad (x > 0, \text{ ganzzahliges } n \geq 0), \end{aligned} \quad (1.7.141)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2 t^2 - \frac{y^2}{t^2}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} e^{-2xy} \quad (x > 0, y \geq 0). \quad (1.7.142)$$

$$\text{a) } \int_0^{\infty} t^z e^{-\zeta t} dt = \frac{1}{\zeta^{z+1}} \Gamma(z+1) \quad (\operatorname{Re} z > -1),$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} t^\zeta e^{-zt^2} dt = \frac{1}{2} z^{-\frac{\zeta+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\zeta+1}{2}\right) \quad (\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} \zeta > -1), \quad (1.7.143)$$

$$\text{c) } \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (0 < \operatorname{Re} z < 1),$$

$$\text{d) } \int_0^{\infty} \frac{\cos(zt)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|z|},$$

$$\text{e) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+z \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-z^2}} \quad (|z| < 1), \quad (1.7.143)$$

$$\text{f) } \int_0^{2\pi} \ln(1+z \cos t) dt = 2\pi \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{2}\right) \quad (|z| < 1).$$

Schließlich erinnern wir noch an die Differentiationsformel für Parameterintegrale

$$\frac{d}{dt} \int_{g(t)}^{h(t)} f(x, t) dx = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + h'(t) f(h(t), t) - g'(t) f(g(t), t). \quad (1.7.144)$$

### 1.7.9 Distributionen

Die Distributionen, die den Rahmen des klassischen mathematischen Funktionsbegriffes übersteigen (von den Physikern aber dennoch als Funktionen bezeichnet, z. B. Knickfunktion, Sprungfunktion, Deltafunktion), stießen zunächst in der Mathematik auf Zurückhaltung. Ihre Bewährung sowohl bei allgemeinen theoretischen Untersuchungen als auch bei der Lösung angewandter Probleme führte schließlich zu einer strengen mathematischen Rechtfertigung (Funktionalauffassung von L. SCHWARTZ oder Folgenauffassung von J. MIKUSIŃSKI). Ohne darauf näher eingehen zu können, soll im folgenden der Rechenformalismus im Sinne von Verfahrensregeln wiedergegeben werden, die mit gebührender Vorsicht zu handhaben sind.

### a) Physikalisch wichtige 1-dimensionale Distributionen

In den Abb. 1.2 bis 1.5 haben wir angedeutet, wie man sich die skizzierten Distributionen durch einen Grenzübergang entstanden denken kann. Dabei haben wir die Singularität an die Stelle  $x = \xi$  gelegt.

#### **Knickfunktion**

$$K(x - \xi) = K(\xi - x) = \frac{|x - \xi|}{2} = \begin{cases} -\frac{x - \xi}{2} & \text{für } x < \xi, \\ 0 & \text{für } x = \xi, \\ \frac{x - \xi}{2} & \text{für } x > \xi. \end{cases} \quad (1.7.145)$$

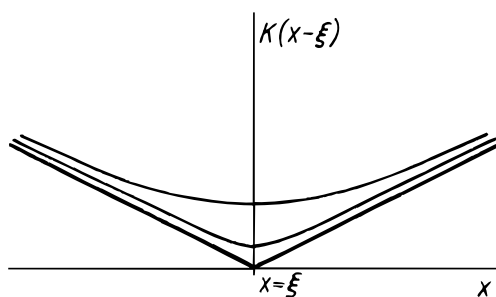


Abbildung 1.2: Knickfunktion

#### **Heavisidesche Sprungfunktion**

Diese Funktion ist die erste Ableitung der Knickfunktion:

$$\Theta(x - \xi) = -\Theta(\xi - x) = \frac{\partial K(x - \xi)}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für } x < \xi, \\ 0 & \text{für } x = \xi, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x > \xi. \end{cases} \quad (1.7.146)$$

Es gelten folgende Formeln:

a)  $\Theta(x) + \Theta(-x) = 0,$

b)  $\Theta(x) \cdot \Theta(-x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -\frac{1}{4} & \text{für } x > 0, \end{cases} \quad (1.7.147)$

c)  $\Theta(x)^2 = -\Theta(x)\Theta(-x).$

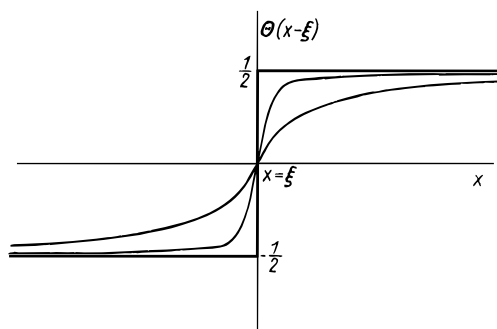


Abbildung 1.3: Heavisidesche Sprungfunktion

**Diracsche Deltafunktion**

Die Diracsche Deltafunktion entspricht der ersten Ableitung der Heavisideschen Sprungfunktion:

$$\delta(x - \xi) = \delta(\xi - x) = \frac{\partial \Theta(x - \xi)}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq \xi, \\ \infty & \text{für } x = \xi. \end{cases} \quad (1.7.148)$$

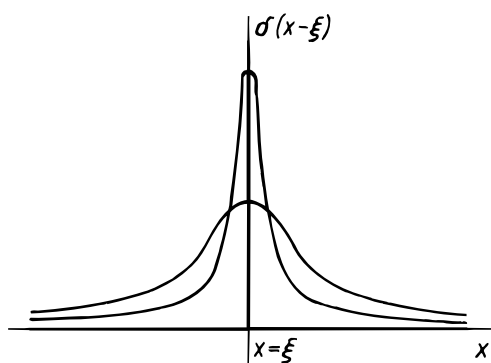


Abbildung 1.4: Diracsche Deltafunktion

Daraus resultiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) dx = 1 \quad (1.7.149)$$

und für eine in  $x = \xi$  reguläre Funktion  $f(x)$

$$\begin{aligned} \text{a) } & f(x)\delta(x - \xi) = f(\xi)\delta(x - \xi), \\ \text{b) } & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - \xi) dx = f(\xi). \end{aligned} \quad (1.7.150)$$

Die letzte Gleichung kann man auch als Integralgleichung für  $f(x)$  mit dem symmetrischen Einheitskern  $\delta(x - \xi)$  ansehen.

Die Formel (1.7.150b) ist auch auf  $f(x) \rightarrow \delta(x - \eta)$  anwendbar und liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \eta)\delta(x - \xi) dx = \delta(\xi - \eta). \quad (1.7.151)$$

Ferner notieren wir Grenzwertdarstellungen sowie die Reihendarstellung und Integraldarstellung der Deltafunktion:

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(tx)}{x}, \\ \text{b) } \delta(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(tx)}{tx^2}, \\ \text{c) } \delta(x) &= \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i nx}{l}}, \\ \text{d) } \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} d\eta. \end{aligned} \quad (1.7.152)$$

Die letzte Formel haben wir schon als (1.7.65) kennengelernt.

Bei praktischen Rechnungen wendet man oft die Formeln

$$\begin{aligned} \text{a) } \Theta(x)\delta(x) &= 0, \\ \text{b) } x\delta(x) &= 0, \\ \text{c) } |x|\delta(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7.153)$$

an. Ebenfalls häufige Benutzung erfährt die Zerlegungsformel

$$\begin{aligned} \delta[\Phi(x)] &= \sum_s \frac{\delta(x - x_s)}{|\Phi'(x)|} \\ &= \sum_s \frac{\delta(x - x_s)}{|\Phi'(x_s)|} \quad \left( \Phi' = \frac{d\Phi(x)}{dx} \right). \end{aligned} \quad (1.7.154)$$

Dabei ist  $\Phi(x)$  eine reelle differenzierbare Funktion, für die die Gleichung  $\Phi(x_s) = 0$  nur die einfachen reellen Wurzeln  $x_s$  besitzen möge. Bei mehrfachen Wurzeln verliert diese Zerlegungsformel ihren Sinn.

Wählt man  $\Phi(x) = ax$  ( $a$  reell), so folgt

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} = \begin{cases} \frac{\delta(x)}{a} & \text{für } a > 0, \\ -\frac{\delta(x)}{a} & \text{für } a < 0. \end{cases} \quad (1.7.155)$$

Weiter ergibt die Wahl  $\Phi(x) = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$  die Relation

$$\begin{aligned}\delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \\ &= \frac{1}{2|x|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)].\end{aligned}\tag{1.7.156}$$

Setzt man  $a = 0$ , so resultiert aus  $\Phi = x^2 = 0$  eine Doppelwurzel, so daß die Zerlegungsformel nicht mehr unmittelbar angewendet werden darf. Aus der zweiten Fassung von (1.7.154) gewinnt man aber durch Grenzübergang

$$\delta(x^2) = \frac{\delta(x)}{|x|}.\tag{1.7.157}$$

Die formale Fortsetzung der Deltafunktion ins Komplexe führt zur Funktion  $\delta(z)$ , die zwei Pole 1. Ordnung in  $i\varepsilon$  und  $-i\varepsilon$  ( $\varepsilon$  infinitesimal) mit den Residuen  $\frac{1}{2\pi i}$  und  $-\frac{1}{2\pi i}$  besitzt. Die Integration um die Pole ist dabei zwischen diesen Singularitäten hindurchzuführen. Man zerlegt die komplexe Deltafunktion in zwei komplexe Funktionen mit jeweils einem Pol:

$$\delta(z) = \delta_+(z) + \delta_-(z),\tag{1.7.158}$$

wobei

$$\begin{aligned}\text{a) } \delta_+(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{z + i\varepsilon} \right), \\ \text{b) } \delta_-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{z - i\varepsilon} \right)\end{aligned}\tag{1.7.159}$$

ist. Es gelten die Relationen

$$\delta_+(z) - \delta_-(z) = -\frac{1}{i\pi z}\tag{1.7.160}$$

und

$$\begin{aligned}\text{a) } \delta_+(z) &= \frac{1}{2}\delta(z) - \frac{1}{2\pi i z} = \delta_-(-z) = \delta_-(z)^* = (\delta_-(z^*))^*, \\ \text{b) } \delta_-(z) &= \frac{1}{2}\delta(z) + \frac{1}{2\pi i z} = \delta_+(-z) = \delta_+(z)^* = (\delta_+(z^*))^*\end{aligned}\tag{1.7.161}$$

sowie die Integraldarstellungen

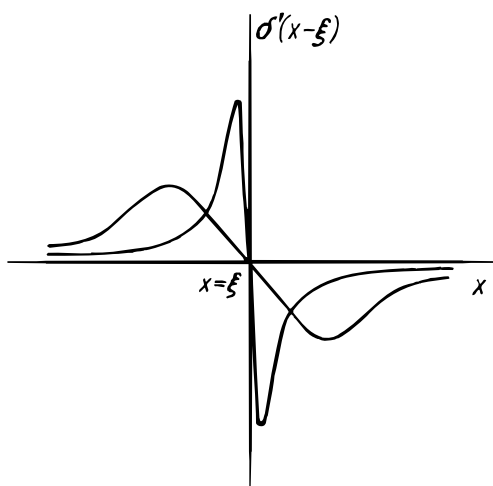
$$\begin{aligned}\text{a) } \delta_+(z) &= \int_0^\infty e^{2\pi i z \xi} d\xi, \\ \text{b) } \delta_-(z) &= \int_0^\infty e^{-2\pi i z \xi} d\xi.\end{aligned}\tag{1.7.162}$$



**Dipolfunktion**

Die erste Ableitung der Diracschen Deltafunktion nennen wir Dipolfunktion, da ihr Verlauf (als Grenzprozeß) physikalisch der Ladungsverteilung in einem elektrischen Dipol zugeordnet werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta(x - \xi)}{\partial x} &= -\frac{\partial \delta(\xi - x)}{\partial x} = -\frac{\partial \delta(x - \xi)}{\partial \xi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } x < \xi, \\ \infty & \text{für } x = \xi - \varepsilon, \\ -\infty & \text{für } x = \xi + \varepsilon, \\ 0 & \text{für } x > \xi. \end{cases} \quad (\varepsilon \text{ infinitesimal}) \end{aligned} \quad (1.7.163)$$



**Abbildung 1.5:** Dipolfunktion

Dipolfunktion und Deltafunktion sind in den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \text{a) } x\delta'(x) + \delta(x) &= 0 & \text{bzw.} \\ \text{b) } |x|\delta'(x) + 2\Theta(x)\delta(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7.164)$$

für die Deltafunktion miteinander verknüpft, wobei aus der ersten

$$x\delta''(x) + 2\delta'(x) = 0 \quad (1.7.165)$$

resultiert. Weiter gilt

$$a|a|\delta'(ax) = \delta'(x). \quad (1.7.166)$$

Mittels (1.7.153b) folgt aus (1.7.164a) und (1.7.165)

$$\text{a) } x^2\delta'(x) = 0, \quad \text{b) } x^3\delta''(x) = 0 \quad \text{usw.} \quad (1.7.167)$$

Aus (1.7.150a) findet man für  $f(x) = \delta(x)$  durch Differenzieren

$$\delta'(x)\delta(x - \xi) = \delta(x)\delta'(\xi) + \delta(\xi)\delta'(x). \quad (1.7.168)$$

Durch partielle Integration entsteht vermöge (1.7.163)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\partial \delta(x - \xi)}{\partial \xi} d\xi = -\frac{df(x)}{dx}. \quad (1.7.169)$$

Es ist in diesem Zusammenhang interessant darauf hinzuweisen, daß das Quadrat der Deltafunktion in diesem Kalkül nicht erklärt wird. Würde man probeweise das Quadrieren der Deltafunktion zulassen, so bekäme man aus (1.7.164a) die problematischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{a) } x \frac{d\delta(x)^2}{dx} + 2\delta(x)^2 &= 0 \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } \delta(x)^2 &= -\frac{d}{dx} [x\delta(x)^2], \end{aligned} \quad (1.7.170)$$

woraus durch Integrieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)^2 dx = 0 \quad (1.7.171)$$

entstehen würde.

### b) Physikalisch wichtige $n$ -dimensionale Distributionen

Aus der 1-dimensionalen Deltafunktion kann man eine  $n$ -dimensionale Deltafunktion unter Verwendung der kartesischen Koordinaten  $\{x_k\}$  durch Produktbildung aufbauen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta^{(n)}(x_k) &= \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n) \quad \text{mit} \\ \text{b) } \int_{V_\infty} \delta^{(n)}(x_k) d^{(n)}x &= 1 \\ (V_\infty \text{ unendlich großer Integrationsbereich,} \\ d^{(n)}x &= dx_1 dx_2 \dots dx_n). \end{aligned} \quad (1.7.172)$$

Beispiele dafür sind die 2-dimensionale und 3-dimensionale Deltafunktion:

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta^{(2)}(x, y) &= \delta(x)\delta(y) \quad \text{mit} \\ \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(2)}(x, y) dx dy &= 1, \end{aligned} \quad (1.7.173)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta^{(3)}(x, y, z) &= \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad \text{mit} \\ \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(3)}(x, y, z) dx dy dz &= 1. \end{aligned} \quad (1.7.174)$$

**Eben-radiale Deltafunktion und eben-radiale Sprungfunktion**

Beim Übergang von den 2-dimensionalen kartesischen Koordinaten  $\{x, y\}$  zu den ebenen Polarkoordinaten  $\{R, \Phi\}$  ist die Einführung der eben-radialen Deltafunktion und eben-radialen Sprungfunktion gemäß

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta(R) &= \pi R \delta^{(2)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } R > 0, \\ \infty & \text{für } R = 0, \end{cases} \\ \text{b) } \delta^{(2)}(x, y) &= \frac{1}{\pi R} \delta(R), & \text{c) } \delta(R) &= \frac{d\Theta(R)}{dR}, \\ \text{d) } \Theta(R) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } R > 0, \\ 0 & \text{für } R = 0, \end{cases} & \text{e) } \int_0^\infty \delta(R) dR &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.7.175)$$

angebracht.

In ebenen Polarkoordinaten nimmt die Poisson-Gleichung für die 2-dimensionale Green-Funktion  $G^{(2)}(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 G^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^{(2)}}{\partial y^2} = -\delta^{(2)}(x, y), \quad (1.7.176)$$

wegen der Rotationssymmetrie der Inhomogenität die Gestalt

$$\frac{\partial^2 G^{(2)}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial G^{(2)}}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial G^{(2)}}{\partial R} \right) = -\frac{1}{\pi R} \delta(R) \quad (1.7.177)$$

an, woraus sich mathematisch die Green-Funktion

$$G^{(2)} = -\frac{1}{2\pi} \ln R + \text{Lösung der homogenen Gleichung} \quad (1.7.178)$$

als Lösung der inhomogenen Poisson-Gleichung (1.7.177) erschließen läßt, wie in der mathematischen Literatur gezeigt wird. Daß  $\ln R$  für  $R \neq 0$  die homogene Differentialgleichung (2-dimensionale Laplace-Gleichung) löst, bestätigt man durch Einsetzen.

**Räumlich-radiale Deltafunktion und räumlich-radiale Sprungfunktion**

Geht man von den 3-dimensionalen kartesischen Koordinaten  $\{x, y, z\}$  zu den räumlichen Polarkoordinaten  $\{r, \vartheta, \varphi\}$  über, so empfiehlt sich die Einführung der räumlich-radialen Deltafunktion  $\delta(r)$  und der räumlich-radialen Sprungfunktion  $\Theta(r)$ . Da diese Prozedur analog zum vorhergehenden Fall verläuft, verzichten wir auf den Begleittext, sondern geben gleich

eine entsprechende Formelzusammenstellung an:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \delta(r) &= 2\pi r^2 \delta^{(3)}(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{für } r > 0, \\ \infty & \text{für } r = 0, \end{cases} \\
 \text{b) } \delta^{(3)}(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi r^2} \delta(r), \\
 \text{c) } \delta(r) &= \frac{d\Theta(r)}{dr}, \\
 \text{d) } \Theta(r) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } r > 0, \\ 0 & \text{für } r = 0, \end{cases} \\
 \text{e) } \int_0^\infty \delta(r) dr &= \frac{1}{2};
 \end{aligned} \tag{1.7.179}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta G^{(3)} &= \frac{\partial^2 G^{(3)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^{(3)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G^{(3)}}{\partial z^2} \\
 &= \frac{\partial^2 G^{(3)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial G^{(3)}}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G^{(3)}}{\partial r} \right) \\
 &= -\delta^{(3)}(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi r^2} \delta(r).
 \end{aligned} \tag{1.7.180}$$

Daraus resultiert für die 3-dimensionale Green-Funktion

$$G^{(3)} = \frac{1}{4\pi r} + \text{Lösung der homogenen Gleichung.} \tag{1.7.181}$$

Man bestätigt durch Einsetzen, daß  $1/r$  für  $r \neq 0$  die homogene Differentialgleichung (3-dimensionale Laplace-Gleichung) löst.

### Dirichlet-Funktion

Die Dirichlet-Funktion ist von der Art einer 2-dimensionalen Sprungfunktion. Sie wird durch die Integraldarstellung

$$\Delta(x, y) = \int_0^\infty \frac{\sin(x\xi) \cos(y\xi)}{\xi} d\xi \tag{1.7.182}$$

definiert. Längs der Geraden  $y = \pm x$  entsteht  $\Delta(x, y) = \pm \frac{\pi}{4}$ . In den verschiedenen Oktanten nimmt sie die Werte 0 oder  $\pm \frac{\pi}{2}$  an. Mit der Deltafunktion bzw. Sprungfunktion besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \Delta(x, 0) &= \pi \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi - \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \\
 \text{b) } \Theta(x) &= \frac{1}{\pi} \Delta(x, 0).
 \end{aligned} \tag{1.7.183}$$

### 1.7.10 Allgemeine Fourier-Entwicklung

Im Abschnitt 1.7.3 haben wir die Fourier-Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen kennengelernt. Diese Methode kann auf allgemeine vollständige Orthonormalsysteme verallgemeinert werden.

Die ein teilweise diskretes (Parameter  $\Omega$ ) und ein teilweise kontinuierliches (Parameter  $k_j$ ) Spektrum aufweisenden Funktionen der Koordinaten  $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$

$$\begin{aligned} \varphi_\Omega(x^i) & \quad (\Omega = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{und} \\ \varphi(x^i, k_j) & \quad (A_j \leq k_j \leq B_j \quad \text{mit} \quad j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.7.184)$$

eines Funktionensystems heißen voneinander linear unabhängig, wenn aus

$$\sum_{\Omega} \alpha_{\Omega} \varphi_{\Omega}(x^i) + \int_{K_n} \alpha(k_j) \varphi(x^i, k_j) d^{(n)}k = 0 \quad (1.7.185)$$

( $d^{(n)}k = dk_1 dk_2 \dots dk_n$ ) die Ergebnisse

$$\alpha_{\Omega} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha(k_j) = 0 \quad (1.7.186)$$

folgen. Das Integral erstreckt sich dabei über den  $n$ -dimensionalen Bereich  $K_n$ .

Das Grundintervall der Fourier-Entwicklung sei  $a^i \leq x^i \leq b^i$ . Erstrecken wir das korrespondierende  $n$ -fache Integral über den Bereich  $V_n$  und bedienen wir uns der Skalarprodukt-Symbolik

$$\begin{aligned} \text{a) } (f, g) &= \int_{V_n} f^*(x^i) g(x^i) d^{(n)}x \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } (f, g(k_j)) &= \int_{V_n} f^*(x^i) g(x^i, k_j) d^{(n)}x, \end{aligned} \quad (1.7.187)$$

so lautet die Orthonormalitätsrelation für ein Funktionensystem der obigen Art:

$$\begin{aligned} \text{a) } (\varphi_{\Omega}, \varphi_{\Lambda}) &= \delta_{\Omega\Lambda}, \\ \text{b) } (\varphi_{\Omega}, \varphi(k_j)) &= 0, \\ \text{c) } (\varphi(k_j), \varphi(k_l)) &= \delta^{(n)}(k_j - k_l). \end{aligned} \quad (1.7.188)$$

Das kontinuierliche Spektrum wird also mit Hilfe der Diracschen Deltafunktion orthonormiert.

Das Funktionensystem  $\{\varphi_{\Omega}(x^i), \varphi(x^i, k_j)\}$  heißt vollständig, wenn die Vollständigkeitsrelation

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega} \varphi_{\Omega}^*(\xi^i) \varphi_{\Omega}(x^i) + \int_{K_n} \varphi^*(\xi^i, k_j) \varphi(x^i, k_j) d^{(n)}k \\ = \delta^{(n)}(x^i - \xi^i) \end{aligned} \quad (1.7.189)$$

gilt. Die Erfüllung der Vollständigkeitsrelation ist Voraussetzung dafür, daß sich eine allgemeine Funktion  $f(x^i)$  unter den üblichen Voraussetzungen nach dem verwendeten Funktionensystem in der Form

$$f(x^i) = \sum_{\Omega} \alpha_{\Omega} \varphi_{\Omega}(x^i) + \int_{K_n} \alpha(k_j) \varphi(x^i, k_j) d^{(n)}k \quad (1.7.190)$$

entwickeln läßt, wobei sich beispielsweise Periodizitätseigenschaften vom Funktionensystem auf die zu entwickelnde Funktion übertragen. Die Fourier-Koeffizienten  $\alpha_{\Omega}$  und  $\alpha(k_j)$  haben die Gestalt

$$\text{a) } \alpha_{\Omega} = (\varphi_{\Omega}, f), \quad \text{b) } \alpha(k_j) = (\varphi(k_j), f). \quad (1.7.191)$$

Für  $\alpha(k_j)$  ist der Terminus Spektralfunktion geläufig.

Geht man mit den Fourier-Koeffizienten (1.7.191) in die Entwicklung (1.7.190) ein und benutzt man die Vollständigkeitsrelation (1.7.189), so resultiert in der Tat die Identität

$$f(x^i) = \int_{V_n} f(\xi^i) \delta^{(n)}(x^i - \xi^i) d^{(n)}\xi. \quad (1.7.192)$$

Vergleicht man (1.7.189) mit (1.7.190), so erkennt man, daß man die Vollständigkeitsrelation auch als Fourier-Entwicklung der Deltafunktion interpretieren kann.

Aus (1.7.190) gewinnt man bei Verwendung von (1.7.188) die Parseval-Formel

$$(f, f) = \sum_{\Omega} \alpha_{\Omega}^* \alpha_{\Omega} + \int_{K_n} \alpha^*(k_j) \alpha(k_j) d^{(n)}k. \quad (1.7.193)$$

Bei all den obigen Darlegungen wurde die Konvergenz der angesetzten Reihen, die Darstellungsrichtigkeit sowie die quadratische Integrierbarkeit, d. h. die Existenz von  $(f, f)$ , stillschweigend vorausgesetzt. Eine detaillierte Behandlung dieser Fragen führt hier zu weit. Wir waren aber im Sinne einer Exemplifizierung auf diese Dinge bei der Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen näher eingegangen.

In der Spezialisierung auf das System der trigonometrischen Funktionen gilt im diskreten Fall die Zuordnung

$$\varphi_{\Omega}(x^i) \rightarrow \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} e^{\frac{2\pi i n x}{l}} \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.7.194)$$

so daß sich die Orthonormalität (1.7.188a) als

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \frac{1}{l} \int_0^l e^{\frac{2\pi i (n-m)x}{l}} dx = \delta_{nm} \quad (\text{siehe 7.60b}) \quad (1.7.195)$$

und die Vollständigkeitsrelation (1.7.189) als

$$\frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n(x-\xi)}{l}} = \delta(x - \xi) \quad (\text{siehe 7.62}) \quad (1.7.196)$$

schreiben.

Im kontinuierlichen trigonometrischen Fall hatten wir es statt mit Fourier-Reihen mit Fourier-Integralen zu tun, was dem Grenzübergang  $l \rightarrow \infty$  entsprach. Dann resultiert aus (1.7.195) die Orthonormalitätsrelation

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi-\eta)x} dx = \delta(\xi - \eta) \quad (1.7.197)$$

und aus (1.7.196) die Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk = \delta(x - \xi), \quad (1.7.198)$$

d. h., beide Relationen münden in dieselbe Formel ein.

### 1.7.11 Hilbert-Raum

D. HILBERT (1862–1943) hat, ausgehend von der allgemeinen Fourier-Entwicklung, in gewisser Analogie zum Vektorraum eingehend lineare Funktionenräume untersucht. Danach werden die Begriffe des Funktionenraumes zu den Begriffen des Vektorraumes, wie in Tabelle 1.1 angezeigt, in Beziehung gesetzt:

**Tabelle 1.1:** Begriffe in Funktionenraum und Hilbertraum

Funktionenraum	Vektorraum
orthonormales Funktionensystem (Basis $\varphi_{\Omega}$ )	orthonormales Basisvektorsystem (Basis $e_i$ )
allgemeine Funktion $f$ (aufgespannt im Funktionenraum)	allgemeiner Vektor $\mathbf{a}$ (aufgespannt im Vektorraum)
Fourier-Koeffizienten $\alpha_{\Omega}$	Vektorkomponenten $a_i$
Skalarprodukt $(f, g)$ im Funktionenraum	Skalarprodukt $(\mathbf{a}\mathbf{b})$ im Vektorraum

Die bisher verwendeten Größen  $\varphi_{\Omega}$  waren konkrete Funktionen und die Größen  $(f, g)$  konkrete Integrale. Man hat später den Abstraktionsgrad so weit getrieben, daß man die Größen  $\varphi_{\Omega}$  als abstrakte Basiselemente abstrakter Räume auffaßte, die man axiomatisch klassifizierte, wobei eine Reihe von Grundbegriffen, mit denen wir uns im folgenden befassen wollen, eine wichtige Rolle spielen.

#### **Linearer Raum**

In einem linearen Raum ist erstens die Multiplikation der Elemente  $f = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$  des Raumes mit komplexen Zahlen, z. B.  $z, \zeta$ , erklärt, so daß  $zf$  eindeutig ein Element des Raumes ist, und zweitens ist die Addition von je zwei Elementen  $f_1$  und  $f_2$  des Raumes erklärt, so

daß  $f_1 + f_2$  eindeutig zu einem Element des Raumes führt. Auf der Basis dieser beiden als stetig anzusehenden Operationen wird die Linearität des Raumes durch folgende Axiomatik definiert:

1.  $\zeta(zf) = (\zeta z)f$  (Assoziativität hinsichtlich Multiplikation),
2.  $1 \cdot f = f$  (1 ist die reelle Zahl Eins),
3. Existenz eines Nullelements  $\mathbb{0}$  mit der Eigenschaft  $0 \cdot f = \mathbb{0}$   
(0 ist die reelle Zahl Null),
4.  $(\zeta + z)f = \zeta f + zf$  (Distributivität hinsichtlich Zahlenaddition),
5.  $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$  (Kommutativität der Elementeaddition),
6.  $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$  (Assoziativität  
hinsichtlich Addition),
7.  $z(f_1 + f_2) = zf_1 + zf_2$  (Distributivität  
hinsichtlich Elementeaddition).

(1.7.199)

### Lineare Unabhängigkeit

Die Elemente  $f = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$  eines linearen Raumes heißen linear unabhängig, wenn aus der Gleichung ( $c_i$  komplexe Zahlen)

$$\sum_i c_i f_i = \mathbb{0} \quad (1.7.200)$$

für die Koeffizienten  $c_i = 0$  folgt.

### Dimensionszahl

Die Dimensionszahl eines linearen Raumes ist durch die maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente bestimmt.

### Metrik

Den abstrakten Abstand zweier Elemente  $f_1$  und  $f_2$  eines linearen Raumes definiert man mittels einer reellen Abstandsfunktion (Metrik)  $d[f_1, f_2]$ , deren konkrete Gestalt offengelassen wird. Dabei sollen die folgenden Axiome gelten:

- a)  $d[f_1, f_2] = d[f_2, f_1] \geq 0$ ,
  - b)  $d[f_1, f_2] = 0$ , wenn  $f_1 = f_2$ ,
  - c)  $d[f_1, f_2] \leq d[f_1, f_3] + d[f_3, f_2]$
- (Dreiecksungleichung).

(1.7.201)

Diese Axiomatik entspricht einer positiv-semidefiniten Metrik. Eine solche wird für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik benötigt. In der Quantenfeldtheorie werden auch indefinite Metriken (Auftreten von sog. Geisterzuständen) untersucht.

Ein linearer Raum mit Metrik heißt metrisiert.



**Skalarprodukt**

Als Skalarprodukt der beiden Elemente  $f_1$  und  $f_2$  eines linearen Raumes bezeichnet man die abstrakte Größe  $(f_1, f_2)$ , die eine komplexe Zahl ist. Das Skalarprodukt soll folgender Axiomatik genügen (Stern bedeutet komplexe Konjugation):

1.  $(f_1, f_2)^* = (f_2, f_1)$ ,
  2.  $(f_1, \alpha f_2) = \alpha (f_1, f_2)$   
( $\alpha$  konstante komplexe Zahl),
  3.  $(f_1, f_2 + f_3) = (f_1, f_2) + (f_1, f_3)$ ,
  4.  $(f, f) \geq 0$ ,
- wobei das Gleichheitszeichen für das Nullelement  $f = \mathbb{0}$  gilt.

(1.7.202)

In der Regel wird die oben eingeführte Abstandsfunktion (Abstand) auf der Basis des Skalarprodukts durch

$$d[f_1, f_2] = \sqrt{(f_1 - f_2, f_1 - f_2)} \quad (1.7.203)$$

definiert.

Gilt für zwei Elemente  $f_1$  und  $f_2$

$$(f_1, f_2) = 0, \quad (1.7.204)$$

so heißen die Elemente  $f_1$  und  $f_2$  zueinander orthogonal.

**Norm**

Unter der Norm (Betrag) eines Elements versteht man im Falle positiv-semidefiniter Metrik die nichtnegative reelle Zahl

$$|f| = \sqrt{(f, f)}. \quad (1.7.205)$$

Ein linearer Raum, dessen Elementen eine Norm zugeordnet ist, wird normierter Raum genannt.

Im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik hat man dort die diesbezüglichen diskreten Elemente auf eins zu normieren:  $|f| = 1$  (Eins-Normierung).

Es gilt die Cauchysche Ungleichung

$$|(f, g)| \leq |f| \cdot |g|. \quad (1.7.206)$$

**Vollständigkeit**

Eine Folge von Elementen  $f_n$  heißt konvergent, wenn der Abstand  $|f_n - f_m|$  zweier Elemente der Folge für genügend große  $n$  und  $m$  beliebig klein gemacht werden kann. Ein linearer,

metrisierter und normierter Raum heißt vollständig, wenn für jede konvergente Folge  $f_n$  ein Element  $f$  dieses Raumes existiert, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad (1.7.207)$$

gilt. Ist ein solcher Raum nicht von selbst vollständig, so kann er dadurch vervollständigt werden, daß man die Grenzwerte der konvergenten Folgen definitorisch mit zum Raum dazunimmt.

### **Separabilität**

Ein linearer, metrisierter und normierter Raum heißt separabel, wenn zu jedem Element  $f$  des Raumes eine abzählbare Menge  $\{f_n\}$  von Elementen des Raumes existiert, die  $f$  beliebig nahe kommen, d. h., daß der Abstand  $|f - f_n|$  beliebig klein zu machen ist.

### **Hilbert-Raum**

Der Hilbert-Raum ist durch folgende Eigenschaften definiert:

1. Linearität,
2. Existenz des Begriffes des Skalarprodukts,
3. Metrisierung (Existenz eines Abstandsbegriffs),
4. Normierung (Zuordnung einer Norm zu einem Element), (1.7.208)
5. Vollständigkeit,
6. Separabilität,
7. unendliche Dimensionszahl (im Allgemeinform).

Bei der Definition eines Hilbert-Raumes im erweiterten Sinne verzichtet man oft auf die Eigenschaften 5, 6 und 7. Bei Hilbert-Räumen mit endlicher Dimensionszahl sind die Eigenschaften 5 und 6 Folgerungen der vorherstehenden Eigenschaften.

## **1.8 Transformationen**

In der Physik spielen Transformationen der verschiedensten Art eine herausragende Rolle. Bisher lernten wir als Darstellungen von Gruppen nur im Sinne einer Erwähnung die Koordinatentransformationen, jedoch gründlicher in der Theorie der Matrizen die Äquivalenztransformationen und in der Funktionentheorie zur Beschreibung der konformen Abbildung die Konformtransformationen kennen. Neben den jetzt eingehender zu behandelnden Koordinatentransformationen beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt auch mit den Berührungstransformationen und den Integraltransformationen.

### 1.8.1 Koordinatentransformationen

#### a) Allgemeine $n$ -dimensionale Koordinatentransformation

Wir legen, anknüpfend an Abschnitt 1.6.2, einen  $n$ -dimensionalen Raum zugrunde, in dem wir einen herausgegriffenen Punkt  $P$  durch die voneinander unabhängigen Koordinaten  $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ , die in der Regel krummlinig sind, festlegen. Mit Rücksicht auf die physikalische Anwendung ist die Benutzung oberer Indizes zweckmäßig. Auch hier mögen kleine lateinische Indizes die  $n$  Dimensionen des Raumes durchlaufen.

Wir führen nun folgende Koordinatentransformation aus:

$$x^{i'} = x^{i'}(x^j) = x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (1.8.1)$$

d. h. wir gehen von den ungestrichenen Koordinaten  $\{x^i\}$  zu den gestrichenen Koordinaten  $\{x^{i'}\}$  über. Dabei bewährt sich die Anbringung des Striches am Index außerordentlich. Die Transformationsfunktionen  $x^{i'}(x^j)$  mögen stetig differenzierbare Funktionen sein.

Die Umkehrtransformation schreiben wir als

$$x^i = x^i(x^{j'}) = x^i(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}). \quad (1.8.2)$$

Die Differentialquotienten kürzen wir mit

$$\text{a) } A_j^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}, \quad \text{b) } A_{j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \quad (1.8.3)$$

ab. Um die Existenz der Umkehrtransformation zu sichern, müssen wir von der Transformationsdeterminante (Funktionaldeterminante)

$$\det(A_j^{i'}) \neq 0 \quad (1.8.4)$$

fordern.

Für eine Koordinatentransformation obiger Art sind zwei verschiedene geometrische Deutungen geläufig:

1. Der im Raum fixierte Punkt  $P$  bleibt unverändert. Es werden lediglich die ihn festlegenden Koordinaten ausgetauscht. Dieser Koordinatenaustausch wird mit einem Wechsel der den Raum aufspannenden Basis verbunden (passive Interpretation).
2. Die gestrichenen Koordinaten werden auf die festgehaltene Basis bezogen, so daß der Punkt  $P$  in einen neuen Punkt  $\check{P}$  übergeht, also eine Verschiebung des Punktes erreicht wird (aktive Interpretation). Die Punktmannigfaltigkeit erfährt dabei eine Verzerrungsabbildung auf sich selbst.

Man nennt eine solche Klasse von Transformationen auch Punkttransformationen.

Die Koordinatentransformationen haben neben der Auswechslung der Funktionsargumente auch noch einen entscheidenden Einfluß auf geometrische Objekte (Tensoren, Spinoren usw.) über das diesen Objekten anhaftende Indexbild. Damit befassen wir uns bei der Abhandlung der geometrischen Objekte.

### b) Lineare $n$ -dimensionale Koordinatentransformationen

Die allgemeine inhomogene Transformation schreibt sich im Komplexen, wenn wir zunächst einmal die komplexen Koordinaten  $\zeta^i$  und  $\zeta^{i'}$  zulassen, in der Form

$$\zeta^{i'} = C_j^{i'} \zeta^j + \gamma^{i'}. \quad (1.8.5)$$

Dabei sind die komplexen Größen  $C_j^{i'}$  bzw.  $\gamma^{i'}$ , die die homogenen bzw. die inhomogenen Transformationen (Translationen) festlegen, Konstanten.

Ist die aus der Transformationsmatrix  $C = (C_j^{i'})$  gebildete Transformationsdeterminante

$$\tilde{C} = \det \left( C_j^{i'} \right) = 1, \quad (1.8.6)$$

so heißt die Transformation unimodular.

Ist die Transformationsmatrix  $C \rightarrow U = (U_j^{i'})$  unitär, d. h.

$$\text{a) } U^+ U = \mathbb{I} \quad \text{bzw.}$$

$$\text{b) } \sum_{j'=1}^n \left( U_j^{i'} \right)^* U_k^{j'} = \sum_{j'=1}^n \left( U_j^{i'} \right)^* U_k^{j'} = \delta_{ik}, \quad (1.8.7)$$

wobei  $(U_j^{i'})$  die inverse Transformationsmatrix ist, so folgt für die zugeordnete Transformationsdeterminante  $\tilde{U} = \det(U_j^{i'})$

$$\tilde{U}^* \tilde{U} = 1, \quad (1.8.8)$$

also gemäß (1.4.21)

$$\tilde{U} = e^{i\tilde{\Phi}} \quad (\tilde{\Phi} \text{ reell}). \quad (1.8.9)$$

Man nennt eine homogene Transformation mit unitärer Transformationsmatrix unitär und bezeichnet die ihr zugeordnete Gruppe als  $n$ -dimensionale unitäre Gruppe  $U[n]$ .

Für eine solche Transformation gilt die Forminvarianz

$$\sum_{i'=1}^n \left( \zeta^{i'} \right)^* \zeta^{i'} = \sum_{i=1}^n \left( \zeta^i \right)^* \zeta^i. \quad (1.8.10)$$

Die  $n^2$  komplexen Koeffizienten der unitären Transformation bedeuten  $2n^2$  reelle Parameter. Diese unterliegen gemäß (1.8.7b)  $n^2$  reellen Nebenbedingungen, so daß  $n^2$  unabhängige reelle Parameter vorliegen.

Fordert man zusätzlich noch die Unimodularität (1.8.6), so wird diese Zahl wegen (1.8.9) um einen weiteren reellen Parameter eingeschränkt. Man spricht dann von der speziellen unitären Transformation und bezeichnet die ihr zugeordnete Gruppe als  $n$ -dimensionale spezielle unitäre Gruppe  $SU[n]$ .

Beim Übergang ins Reelle ( $\zeta^i \rightarrow x^i$ ,  $\zeta^{i'} \rightarrow x^{i'}$ ,  $U_j^{i'} \rightarrow \Omega_j^{i'}$ ,  $U \rightarrow \Omega = (\Omega_j^{i'})$ ,  $\gamma^{i'} \rightarrow \alpha^{i'}$ ) entsteht aus der (homogenen) unitären Transformation die (homogene) reelle orthogonale

Transformation. Die ihr zugeordnete Gruppe heißt  $n$ -dimensionale orthogonale Gruppe  $O[n]$ . Die Formeln (1.8.5), (1.8.7) und (1.8.8) schreiben sich dann in der Form

$$x^{i'} = \Omega^{i'}_j x^j + \alpha^{i'}, \quad (1.8.11)$$

$$\text{a) } \Omega^T \Omega = \mathbb{I} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } \sum_{j'=1}^n \Omega^{j'}_i \Omega^{j'}_k = \sum_{j'=1}^n \Omega^i_{j'} \Omega^k_{j'} = \delta_{ik}, \quad (1.8.12)$$

$$\text{a) } \tilde{\Omega}^2 = 1, \quad \text{d. h.} \quad \text{b) } \tilde{\Omega} = \pm 1 \quad \left( \tilde{\Omega} = \det \left( \Omega^{j'}_i \right) \right). \quad (1.8.13)$$

Die Umsetzung der Orthogonalitätseigenschaft  $\Omega^T = \Omega^{-1}$  (1.4.19a) bedeutet für die Elemente der Transformationsmatrix

$$\Omega^{i'}_j = \Omega^j_{i'}. \quad (1.8.14)$$

Für reelle orthogonale Transformationen besteht die Forminvarianz

$$\sum_{i'=1}^n x^{i'} x^{i'} = \sum_{i=1}^n x^i x^i. \quad (1.8.15)$$

Wegen der  $\frac{n(n+1)}{2}$  Bedingungsgleichungen (1.8.12b) gehen in die reellen orthogonalen Transformationen  $\frac{n(n-1)}{2}$  unabhängige reelle Parameter ein. Die den Drehungen ( $\tilde{\Omega} = 1$ ) zugeordnete spezielle orthogonale Gruppe ( $n$ -dimensionale Drehgruppe) bezeichnet man mit  $SO[n]$ .

### c) Lineare Koordinatentransformation bei spezieller Dimensionszahl

#### Dimension $n = 2$

Man kann die unitäre Transformation mit der ihr zugeordneten 2-dimensionalen unitären Gruppe  $U[2]$  wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \text{a) } \zeta^{1'} &= \zeta^1 \cos \Phi e^{i\alpha} + \zeta^2 \sin \Phi e^{i\beta}, \\ \zeta^{2'} &= -\zeta^1 \sin \Phi e^{i\gamma} + \zeta^2 \cos \Phi e^{i\delta} \quad \text{mit} \\ \text{b) } \alpha - \beta - \gamma + \delta &= 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Phi \text{ reell}). \end{aligned} \quad (1.8.16)$$

Für die Transformationsdeterminante resultiert

$$\text{a) } \tilde{U} = e^{i(\beta+\gamma)}, \quad \text{d. h.} \quad \text{b) } \tilde{\Phi} = \beta + \gamma. \quad (1.8.17)$$

Es gehen vier freie reelle Parameter ein, die bei der zusätzlichen Forderung der Unimodularität (1.8.6), d. h.  $\tilde{\Phi} = 0$ , auf drei freie reelle Parameter eingeschränkt werden. Dieser Transformation korrespondiert die 2-dimensionale spezielle unitäre Gruppe  $SU[2]$ .

Die reelle orthogonale Transformation, zugeordnet der 2-dimensionalen orthogonalen Gruppe  $O[2]$ , lautet in kartesischen Koordinaten ( $x^1 = x, x^2 = y$ ):

$$\begin{aligned}
 \text{a) } x' &= x \cos \Phi + y \sin \Phi, \\
 y' &= -x \sin \Phi + y \cos \Phi \quad \text{für } \tilde{\Omega} = 1 \\
 &\text{(kontinuierliche Transformation, Drehung um den Winkel } \Phi \text{),} \\
 \text{b) } x' &= x \cos \Phi + y \sin \Phi, \\
 y' &= x \sin \Phi - y \cos \Phi \quad \text{für } \tilde{\Omega} = -1 \\
 &\text{(diskrete Transformation, Spiegelung an einer durch} \\
 &\text{den Winkel } \Phi \text{ festgelegten Geraden).}
 \end{aligned} \tag{1.8.18}$$

### Dimension $n = 3$

Wir verzichten hier auf die Wiedergabe der unitären Transformationen, die zur 3-dimensionalen unitären Gruppe  $U[3]$  gehören. Mit den reellen Transformationen befassen wir uns noch einmal im Abschnitt 1.12.3.

Die reelle orthogonale Transformation, die der 3-dimensionalen speziellen orthogonalen Gruppe  $SO[3]$  zugeordnet ist ( $\tilde{\Omega} = 1$ ), ist eine kontinuierliche Transformation. Sie bedeutet auf der Basis der oben erklärten aktiven Interpretation von Koordinatentransformationen eine Drehung eines Punktes  $P$  mit dem Radiusvektor  $\mathbf{r}$  in einen Punkt  $\tilde{P}$  mit dem Radiusvektor  $\tilde{\mathbf{r}}$  um eine feste durch den Ursprung gehende Achse der Richtung  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}^2 = 1$ ) mit einem Drehwinkel  $\delta$ . Unter Verwendung kartesischer Koordinaten ( $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ ) findet man

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \tilde{\mathbf{r}} &= i x' + j y' + k z' = \bar{\Omega} \mathbf{r} \\
 &= \mathbf{r} \cos \delta + \mathbf{n}(\mathbf{n} \mathbf{r})(1 - \cos \delta) + \mathbf{n} \times \mathbf{r} \sin \delta \\
 &= \frac{1}{1 + \mathbf{d}^2} \{ \mathbf{r}(1 - \mathbf{d}^2) + 2\mathbf{d}(\mathbf{d} \mathbf{r}) + 2\mathbf{d} \times \mathbf{r} \} \quad \text{mit} \\
 \text{b) } \mathbf{d} &= \mathbf{n} \tan \frac{\delta}{2}.
 \end{aligned} \tag{1.8.19}$$

Die Größe  $\bar{\Omega}$  ist hier symbolisch als eine auf Vektoren wirkende Drehoperation zu verstehen, äquivalent der Drehmatrix  $\Omega$  im Matrizenformalismus.

In Komponenten lautet diese vektorielle Formulierung bei Benutzung der in die Formel

$$\mathbf{n} = i \cos \alpha_1 + j \cos \alpha_2 + k \cos \alpha_3 \tag{1.8.20}$$

eingehenden Richtungscosinus  $\{\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3\}$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 x' &= x [1 - \sin^2 \alpha_1 (1 - \cos \delta)] \\
 &\quad + y [\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 (1 - \cos \delta) - \cos \alpha_3 \sin \delta] \\
 &\quad + z [\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 (1 - \cos \delta) + \cos \alpha_2 \sin \delta], \\
 y' &= x [\cos \alpha_2 \cos \alpha_1 (1 - \cos \delta) + \cos \alpha_3 \sin \delta] \\
 &\quad + y [1 - \sin^2 \alpha_2 (1 - \cos \delta)] \\
 &\quad + z [\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 (1 - \cos \delta) - \cos \alpha_1 \sin \delta], \\
 z' &= x [\cos \alpha_3 \cos \alpha_1 (1 - \cos \delta) - \cos \alpha_2 \sin \delta] \\
 &\quad + y [\cos \alpha_3 \cos \alpha_2 (1 - \cos \delta) + \cos \alpha_1 \sin \delta] \\
 &\quad + z [1 - \sin^2 \alpha_3 (1 - \cos \delta)],
 \end{aligned} \tag{1.8.21}$$

wobei die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \cos \delta &= \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1), \\
 \text{b) } \cos \alpha_\nu &= \sqrt{\frac{a_{\nu\nu} - \cos \delta}{1 - \cos \delta}} \quad (\nu = 1, 2, 3)
 \end{aligned} \tag{1.8.22}$$

bestehen. Die Gleichung (1.8.22b) kann man als Definitionsgleichung für den Koeffizienten  $a_{\nu\nu}$  ansehen. Es gehen demnach drei reelle freie Parameter ein (Richtung und Drehwinkel). Die 3-dimensionale Drehung ist also bereits eine recht komplizierte Operation.

Die Kombination von Drehung und Translation parallel zur Drehachse nennt man Schraubung.

Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen  $\bar{\Omega}^I$  und  $\bar{\Omega}^{II}$  führt zu einer Drehung, die von der Reihenfolge der Drehungen  $\bar{\Omega}^I$  und  $\bar{\Omega}^{II}$  abhängig ist:

$$\bar{\Omega}^{II} \bar{\Omega}^I \mathbf{r} \neq \bar{\Omega}^I \bar{\Omega}^{II} \mathbf{r}, \tag{1.8.23}$$

wobei im Sinne von (1.8.19b)

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2}{1 - \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2} \tag{1.8.24}$$

gilt. An dieser Formel erkennt man in Verbindung mit (1.8.18a), daß nur Drehungen um dieselbe Achse und infinitesimale Drehungen vertauschbar sind.

Für infinitesimale Drehungen (bei Produktbildung Vernachlässigung von Größen zweiter und höherer Ordnung in  $\delta$ ) folgt aus (1.8.19a), im Unterschied zu endlichen Drehungen, die vektorielle Schreibweise

$$\check{\mathbf{r}} = \bar{\Omega} \mathbf{r} = \mathbf{r} + 2\mathbf{d} \times \mathbf{r} = \mathbf{r} + \delta \mathbf{n} \times \mathbf{r}. \tag{1.8.25}$$

Mit der Beschreibung der Drehung mittels Eulerscher Winkel befassen wir uns später im Detail.

Die reelle orthogonale Transformation mit negativer Determinante ( $\tilde{\Omega} = -1$ ) ist eine diskrete Transformation. Sie bedeutet anschaulich eine Spiegelung.

**Dimension  $n = 4$** 

Die für die Physik wichtigste Transformation dieser Art ist die Lorentz-Transformation, die in der Speziellen Relativitätstheorie von fundamentaler Bedeutung ist.

**Dimension  $n = N$** 

Die Fourier-Transformation ( $k, m, p, q$  natürliche Zahlen)

$$\zeta_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \xi_k e^{\frac{2\pi i km}{N}} \quad (1.8.26)$$

ist eine  $N$ -dimensionale unitäre Transformation (Gruppe  $U[N]$ ).

Mittels der zu (1.7.62) analogen diskreten Formel

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{\frac{2\pi i k(p-q)}{N}} = \delta_{pq} \quad (1.8.27)$$

gewinnt man die Umkehrtransformation

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N \zeta_m e^{-\frac{2\pi i km}{N}}. \quad (1.8.28)$$

Durch den Grenzübergang:  $N \rightarrow \infty$ ,  $\frac{m}{N} \rightarrow \frac{x}{l}$  ( $x$  kontinuierliche Koordinate,  $l$  Periodenlänge),  $\zeta_m \rightarrow f(x)$  gelangt man von (1.8.26) zur Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k e^{\frac{2\pi i kx}{l}} \quad (1.8.29)$$

und von (1.8.28) zur Formel

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l f(x) e^{-\frac{2\pi i kx}{l}} dx \quad (1.8.30)$$

für die Fourier-Koeffizienten, während aus (1.8.27)

$$\frac{1}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i k(x-\xi)}{l}} = \delta(x - \xi) \quad (1.8.31)$$

folgt. Die Resultate (1.8.29), (1.8.30) und (1.8.31) stimmen, abgesehen von der Schreibweise, mit den früheren Formeln (1.7.58), (1.7.59b) und (1.7.62) überein.

Den weiteren Grenzübergang zum Fourier-Integral haben wir schon im Abschnitt 1.7.3 vollzogen.



#### d) Drehung in Eulerschen Winkeln

Es ist, insbesondere für Anwendungen in der Kreiseltheorie, zweckmäßig, die Drehung eines orthonormalen Dreibeins  $\{e_\mu\} = \{i, j, k\}$  in ein anderes  $\{e_{\mu'}\} = \{i', j', k'\}$  unter Benutzung der drei voneinander unabhängigen, unsymmetrisch eingehenden Eulerschen Winkel  $\psi$  (Präzessionswinkel),  $\varphi$  (Azimutwinkel) und  $\vartheta$  (Nutationswinkel) vorzunehmen. Dabei setzt man diese allgemeine Drehung aus drei Teildrehungen um die Eulerschen Winkel zusammen.

Die Abb. 1.6, die auf die Kreiseltheorie Bezug nimmt, veranschaulicht die Situation:

Man stelle sich eine Ebene  $E$  vor, mit der die Basisvektoren  $i$  und  $j$  fest verbunden sind. Senkrecht darauf steht der Basisvektor  $k$ . Das Dreibein  $\{i, j, k\}$  fungiert als Inertialsystem.

Eine andere Ebene  $E'$ , in der die Basisvektoren  $i'$  und  $j'$  liegen und auf der der Basisvektor  $k'$  senkrecht steht, ist gegenüber dieser um den Winkel  $\vartheta$  geneigt. Beide Ebenen schneiden sich in der Knotenlinie, die mit dem Basisvektor  $i$  den Winkel  $\psi$  bildet und die auf der in der Ebene  $E'$  liegenden Bezugslinie senkrecht steht. Die Basisvektoren  $i'$  bzw.  $j'$  sind gegenüber der Knotenlinie bzw. Bezugslinie um den Winkel  $\varphi$  gedreht.

Die Drehungen in einer Ebene haben wir in Formel (1.8.18a) kennengelernt, die wir jetzt auf die beabsichtigten drei Teildrehungen anwenden wollen.

Drehung um  $k$  (Winkel  $\psi$ ):

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (\bar{z} = z). \quad (1.8.32)$$

Dabei kommt  $i$  in die Richtung der Knotenlinie zu liegen.

Drehung um die Knotenlinie (Winkel  $\vartheta$ ):

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \quad (\bar{x} = \bar{x}). \quad (1.8.33)$$

Dabei geht  $k$  in  $k'$  über.

Drehung um  $k'$  (Winkel  $\varphi$ ):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \quad (z' = \bar{z}). \quad (1.8.34)$$

Dadurch erfolgt der Übergang von  $i$  in  $i'$  und automatisch von  $j$  in  $j'$ . Die Transformation von  $\{x, y, z\}$  in  $\{x', y', z'\}$  entspricht einer Transformationsmatrix, die sich durch Multiplikation der eingeführten drei Transformationsmatrizen ergibt. Man erhält schließlich als Transformationsgesetz für die Koordinaten

$$\begin{aligned} x' &= x(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \\ &\quad + y(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) + z \sin \varphi \sin \vartheta, \\ y' &= -x(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \\ &\quad + y(-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) + z \cos \varphi \sin \vartheta, \\ z' &= x \sin \psi \sin \vartheta - y \cos \psi \sin \vartheta + z \cos \vartheta \end{aligned} \quad (1.8.35)$$

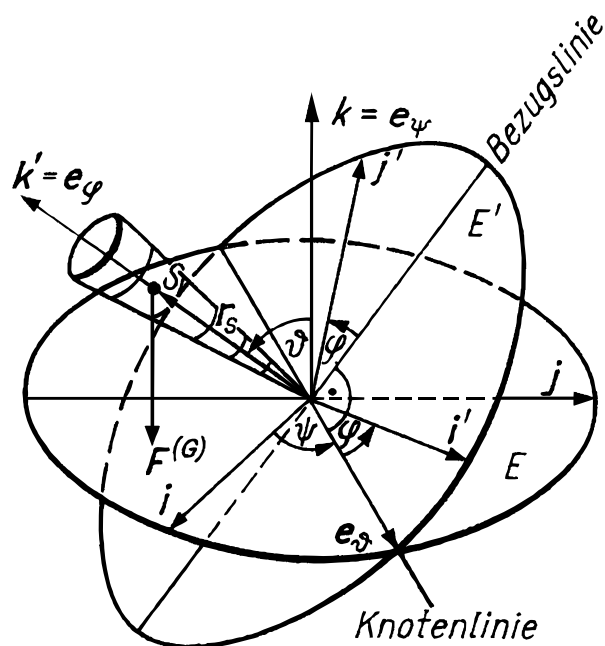


Abbildung 1.6: Veranschaulichung der Eulerschen Winkel

und für die durch die Koordinatentransformation hervorgerufene Transformation der Basisvektoren

$$\begin{aligned}
 i' &= i(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \\
 &\quad + j(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) + k \sin \varphi \sin \vartheta, \\
 j' &= -i(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \\
 &\quad + j(-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) + k \cos \varphi \sin \vartheta, \\
 k' &= i \sin \psi \sin \vartheta - j \cos \psi \sin \vartheta + k \cos \vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{1.8.36}$$

Daß diese Formeln richtig sind, erkennt man, indem man sie mit  $r' = i'x' + j'y' + k'z' = ix + jy + kz = r$  multipliziert. Durch Anwendung von (1.8.14) resultieren die Umkehrformeln von (1.8.35) und (1.8.36):

$$\begin{aligned}
 x &= x'(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \\
 &\quad - y'(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) + z' \sin \psi \sin \vartheta, \\
 y &= x'(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) \\
 &\quad + y'(-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) - z' \cos \psi \sin \vartheta, \\
 z &= x' \sin \varphi \sin \vartheta + y' \cos \varphi \sin \vartheta + z' \cos \vartheta
 \end{aligned}
 \tag{1.8.37}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \mathbf{i}'(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \\
&\quad - \mathbf{j}'(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) + \mathbf{k}' \sin \psi \sin \vartheta, \\
\mathbf{j} &= \mathbf{i}'(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) \\
&\quad + \mathbf{j}'(-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) - \mathbf{k}' \cos \psi \sin \vartheta, \\
\mathbf{k} &= \mathbf{i}' \sin \varphi \sin \vartheta + \mathbf{j}' \cos \varphi \sin \vartheta + \mathbf{k}' \cos \vartheta.
\end{aligned} \tag{1.8.38}$$

Aus den Formeln (1.8.36) bzw. (1.8.38) kann man die Winkel zwischen den Basisvektoren beider Basen durch Bildung der entsprechenden Skalarprodukte berechnen.

Für die physikalische Anwendung ist weiter die Benutzung der nicht orthogonalen Eulerschen Basis  $\{\mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\vartheta\}$  zweckmäßig, die mit der Basis  $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$  durch

$$\begin{aligned}
\text{a) } \mathbf{e}_\psi &= \mathbf{k}' \sin \varphi \sin \vartheta + \mathbf{j}' \cos \varphi \sin \vartheta + \mathbf{k}' \cos \vartheta, \\
\mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{k}', \\
\mathbf{e}_\vartheta &= \mathbf{i}' \cos \varphi - \mathbf{j}' \sin \varphi \\
&\text{bzw.} \\
\text{b) } \mathbf{i}' &= \mathbf{e}_\psi \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi \cot \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \cos \varphi, \\
\mathbf{j}' &= \mathbf{e}_\psi \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} - \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi \cot \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \varphi, \\
\mathbf{k}' &= \mathbf{e}_\varphi
\end{aligned} \tag{1.8.39}$$

verknüpft ist, wie man aus Abb. 1.6 erkennt.

### e) Drehung in komplexer Beschreibung

Wir zeigten oben, daß die 2-dimensionale unimodulare unitäre Transformation (Gruppe  $SU[2]$ ) im Komplexen durch 3 reelle Parameter bestimmt ist. Weiter fanden wir, daß auch die 3-dimensionale orthogonale Drehungstransformation (Gruppe  $SO[3]$ ) durch 3 reelle Parameter festgelegt ist. Im folgenden soll nun die Verbindung zwischen diesen beiden Arten von Transformationen hergestellt werden, wobei sogar ihre Homomorphie gilt.

Zunächst schreiben wir die unimodulare unitäre Transformation (1.8.16a) in Matrizenform auf:

$$\zeta' = U\zeta \tag{1.8.40}$$

mit

$$\begin{aligned}
\text{a) } \zeta' &= \begin{pmatrix} \zeta^{1'} \\ \zeta^{2'} \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \zeta = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}, \\
\text{c) } U &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos \Phi & e^{i\beta} \sin \Phi \\ -e^{-i\beta} \sin \Phi & e^{-i\alpha} \cos \Phi \end{pmatrix}, \\
\text{d) } UU^+ &= \mathbb{I} \quad (\text{Unitarität}), \\
\text{e) } \tilde{U} &= \det U = 1 \quad (\text{Unimodularität}).
\end{aligned} \tag{1.8.41}$$

Die komplexen Elemente  $a, b, c, d$  ( $d^* = a, c^* = -b$ ) der Matrix  $U$  nennt man die Cayley-Kleinschen Parameter. Sie sind durch die 3 reellen Parameter  $\alpha, \beta, \Phi$  bestimmt.

Eine andere Spaltenmatrix  $\xi$  möge sich ebenso transformieren:

$$\xi' = U\xi. \quad (1.8.42)$$

Weiter gelte die Abbildungsbeziehung

$$\zeta = K\xi \quad (1.8.43)$$

zwischen diesen beiden Spaltenmatrizen  $\xi$  und  $\zeta$ . Aus (1.8.40), (1.8.42) und (1.8.43) folgt nun

$$\begin{aligned} \text{a) } \zeta' &= K'\xi' \quad \text{mit} \\ \text{b) } K' &= UKU^+. \end{aligned} \quad (1.8.44)$$

Die in (1.8.43) eingeführte Abbildungsmatrix  $K$  bauen wir jetzt im Sinne einer Definition mit Hilfe der drei voneinander unabhängigen Paulischen Spinmatrizen

$$\begin{aligned} \text{a) } \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{b) } \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{c) } \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.8.45)$$

und der kartesischen Koordinaten  $\{x, y, z\}$  wie folgt auf:

$$K = \sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_3 z = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \quad (1.8.46)$$

Diese Matrix ist spurfrei und hermitesch:

$$\text{a) } \text{spur } K = 0, \quad \text{b) } K^+ = K. \quad (1.8.47)$$

Für die zugeordnete Determinante gilt

$$\det K = -(x^2 + y^2 + z^2). \quad (1.8.48)$$

In Analogie zu (1.8.46) schreiben wir

$$K' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}, \quad (1.8.49)$$

wobei die gestrichelten Koordinaten  $\{x', y', z'\}$  mit den früher benutzten transformierten Koordinaten identisch sein sollen.

Die Eigenschaften (1.8.47) und (1.8.48) bleiben bei unimodularen unitären Transformationen erhalten:

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{spur } K' &= 0, \\ \text{b) } K'^+ &= K', \\ \text{c) } \det K' &= \det K = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) = -(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (1.8.50)$$

Aus der letzten Gleichung erkennen wir die Forminvarianz des Quadrates des Radiusvektors bei diesen Transformationen. Das legt die Vermutung nahe, daß diese Transformationen mit den 3-dimensionalen reellen orthogonalen Transformationen (Gruppe  $SO[3]$ ) korrespondieren.

Als nächstes schreiben wir nun (1.8.44b) in Matrizenform aus:

$$\begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}. \quad (1.8.51)$$

Durch Ausmultiplizieren der Matrizen bekommen wir

$$\begin{aligned} \text{a) } x' - iy' &= (a^2 - b^2)x - i(a^2 + b^2)y - 2abz, \\ \text{b) } z' &= (a^*b + ab^*)x - i(ab^* - a^*b)y + (aa^* - bb^*)z. \end{aligned} \quad (1.8.52)$$

Aus der ersten Gleichung entsteht durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} \text{a) } x' &= \frac{1}{2} (a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2}) x \\ &\quad - \frac{i}{2} (a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2}) y - (ab + a^*b^*) z, \\ \text{b) } y' &= \frac{i}{2} (a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2}) x \\ &\quad + \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + a^{*2} + b^{*2}) y - i(ab - a^*b^*) z. \end{aligned} \quad (1.8.53)$$

In Matrizenform können wir nun schreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.8.54)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2}) & -\frac{i}{2} (a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2}) & -(ab + a^*b^*) \\ \frac{i}{2} (a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2}) & \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + a^{*2} + b^{*2}) & -i(ab - a^*b^*) \\ a^*b + ab^* & -i(ab^* - a^*b) & aa^* - bb^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die hier auftretende Matrix  $\Omega$  mit 3 freien reellen Parametern ist mit der früher benutzten Drehmatrix  $\Omega$  identisch. Ihre Elemente sind reell. Ihre Orthogonalität ( $\Omega\Omega^T = 1$ ) kann man durch Nachrechnen bestätigen.

Damit haben wir die vermutete Korrespondenz der beiden untersuchten Transformationen bewiesen. Es entspricht also der reellen orthogonalen Transformation (Gruppe  $SO[3]$ ) (1.8.54) im 3-dimensionalen Raum bei Benutzung der kartesischen Koordinaten  $\{x, y, z\}$  die unimodulare unitäre Matrizentransformation (Gruppe  $SU[2]$ ) (1.8.44b) im 2-dimensionalen komplexen Raum.

## 1.8.2 Berührungstransformationen (Kontakttransformationen)

### Zweidimensionaler Fall

Zur besseren Verständlichmachung befassen wir uns erst einmal mit der Berührungstransformation in der Ebene. Wir legen unserer Betrachtung eine  $x$ - $y$ -Ebene und eine  $X$ - $Y$ -Ebene zugrunde. Die Aequatio directrix genannte Gleichung

$$F(x, y, X, Y) = 0 \quad (1.8.55)$$

ordnet einem Punkt  $(x, y)$  in der  $x$ - $y$ -Ebene eine Kurve in der  $X$ - $Y$ -Ebene zu, während einer Kurve  $f(x, y) = 0$  bzw.  $y = y(x)$ , die auch in der Parameterform  $x = x(\lambda)$ ,  $y = y(\lambda)$  beschrieben werden kann, eine Kurvenschar  $F(x(\lambda), y(\lambda), X, Y) = 0$  in der  $X$ - $Y$ -Ebene entspricht.

Die Enveloppe dieser Kurvenschar kann man als Abbild der Kurve  $f(x, y) = 0$  ansehen. Dabei zeigt es sich, daß die Abbilder zweier sich berührender Kurven wieder zwei sich berührende Kurven sind. Daher kommt der Name Berührungstransformation.

Die Ermittlung der Enveloppe einer Kurvenschar führte uns früher auf die beiden Gleichungen (1.7.21) und (1.7.22). Die Anwendung auf unser jetziges Problem ergibt die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } & F(x(\lambda), y(\lambda), X, Y) = 0, \\ \text{b) } & \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (1.8.56)$$

aus denen man  $\lambda$  zu eliminieren hat, um die Enveloppengleichung in der  $X$ - $Y$ -Ebene zu erhalten.

Weiter resultiert aus (1.8.55) ganz allgemein

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{\partial F}{\partial Y} dY = 0. \quad (1.8.57)$$

Wegen (1.8.56b) gilt also für die Enveloppe im Sinne einer Folgerung auch

$$\frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{\partial F}{\partial Y} dY = 0. \quad (1.8.58)$$

Mit den Größen

$$\text{a) } p = \frac{dy}{dx}, \quad \text{b) } P = \frac{dY}{dX}, \quad (1.8.59)$$

die den jeweiligen Kurvenanstieg bestimmen, bekommen wir für die Enveloppe die drei entscheidenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } & F = 0, \\ \text{b) } & \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \text{c) } & \frac{\partial F}{\partial X} + P \frac{\partial F}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \quad (1.8.60)$$

Weiter finden wir aus der Kurvengleichung  $f(x, y) = 0$ , deren Abbild die Enveloppe ist, die Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\lambda} = 0. \quad (1.8.61)$$

Aus der Forderung der Existenz nichttrivialer Lösungen  $\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}$  des homogenen Gleichungssystems (1.8.56b) und (1.8.61) resultiert das Verschwinden der Systemdeterminante, also

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (1.8.62)$$

Die drei Gleichungen (1.8.60), die man durch Auflösen nach  $X, Y, P$  auf die Form

$$\begin{aligned} \text{a) } X &= X(x, y, p), \\ \text{b) } Y &= Y(x, y, p), \\ \text{c) } P &= P(x, y, p) \end{aligned} \quad (1.8.63)$$

bringen kann, stellen unsere gesuchten Transformationsformeln der Berührungstransformation dar.

Durchläuft der Parameter  $\lambda$  seinen Definitionsbereich, so wird einerseits in der  $x$ - $y$ -Ebene die vorgegebene Kurve gemäß  $x = x(\lambda), y = y(\lambda), p = p(\lambda)$  und andererseits in der  $X$ - $Y$ -Ebene die Enveloppe gemäß (1.8.63), wofür man in Parameterform

$$\text{a) } X = X(\lambda), \quad \text{b) } Y = Y(\lambda), \quad \text{c) } P = P(\lambda) \quad (1.8.64)$$

schreiben kann, durchlaufen. Dabei ist aber noch folgender Umstand zu beachten:

Die Vorgabe eines Zahlentripels  $(x, y, p)$  bedeutet noch nicht, daß dieses einem auf der vorgegebenen Kurve liegenden Punkt entspricht. Wir haben also noch den Tatbestand  $y = y(x)$  zu verarbeiten, den wir bei der Differentialbildung von (1.8.63a) und (1.8.63b) berücksichtigen wollen. Wir erhalten dann vermöge (1.8.59) die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } dX &= \frac{1}{P} dY = \left( \frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial X}{\partial p} dp, \\ \text{b) } dY &= \left( \frac{\partial Y}{\partial x} + p \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial Y}{\partial p} dp. \end{aligned} \quad (1.8.65)$$

Durch Elimination von  $dY$  resultiert bei Beachtung von (1.8.59b) die Nebenbedingung

$$\left( \frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y} \right) \frac{\partial Y}{\partial p} - \left( \frac{\partial Y}{\partial x} + p \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \frac{\partial X}{\partial p} = 0, \quad (1.8.66)$$

die zu befriedigen ist.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Berührungstransformationen in der Physik sind die kanonischen Transformationen, die in der Punktmechanik eine große Rolle spielen.

### Legendre-Transformation im Zweidimensionalen

Die Legendre-Transformation tritt in verschiedenen Gebieten der Physik auf, so z. B. in der kanonischen Mechanik beim Übergang vom Lagrange-Formalismus zum Hamilton-Formalismus oder in der Thermodynamik beim Wechsel der Potentiale.

Die Aequatio directrix lautet in diesem Fall:

$$F(x, y, X, Y) = y + Y - xX = 0. \quad (1.8.67)$$

Durch Spezialisierung von (1.8.60b) und (1.8.60c) sowie Benutzung von (1.8.67) erhält man

$$\text{a) } X = p, \quad \text{b) } Y = xp - y, \quad \text{c) } P = x. \quad (1.8.68)$$

Das sind die gesuchten Transformationsformeln, die den Übergang von der Kurve  $x = x(\lambda)$ ,  $y = y(\lambda)$  bzw.  $y = y(x)$  in der  $x$ - $y$ -Ebene zur Enveloppe  $X = X(\lambda)$ ,  $Y = Y(\lambda)$  bzw.  $Y = Y(X)$  in der  $X$ - $Y$ -Ebene herbeiführen.

Man erkennt an diesem Beispiel sehr deutlich, daß diese Transformation einem gleichzeitigen Wechsel der unabhängigen Variablen ( $x \rightarrow X$ ) und der abhängigen Variablen ( $y \rightarrow Y$ ) gleichkommt. Die Nebenbedingung (1.8.66) ist erfüllt.

### Legendre-Transformation im Mehrdimensionalen

Der Übergang zum  $n$ -dimensionalen Fall entspricht der Verallgemeinerung

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x_k, & X &\rightarrow X_k, & y &\rightarrow g(x_1, x_2, \dots, x_n, q_1, q_2, \dots, q_n), \\ Y &\rightarrow G(X_1, X_2, \dots, X_n, q_1, q_2, \dots, q_n). \end{aligned} \quad (1.8.69)$$

Angestrebt wird die gleichzeitige Auswechslung der unabhängigen Variablen  $x_k \rightarrow X_k$  und der abhängigen Variablen  $g \rightarrow G$ . In Verallgemeinerung von (1.8.67) schreiben wir die Aequatio directrix in der Form

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, g, X_1, X_2, \dots, X_n, G) \\ = g(x_1, x_2, \dots, x_n, q_1, q_2, \dots, q_n) \\ + G(X_1, X_2, \dots, X_n, q_1, q_2, \dots, q_n) - \sum_{k=1}^n x_k X_k = 0. \end{aligned} \quad (1.8.70)$$

Durch Differentialbildung folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial g}{\partial q_k} dq_k \right) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial X_k} dX_k + \frac{\partial G}{\partial q_k} dq_k \right) \\ - \sum_{k=1}^n (X_k dx_k + x_k dX_k) = 0. \end{aligned} \quad (1.8.71)$$

Daraus ergeben sich zusammen mit (1.8.70) die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \text{a) } X_k &= \frac{\partial g}{\partial x_k}, & \text{b) } x_k &= \frac{\partial G}{\partial X_k}, \\ \text{c) } \frac{\partial g}{\partial q_k} &= -\frac{\partial G}{\partial q_k}, & \text{d) } G &= \sum_{k=1}^n x_k X_k - g. \end{aligned} \quad (1.8.72)$$



### 1.8.3 Integraltransformation und Faltung

#### Integraltransformation

Eine Funktion  $K(s, x)$  mit  $s = \sigma + i\omega$  ( $\sigma, \omega, x$  reell), die Kern der Integraltransformation genannt wird, sei für alle  $x$  aus dem Intervall  $-\infty < x < \infty$  definiert.

Die Existenz des Integrals

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s, x) f(x) dx = \mathcal{T}[f(x)] \quad (1.8.73)$$

voraussetzend, können wir feststellen, daß durch dieses Integral eine Transformation der Funktion  $f(x)$  in die komplexe Funktion  $\bar{f}(s)$  vermittelt wird. Zur Abkürzung für eine solche Integraltransformation wird die obige Symbolik verwendet. Man nennt  $f(x)$  die Objektfunktion (Originalfunktion) und  $\bar{f}(s)$  die Bildfunktion (Resultatfunktion) oder  $\mathcal{T}$ -Transformierte. Das Fourier-Integral (1.7.63) stellt also eine Integraltransformation (Fourier-Transformation) dar.

Aus ihrer Definition geht die Linearität der Integraltransformation hervor ( $k_1, k_2$  Konstanten):

$$\mathcal{T}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] = k_1 \mathcal{T}[f_1(x)] + k_2 \mathcal{T}[f_2(x)]. \quad (1.8.74)$$

Die Umkehrung der Integraltransformation schreibt man symbolisch in der Form

$$f(x) = \mathcal{T}^{-1}[\bar{f}(s)]. \quad (1.8.75)$$

Mithin gilt

$$\mathcal{T}^{-1}\{\mathcal{T}[f(x)]\} = f(x). \quad (1.8.76)$$

Diese Umkehrung läuft auf das Problem der Lösung der Integralgleichung (1.8.73) hinaus, wobei also  $\bar{f}(s)$  und  $K(s, x)$  vorgegeben sind und  $f(x)$  zu ermitteln ist.

Wir listen im folgenden einige für die Physik wichtige Integraltransformationen auf:

Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx. \quad (1.8.77)$$

Endliche Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}_a[f(x)] = \int_0^a e^{-i\omega x} f(x) dx. \quad (1.8.78)$$

Einseitige Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}_\infty[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx. \quad (1.8.79)$$

Laplace-Transformation:

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx. \quad (1.8.80)$$

Endliche Laplace-Transformation:

$$\mathcal{L}_a[f(x)] = \int_0^a e^{-sx} f(x) dx. \quad (1.8.81)$$

Zweiseitige Laplace-Transformation:

$$\mathcal{L}_{\text{II}}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx. \quad (1.8.82)$$

Mellin-Transformation:

$$\mathcal{M}[f(x)] = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx. \quad (1.8.83)$$

Hankel-Transformation  $\nu$ -ter Ordnung:

$$\mathcal{H}_{\nu}[f(x)] = \int_0^{\infty} x I_{\nu}(\sigma x) f(x) dx \quad (I_{\nu} \text{ Bessel-Funktion}). \quad (1.8.84)$$

Stieltjes-Transformation:

$$\mathcal{St}[f(x)] = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{s+x} dx. \quad (1.8.85)$$

Die Fourier-Transformation besitzt wegen ihrer spektralen Interpretierbarkeit (Superposition harmonischer Vorgänge) eine herausragende Bedeutung in Physik und Technik. Wir wollen darauf etwas näher eingehen und schreiben deshalb die Fourier-Transformation (1.7.64b)

und ihre Umkehr-Transformation (1.7.63) in der folgenden Gestalt auf  $(\alpha(\xi) \rightarrow F(\xi))$ :

$$\begin{aligned} \text{a) } F(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [e^{-i\xi x} f(x) + e^{i\xi x} f(-x)] dx, \\ \text{b) } f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} F(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [e^{i\xi x} F(\xi) + e^{-i\xi x} F(-\xi)] d\xi. \end{aligned} \tag{1.8.86}$$

Die Funktion  $F(\xi)$  heißt Spektralfunktion (Spektrum) der Funktion  $f(x)$ . Sie wird gemäß

$$F(\xi) = |F(\xi)| e^{i\psi(\xi)} \tag{1.8.87}$$

zerlegt. Man nennt  $|F(\xi)|$  das Amplitudenspektrum und  $\psi(\xi)$  das Phasenspektrum der Funktion  $f(x)$ .

### Faltung

Man bezeichnet das als existierend vorausgesetzte Integral ( $x > 0$ )

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_0^x f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \tag{1.8.88}$$

als das einseitige Faltungsintegral der beiden Funktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  und bedient sich der angegebenen Symbolik für die Faltung. Diese Faltung besitzt folgende Eigenschaften:

- a)  $[k f_1(x)] * f_2(x) = k (f_1(x) * f_2(x))$  ( $k$  Konstante),
- b)  $f_1(x) * f_2(x) = f_2(x) * f_1(x)$  (Kommutativität),
- c)  $[f_1(x) * f_2(x)] * f_3(x) = f_1(x) * [f_2(x) * f_3(x)]$  (Assoziativität), (1.8.89)
- d)  $[f_1(x) + f_2(x)] * f_3(x) = f_1(x) * f_3(x) + f_2(x) * f_3(x)$   
(Distributivität bezüglich der Addition),
- e) Aus  $f_1(x) * f_2(x) = 0$  folgt  $f_1(x) = 0$  oder  $f_2(x) = 0$  fast überall für  $x \geq 0$   
(Satz von Titchmarsh).

Unter dem zweiseitigen Faltungintegral versteht man das Integral

$$[f_1(x) * f_2(x)]_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi. \quad (1.8.90)$$

Man bildet dabei die Faltung im Intervall  $-\infty < \xi < \infty$ .

Ist  $f(x)$  und  $f(x)^2$  im Intervall  $-\infty < x < \infty$  integrierbar, so heißt

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f(\xi + x) d\xi \quad (1.8.91)$$

die Autokorrelationsfunktion zur Funktion  $f(x)$ .

## 1.9 Vektoranalysis

### 1.9.1 Orthogonale krummlinige Koordinaten

Im Abschnitt 1.6.2 haben wir die Vektoralgebra im  $n$ -dimensionalen Raum abgehandelt und die dabei gewonnenen Erkenntnisse für den 3-dimensionalen Raum weiter ausgebaut. Die Vektoranalysis soll sich hier nur auf den 3-dimensionalen Raum erstrecken, da die darüber hinausgehenden Gesichtspunkte der Tensoranalysis subsumiert sind. Des weiteren setzen wir orthogonale Koordinaten voraus, d. h., wir nehmen auf die Spezialisierung (1.6.28) und (1.6.29) Bezug.

Als erstes knüpfen wir an die Aufspaltung (1.6.5) bzw. (1.6.13) eines Vektors an:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_\mu a^\mu = \mathbf{e}^\mu a_\mu, \quad (1.9.1)$$

wobei wir an unsere Summenkonvention erinnern, daß nämlich kleine griechische Indizes von 1 bis 3 laufen. Es empfiehlt sich nun, statt der kovarianten Basis  $\{\mathbf{e}_\mu\}$  die folgende sogenannte natürliche Basis aus den Einheitsvektoren ( $x^1 = u, x^2 = v, x^3 = w$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u &= \frac{1}{U} \mathbf{e}_1 = U \mathbf{e}^1, \\ \mathbf{e}_v &= \frac{1}{V} \mathbf{e}_2 = V \mathbf{e}^2, \\ \mathbf{e}_w &= \frac{1}{W} \mathbf{e}_3 = W \mathbf{e}^3, \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

mit den Laméschen Koeffizienten

$$U = \sqrt{g_{11}}, \quad V = \sqrt{g_{22}}, \quad W = \sqrt{g_{33}} \quad (1.9.3)$$

einzuführen. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{e}_u^2 &= \mathbf{e}_v^2 = \mathbf{e}_w^2 = 1, \\ \text{b) } \mathbf{e}_u \mathbf{e}_v &= \mathbf{e}_v \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_w \mathbf{e}_u = 0. \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

Der Vektor  $\mathbf{a}$  in (1.9.1) schreibt sich dann als

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_u a_u + \mathbf{e}_v a_v + \mathbf{e}_w a_w, \quad (1.9.5)$$

wenn wir die natürlichen Komponenten

$$\begin{aligned} a_u &= U a^1 = \frac{1}{U} a_1, \\ a_v &= V a^2 = \frac{1}{V} a_2, \\ a_w &= W a^3 = \frac{1}{W} a_3 \end{aligned} \quad (1.9.6)$$

benutzen und (1.6.29) beachten. Daraus resultiert

$$a_u = \sqrt{a_1 a^1}, \quad a_v = \sqrt{a_2 a^2}, \quad a_w = \sqrt{a_3 a^3}, \quad (1.9.7)$$

d. h., die natürlichen Komponenten sind jeweils die geometrischen Mittel aus den zugeordneten kovarianten und kontravarianten Komponenten.

Die Anwendung von (1.9.5) und (1.9.6) auf den Linienelementvektor ( $\mathbf{a} \rightarrow d\mathbf{r}$ ) ergibt

$$\begin{aligned} \text{a) } d\mathbf{r} &= \mathbf{e}_u U du + \mathbf{e}_v V dv + \mathbf{e}_w W dw, \\ \text{b) } (ds)^2 &= U^2 (du)^2 + V^2 (dv)^2 + W^2 (dw)^2. \end{aligned} \quad (1.9.8)$$

Diese hier durch Spezialisierung gewonnenen Resultate hätten wir auch bekommen, wenn wir von den kartesischen Koordinaten  $\{x, y, z\}$  ausgegangen und durch eine Koordinatentransformation zu den orthogonalen krummlinigen Koordinaten  $\{u, v, w\}$  übergegangen wären:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } u &= u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.9.9)$$

(Umkehrtransformation).

Die Abb. 1.7 veranschaulicht die Scharen der orthogonalen Koordinatenlinien:

$$\begin{aligned} v = \text{const}, \quad w = \text{const}, \quad &\text{mit der Richtung } \mathbf{e}_u, \\ w = \text{const}, \quad u = \text{const}, \quad &\text{mit der Richtung } \mathbf{e}_v, \\ u = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad &\text{mit der Richtung } \mathbf{e}_w, \end{aligned} \quad (1.9.10)$$

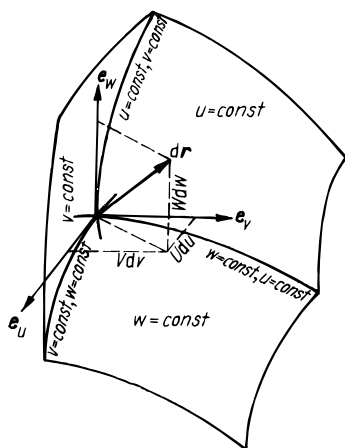
und die Scharen der Koordinatenflächen:

$$\begin{aligned} u = \text{const}, \quad &\text{senkrecht zu } \mathbf{e}_u, \\ v = \text{const}, \quad &\text{senkrecht zu } \mathbf{e}_v, \\ w = \text{const}, \quad &\text{senkrecht zu } \mathbf{e}_w, \end{aligned} \quad (1.9.11)$$

sowie den Linienelementvektor.

Führen wir in Analogie zu (1.9.5) noch einen weiteren Vektor

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_u b_u + \mathbf{e}_v b_v + \mathbf{e}_w b_w \quad (1.9.12)$$



**Abbildung 1.7:** Natürliche Basis bei krummlinigen orthogonalen Koordinaten

ein, so schreibt sich wegen (1.9.4) das Skalarprodukt von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  als

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = a_u b_u + a_v b_v + a_w b_w. \quad (1.9.13)$$

Beachtet man ferner, daß gemäß Abb. 1.7 für das Vektorprodukt aus den natürlichen Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_w, \quad \mathbf{e}_w \times \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_v, \quad \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_u \quad (1.9.14)$$

gilt, so bestätigt man die Richtigkeit von

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_u & \mathbf{e}_v & \mathbf{e}_w \\ a_u & a_v & a_w \\ b_u & b_v & b_w \end{vmatrix} = \mathbf{e}_a \Delta_{abc} a_b b_c. \quad (1.9.15)$$

Die Spezialisierung auf kartesische Koordinaten entspricht dem Übergang

$$\begin{aligned} \text{a) } & u \rightarrow x, \quad v \rightarrow y, \quad w \rightarrow z, \\ \text{b) } & U \rightarrow 1, \quad V \rightarrow 1, \quad W \rightarrow 1, \\ \text{c) } & \mathbf{e}_u \rightarrow \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_v \rightarrow \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_w \rightarrow \mathbf{k}, \\ \text{d) } & a_u \rightarrow a^1 = a_1, \quad a_v \rightarrow a^2 = a_2, \quad a_w \rightarrow a^3 = a_3. \end{aligned} \quad (1.9.16)$$

## 1.9.2 Spezielle Koordinatensysteme

In der Physik ist es oft ratsam, bei der Lösung eines konkreten Problems solche Koordinaten zu benutzen, die der Geometrie der Aufgabenstellung entsprechen, also bei Zylindersymmetrie allgemeine Zylinderkoordinaten, bei Rotationsymmetrie Kreiszyylinderkoordinaten oder bei Kugelsymmetrie räumliche Polarkoordinaten. Solche im allgemeinen krummlinigen Koordinatensysteme sind durch Transformationen aus dem kartesischen Koordinatensystem zu gewinnen. Im folgenden führen wir die am häufigsten gebrauchten orthogonalen krummlinigen Koordinatensysteme auf.

**a) Zweidimensionale Koordinatensysteme**

Man bedient sich bei deren allgemeiner Behandlung zweckmäßigerweise der in der Funktionentheorie bereits besprochenen konformen Abbildung.

Besonders wichtig sind die ebenen Polarkoordinaten  $\{R, \Phi\}$ :

Transformation:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2 + y^2} && \text{(ebene Radialkoordinate),} \\ \Phi &= \arctan \frac{y}{x} && \text{(Azimutwinkel),} \end{aligned} \quad (1.9.17)$$

wobei  $0 \leq R < \infty$ ,  $0 \leq \Phi \leq 2\pi$  gilt.

Umkehrtransformation:

$$x = R \cos \Phi, \quad y = R \sin \Phi. \quad (1.9.18)$$

Natürliche Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \text{a) } e_R &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial R} = \mathbf{i} \cos \Phi + \mathbf{j} \sin \Phi, \\ e_\Phi &= \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \Phi} = -\mathbf{i} \sin \Phi + \mathbf{j} \cos \Phi \\ \text{mit } e_R^2 &= e_\Phi^2 = 1, \quad e_R e_\Phi = 0, \text{ d. h.} \\ \text{b) } \mathbf{i} &= e_R \cos \Phi - e_\Phi \sin \Phi, \\ \mathbf{j} &= e_R \sin \Phi + e_\Phi \cos \Phi. \end{aligned} \quad (1.9.19)$$

Man vergleiche in diesem Zusammenhang die natürlichen Basisvektoren hier mit den kovarianten Basisvektoren (1.7.39) der Gaußschen Flächentheorie.

Linienelementvektor:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy = e_R dR + e_\Phi R d\Phi. \quad (1.9.20)$$

Quadrat des Linienelements:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dR)^2 + R^2 (d\Phi)^2. \quad (1.9.21)$$

Flächenelement:

$$d\sigma = R dR d\Phi. \quad (1.9.22)$$

Natürliche Vektorkomponenten:

$$\begin{aligned} \text{a) } a_R &= a_x \frac{x}{R} + a_y \frac{y}{R}, \\ a_\Phi &= -a_x \frac{y}{R} + a_y \frac{x}{R}, \text{ d. h.} \\ \text{b) } a_x &= a_R \cos \Phi - a_\Phi \sin \Phi, \\ a_y &= a_R \sin \Phi + a_\Phi \cos \Phi. \end{aligned} \quad (1.9.23)$$

Darstellung eines Vektors:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} a_x + \mathbf{j} a_y = e_R a_R + e_\Phi a_\Phi. \quad (1.9.24)$$

## b) Dreidimensionale Koordinatensysteme

### Zylinderkoordinaten

Die allgemeinen Zylinderkoordinaten gehen aus 2-dimensionalen ebenen Koordinaten durch Hinzunahme der kartesischen  $z$ -Koordinate senkrecht zur Ebene hervor.

Eine Größe  $M$  heißt zylindersymmetrisch, wenn

$$\frac{\partial M}{\partial z} = 0 \quad (1.9.25)$$

gilt.

Am häufigsten werden die Kreiszyylinderkoordinaten  $\{R, \Phi, z\}$  gebraucht, die durch Erweiterung der ebenen Polarkoordinaten entstehen.

Man nennt eine Größe  $M$  rotationssymmetrisch um eine Achse (auch axialsymmetrisch oder axisymmetrisch), wenn für sie

$$\frac{\partial M}{\partial \Phi} = 0 \quad (1.9.26)$$

gilt. (In der Literatur wird gelegentlich der Begriff Axialsymmetrie auch für Zylindersymmetrie verwendet.)

### Kreiszyylinderkoordinaten $R, \Phi, z$

Die Abb. 1.8 soll die nachfolgenden Formeln verständlich machen.

Transformation:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \Phi &= \arctan \frac{y}{x}, & z &= z \\ (0 \leq R < \infty, & & 0 \leq \Phi \leq 2\pi, & & -\infty < z < \infty). \end{aligned} \quad (1.9.27)$$

0.4

Umkehrtransformation:

$$x = R \cos \Phi, \quad y = R \sin \Phi, \quad z = z. \quad (1.9.28)$$

Natürliche Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \text{a) } e_R &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial R} = \mathbf{i} \cos \Phi + \mathbf{j} \sin \Phi, \\ e_\Phi &= \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \Phi} = -\mathbf{i} \sin \Phi + \mathbf{j} \cos \Phi, \\ e_z &= \mathbf{k} \\ (e_R^2 = e_\Phi^2 = e_z^2 = 1, & \quad e_R e_\Phi = e_R e_z = e_\Phi e_z = 0), \quad \text{d. h.} \\ \text{b) } \mathbf{i} &= e_R \cos \Phi - e_\Phi \sin \Phi, \\ \mathbf{j} &= e_R \sin \Phi + e_\Phi \cos \Phi, \\ \mathbf{k} &= e_z. \end{aligned} \quad (1.9.29)$$



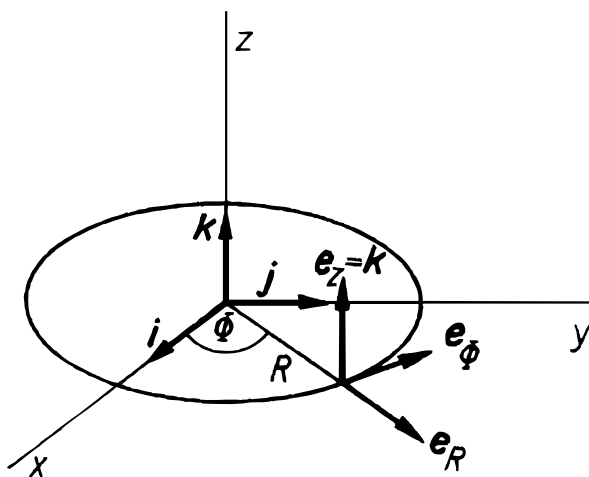


Abbildung 1.8: Natürliche Basis bei Kreiszyylinderkoordinaten

Linienelementvektor:

$$ds = i dx + j dy + k dz = e_R dR + e_\Phi R d\Phi + k dz. \quad (1.9.30)$$

Quadrat des Linienelements:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= (dR)^2 + R^2 (d\Phi)^2 + (dz)^2. \end{aligned} \quad (1.9.31)$$

Volumenelement:

$$dV = R dR d\Phi dz. \quad (1.9.32)$$

Natürliche Vektorkomponenten:

$$\begin{aligned} \text{a) } a_R &= a_x \frac{x}{R} + a_y \frac{y}{R}, \\ a_\Phi &= -a_x \frac{y}{R} + a_y \frac{x}{R}, \\ a_z &= a_z, \quad \text{d. h.} \\ \text{b) } a_x &= a_R \cos \Phi - a_\Phi \sin \Phi, \\ a_y &= a_R \sin \Phi + a_\Phi \cos \Phi, \\ a_z &= a_z. \end{aligned} \quad (1.9.33)$$

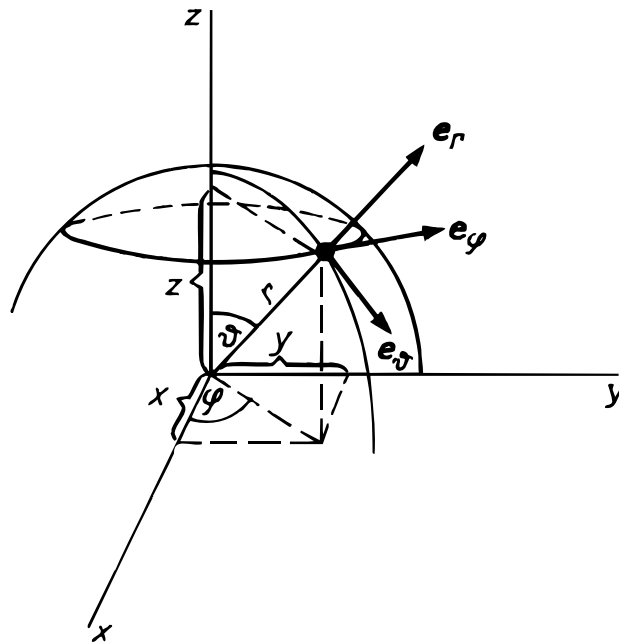
Darstellung eines Vektors:

$$\mathbf{a} = i a_x + j a_y + k a_z = e_R a_R + e_\Phi a_\Phi + k a_z. \quad (1.9.34)$$

**Räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)  $r, \vartheta, \varphi$** 

Die hier angegebene Reihenfolge der Koordinaten entspricht einem Rechtssystem, auf das wir uns festlegen wollen.

Die Abb. 1.9 soll die nachfolgenden Formeln veranschaulichen.



**Abbildung 1.9:** Natürliche Basis bei räumlichen Polarkoordinaten

Transformation:

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} && \text{(räumliche Radialkoordinate),} \\
 \vartheta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} && \text{(Polwinkel),} \\
 \varphi &= \arctan \frac{y}{x} && \text{(Azimutwinkel),}
 \end{aligned}
 \tag{1.9.35}$$

wobei  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  gilt.

Umkehrtransformation:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta.
 \tag{1.9.36}$$

Natürliche Basisvektoren:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \mathbf{e}_r &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = \mathbf{i} \cos \varphi \sin \vartheta + \mathbf{j} \sin \varphi \sin \vartheta + \mathbf{k} \cos \vartheta, \\
 \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \vartheta} = \mathbf{i} \cos \varphi \cos \vartheta + \mathbf{j} \sin \varphi \cos \vartheta - \mathbf{k} \sin \vartheta, \\
 \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \varphi} = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \\
 (\mathbf{e}_r^2 = \mathbf{e}_\vartheta^2 = \mathbf{e}_\varphi^2 = 1, \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_r = 0), \text{ d. h.} \\
 \text{b) } \mathbf{i} &= \mathbf{e}_r \cos \varphi \sin \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \cos \varphi \cos \vartheta - \mathbf{e}_\varphi \sin \vartheta, \\
 \mathbf{j} &= \mathbf{e}_r \sin \varphi \sin \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \sin \varphi \cos \vartheta + \mathbf{e}_\varphi \cos \vartheta, \\
 \mathbf{k} &= \mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta.
 \end{aligned} \tag{1.9.37}$$

Linienelementvektor:

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{s} &= \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz \\
 &= \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\vartheta r d\vartheta + \mathbf{e}_\varphi r \sin \vartheta d\varphi.
 \end{aligned} \tag{1.9.38}$$

Quadrat des Linienelements:

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\
 &= (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2.
 \end{aligned} \tag{1.9.39}$$

Oberflächenelement, Raumwinkelelement und Volumelement:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } d\sigma &= r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \\
 \text{b) } d\Omega &= \frac{d\sigma}{r^2}, \\
 \text{c) } dV &= r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.
 \end{aligned} \tag{1.9.40}$$

Natürliche Komponenten:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } a_r &= a_x \frac{x}{r} + a_y \frac{y}{r} + a_z \frac{z}{r}, \\
 a_\vartheta &= a_x \frac{xz}{rR} + a_y \frac{yz}{rR} - a_z \frac{R}{r}, \\
 a_\varphi &= -a_x \frac{y}{R} + a_y \frac{x}{R} \\
 (R^2 = r^2 - z^2 = x^2 + y^2, \quad R = r \sin \vartheta), \text{ d. h.} \\
 \text{b) } a_x &= a_r \cos \varphi \sin \vartheta + a_\vartheta \cos \varphi \cos \vartheta - a_\varphi \sin \vartheta, \\
 a_y &= a_r \sin \varphi \sin \vartheta + a_\vartheta \sin \varphi \cos \vartheta + a_\varphi \cos \vartheta, \\
 a_z &= a_r \cos \vartheta - a_\vartheta \sin \vartheta.
 \end{aligned} \tag{1.9.41}$$

Darstellung eines Vektors:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} a_x + \mathbf{j} a_y + \mathbf{k} a_z = \mathbf{e}_r a_r + \mathbf{e}_\vartheta a_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi a_\varphi. \tag{1.9.42}$$

### 1.9.3 Differentialausdrücke

#### *Differentiation eines Vektors nach einem Skalar*

Für die Differentiation eines Produktes (Vektor mit Skalar, Skalarprodukt, Vektorprodukt, dyadisches Produkt) postulieren wir die Leibnizsche Produktregel.

Hängen die Basisvektoren und die Vektorkomponenten von einem Skalar, z. B.  $\lambda$ , ab, so ergibt die Differentiation eines Vektors  $\mathbf{a}$  bei Beachtung von (1.9.1) und (1.9.5)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} &= e_\mu \frac{da^\mu}{d\lambda} + \frac{de_\mu}{d\lambda} a^\mu \\ &= e_u \frac{da_u}{d\lambda} + e_v \frac{da_v}{d\lambda} + e_w \frac{da_w}{d\lambda} + \frac{de_u}{d\lambda} a_u + \frac{de_v}{d\lambda} a_v + \frac{de_w}{d\lambda} a_w. \end{aligned} \quad (1.9.43)$$

#### *Gradient*

Die vom benutzten Koordinatensystem unabhängige Grenzwertdefinition des Gradienten einer skalaren Funktion  $\Psi = \Psi(x^\mu, \lambda)$  ( $\lambda$  Parameter) lautet:

$$\text{grad } \Psi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta V} \oint_{(\Delta V)} \Psi \, d\boldsymbol{\sigma} \right). \quad (1.9.44)$$

Dabei ist der Flächenelementvektor  $d\boldsymbol{\sigma}$  vom betrachteten kleinen Volumenelement  $\Delta V$  nach außen gerichtet. Die Integration erstreckt sich über die Oberfläche von  $\Delta V$ . Es besteht, wie eine detaillierte Untersuchung ergibt, bei Beachtung von (1.9.1) die Äquivalenz von (1.9.44) mit

$$\text{grad } \Psi = e^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = e^\mu \Psi_{,\mu} \quad (1.9.45)$$

in krummlinigen Koordinaten oder wegen (1.9.6) mit

$$\text{grad } \Psi = e_u \frac{1}{U} \frac{\partial \Psi}{\partial u} + e_v \frac{1}{V} \frac{\partial \Psi}{\partial v} + e_w \frac{1}{W} \frac{\partial \Psi}{\partial w} \quad (1.9.46)$$

in orthogonalen krummlinigen Koordinaten oder mit

$$\text{grad } \Psi = i\Psi_{,x} + j\Psi_{,y} + k\Psi_{,z} \quad (1.9.47)$$

in kartesischen Koordinaten, wobei die Kommasymbolik benutzt wurde:

$$\begin{aligned} \Psi_{,\mu} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}, & \Psi_{,x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \Psi_{,y} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}, & \Psi_{,z} &= \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.9.48)$$

Mit Hilfe des Gradienten, der, wie man bereits aus seiner Definition (1.9.44) von der rechten Seite der Gleichung her erkennt, ein Vektor ist, schreibt sich das vollständige (totale) Differential von  $\Psi$  unter Benutzung des Skalarprodukts in kartesischen Koordinaten als ( $d\mathbf{r} = d\mathbf{s}$ )

$$\begin{aligned} d\Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} d\lambda + \Psi_{,x} dx + \Psi_{,y} dy + \Psi_{,z} dz \\ &= \Psi_{,\lambda} d\lambda + \text{grad } \Psi \, d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.9.49)$$

Eine von den Koordinaten (in der Physik Raum- und Zeitkoordinaten oder deren höherdimensionale Verallgemeinerungen) abhängige Größe nennt man Feldgröße oder kurz Feld. In diesem Sinne beschreibt der Gradient ein Gradientenfeld, das ein spezielles Vektorfeld ist.

Da das räumliche Kurvenintegral, gebildet über ein vollständiges Differential, vom Weg unabhängig ist, ergibt sich für die Änderung der Funktion  $\Psi$  zwischen zwei Punkten  $P_0$  und  $P_1$  bzw. für das Integral über eine geschlossene Linie gemäß (1.7.7) und (1.7.8) bei Festhalten des Parameters  $\lambda$

$$\begin{aligned} \text{a) } \Psi(P_1) - \Psi(P_0) &= \int_{P_0}^{P_1} \text{grad } \Psi \, d\mathbf{r} \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } \oint d\Psi &= \oint \text{grad } \Psi \, d\mathbf{r} = 0. \end{aligned} \quad (1.9.50)$$

Die eben dargelegten Formeln kann man anschaulich folgendermaßen deuten: Verbindet man im 3-dimensionalen Raum alle Punkte mit gleichen Werten von  $\Psi$ , so erhält man, Stetigkeit von  $\Psi$  vorausgesetzt, bei Benutzung kartesischer Koordinaten die Niveauflächen (Äquipotentialflächen bei Potentialfunktionen)

$$\Psi(x, y, z, \lambda) = \text{const}, \quad (1.9.51)$$

deren Gestalt im allgemeinen Fall noch von dem frei wählbaren Parameter  $\lambda$  abhängen kann.

Halten wir diesen Parameter fest ( $\lambda = \lambda_0$ ), so ist gemäß (1.9.49)  $d\Psi$  die Änderung von  $\Psi$  beim Fortschreiten um  $d\mathbf{r}$ , d. h. um den Betrag  $|d\mathbf{r}|$  in die Richtung von  $d\mathbf{r}$ :

$$d\Psi = \text{grad } \Psi \, d\mathbf{r} = |\text{grad } \Psi| \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \cos(\mathbf{dr}, \text{grad } \Psi). \quad (1.9.52)$$

Schreiten wir also in der Niveaufläche ( $\Psi = \text{const}$ , d. h.  $d\Psi = 0$ ) fort, so erkennen wir aus dem Verschwinden des Skalarprodukts, daß der Gradient senkrecht auf der Niveaufläche steht. Weiter sehen wir, daß die Änderung von  $\Psi$  maximal wird, wenn wir uns (bei gleichem  $|d\mathbf{r}|$ ) senkrecht zur Niveaufläche bewegen. Der Gradient gibt also die Richtung des größten Anstiegs der Funktion  $\Psi$  an. Daher rührt der etwa mit Gefälle identifizierbare Name Gradient.

Gelegentlich begegnet man der Symbolik  $\frac{\partial \Psi}{\partial s}$ . Man versteht darunter den nach der Kettenregel zu gewinnenden Differentialquotienten von  $\Psi$  in Richtung von  $ds = i \, dx + j \, dy + k \, dz$ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \Psi_{,x} \cos \alpha + \Psi_{,y} \cos \beta + \Psi_{,z} \cos \gamma = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \text{grad } \Psi, \quad (1.9.53)$$

wobei die Richtung von  $ds$  durch die Richtungscosinus

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \cos \beta, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \cos \gamma \quad (1.9.54)$$

festgelegt ist.

**Divergenz**

Ähnlich zu (1.9.44) kann man auch die Divergenz eines Vektors  $\mathbf{a}$  vom Koordinatensystem unabhängig als Grenzwert definieren:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta V} \oint_{(\Delta V)} \mathbf{a} d\sigma \right). \quad (1.9.55)$$

Da unter dem Integral ein Skalarprodukt steht, ist die Divergenz eine skalare Größe. Man kann sie folgendermaßen anschaulich deuten: Wenn man annimmt, daß  $\mathbf{a}$  der Geschwindigkeitsvektor der Strömung einer Flüssigkeit ist, so entspricht das Integral der in der Zeiteinheit durch die Oberfläche des Volumelements  $\Delta V$  fließenden Flüssigkeitsmenge. Da es sich um ein geschlossenes Oberflächenintegral handelt, wird wegen des sich bei der Integration ändernden Vorzeichens des Skalarprodukts die einfließende Menge mit einem anderen Vorzeichen als die ausfließende Menge belegt. Deshalb beschreibt das Integral die aus Einströmung und Ausströmung gebildete Bilanz, die nur dann von null verschieden sein kann, wenn im Volumelement Quellen oder Senken der Strömung sind. Der Differenzenquotient setzt diese Bilanz zum Volumelement in Beziehung, macht daraus also eine Bilanzdichte. Der durch den Grenzübergang erhaltene Differentialquotient gestattet dann eine punktweise Betrachtung. Aus dieser Deutung leuchtet ein, daß die Divergenz anschaulich mit Quelldichte (Ergiebigkeit) zu identifizieren ist.

In orthogonalen krummlinigen Koordinaten besteht, wie eine detaillierte Untersuchung zeigt, zu (1.9.55) die Äquivalenz

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{UVW} \left[ \frac{\partial(VW a_u)}{\partial u} + \frac{\partial(WU a_v)}{\partial v} + \frac{\partial(UV a_w)}{\partial w} \right]. \quad (1.9.56)$$

Diese Formel geht wegen (1.9.16) für kartesische Koordinaten in

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu} \\ &= a^\mu_{,\mu} \quad \left( a^\mu_{,\nu} = \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\nu} \right) \end{aligned} \quad (1.9.57)$$

über ( $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ;  $a^1 = a_x$ ,  $a^2 = a_y$ ,  $a^3 = a_z$ ). Ist der Vektor  $\mathbf{a}$  der Gradient einer Funktion  $\Psi$ :

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \Psi, \quad (1.9.58)$$

und führt man zur Abkürzung den Laplaceschen Differentialoperator  $\Delta$  gemäß

$$\Delta \Psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi \quad (1.9.59)$$

ein, so entsteht aus (1.9.56) vermöge (1.9.46)

$$\Delta \Psi = \frac{1}{UVW} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{VW}{U} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{WU}{V} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{UV}{W} \frac{\partial \Psi}{\partial w} \right) \right] \quad (1.9.60)$$

und in der Spezialisierung auf kartesische Koordinaten

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}. \quad (1.9.61)$$

Da man es in der Physik oft mit verallgemeinerten Potentialgleichungen der Art ( $-q$  vorgegebene Quelldichte)

$$\Delta\Psi = -q$$

zu tun hat, wird der Name Potentialfunktion für  $\Psi$  verständlich.

### Rotation

Während die Divergenzbildung von einem Vektorfeld zu einem Skalar führt, liefert die Rotationsbildung eines Vektorfeldes, hier  $\mathbf{b}$  genannt, wieder ein Vektorfeld. Auch die Rotation läßt sich koordinatenfrei als Grenzwert definieren:

$$\text{rot } \mathbf{b} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta V} \oint_{(\Delta V)} \mathbf{d}\sigma \times \mathbf{b} \right), \quad (1.9.62)$$

woraus wegen des Vektorproduktes auf der rechten Seite der Vektorcharakter der Rotation einleuchtet. Zu dieser Definition äquivalent ist, wie eine detaillierte Untersuchung ergibt, in orthogonalen krummlinigen Koordinaten der Ausdruck ( $\mathbf{b} = \mathbf{e}_u b_u + \mathbf{e}_v b_v + \mathbf{e}_w b_w$ ):

$$\text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{e}_u (\text{rot } \mathbf{b})_u + \mathbf{e}_v (\text{rot } \mathbf{b})_v + \mathbf{e}_w (\text{rot } \mathbf{b})_w \quad (1.9.63)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{a) } (\text{rot } \mathbf{b})_u &= \frac{1}{VW} \left[ \frac{\partial(Wb_w)}{\partial v} - \frac{\partial(Vb_v)}{\partial w} \right], \\ \text{b) } (\text{rot } \mathbf{b})_v &= \frac{1}{WU} \left[ \frac{\partial(Ub_u)}{\partial w} - \frac{\partial(Wb_w)}{\partial u} \right], \\ \text{c) } (\text{rot } \mathbf{b})_w &= \frac{1}{UV} \left[ \frac{\partial(Vb_v)}{\partial u} - \frac{\partial(Ub_u)}{\partial v} \right] \end{aligned} \quad (1.9.64)$$

und in kartesischen Koordinaten der Ausdruck ( $\mathbf{b} = i b_x + j b_y + k b_z$ ):

$$\text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{i}(\text{rot } \mathbf{b})_x + \mathbf{j}(\text{rot } \mathbf{b})_y + \mathbf{k}(\text{rot } \mathbf{b})_z \quad (1.9.65)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{a) } (\text{rot } \mathbf{b})_x &= \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}, \\ \text{b) } (\text{rot } \mathbf{b})_y &= \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}, \\ \text{c) } (\text{rot } \mathbf{b})_z &= \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.9.66)$$

Den Ausdruck (1.9.65) kann man mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols (1.6.36a), da in kartesischen Koordinaten nur untere Indizes erforderlich sind, in der Gestalt

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = e_\alpha \Delta_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial b_\gamma}{\partial x^\beta} \quad (1.9.67)$$

( $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z; e_1 = \mathbf{i}, e_2 = \mathbf{j}, e_3 = \mathbf{k}$ ) oder formal in Determinantenform als

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.9.68)$$

schreiben.

Durch Einsetzen von (1.9.47) in (1.9.65) bestätigt man (die Vertauschbarkeit der Ableitungen 2. Ordnung von  $\Psi$  vorausgesetzt), daß

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Psi = 0 \quad (1.9.69)$$

gilt. Setzt man (1.9.65) als  $\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$  in (1.9.57) ein, so ergibt sich vermöge (1.9.66)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{b} = 0. \quad (1.9.70)$$

Die anschauliche Deutung der Rotation anhand der Definition (1.9.62) ist ziemlich schwierig. In der Hydromechanik zeigt es sich, daß die Rotation eines Geschwindigkeitsfeldes der Wirbeldichte dieses Feldes zuzuordnen ist. Man nennt deshalb ein Rotationsfeld (Rotorfeld) auch ein Wirbelfeld. In diesem Sprachgebrauch formuliert sich dann der Inhalt von (1.9.69) so:

Die Wirbeldichte eines Gradientenfeldes verschwindet, d. h., in einem Potentialfeld gibt es keine Wirbel. Das liegt daran, daß die durch den Gradienten beschriebenen Feldlinien offene Kurven mit Quelle und Senke an den Endpunkten sind. Das Gradientenfeld ist also in diesem Sinne ein Quellenfeld.

Den Inhalt von (1.9.70) kann man so ausdrücken:

Die Quelldichte eines Wirbelfeldes verschwindet. Die Ursache dafür liegt darin, daß die durch die Rotation beschriebenen Feldlinien geschlossene Kurven sind, daß also keine Endpunkte für Quellen und Senken existieren.

### **Vektorgradient**

Im Zusammenhang mit der Einführung des Gradienten konnten wir die Frage beantworten, wie sich eine skalare Feldfunktion  $\Psi$  beim Fortschreiten um  $d\mathbf{r}$  ändert. Wir stießen auf den Ausdruck (1.9.49). Die hier gestellte Frage nach der Änderung eines Vektorfeldes  $\mathbf{a}$  beim Fortschreiten um  $d\mathbf{r}$  führt uns auf den Begriff des Vektorgradienten. Um mathematische Komplikationen zu vermeiden, legen wir gleich kartesische Koordinaten zugrunde.



Die Beantwortung der gestellten Frage erfolgt so, daß das in (1.9.49) erhaltene Ergebnis komponentenweise angewandt wird, was möglich ist, da die Komponenten skalare Größen sind:

$$\begin{aligned} \text{a) } da_x &= \frac{\partial a_x}{\partial \lambda} d\lambda + \text{grad } a_x d\mathbf{r}, \\ \text{b) } da_y &= \frac{\partial a_y}{\partial \lambda} d\lambda + \text{grad } a_y d\mathbf{r}, \\ \text{c) } da_z &= \frac{\partial a_z}{\partial \lambda} d\lambda + \text{grad } a_z d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.9.71)$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen mit den entsprechenden Einheitsvektoren durch und addiert sie, so folgt

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda} d\lambda \\ &\quad + \mathbf{i}(\text{grad } a_x d\mathbf{r}) + \mathbf{j}(\text{grad } a_y d\mathbf{r}) + \mathbf{k}(\text{grad } a_z d\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.9.72)$$

Jetzt bedient man sich des dyadischen Produkts und kann dann dafür

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda} d\lambda \\ &\quad + d\mathbf{r}(\text{grad } a_x \circ \mathbf{i}) + d\mathbf{r}(\text{grad } a_y \circ \mathbf{j}) + d\mathbf{r}(\text{grad } a_z \circ \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (1.9.73)$$

schreiben (1.6.24). Der Vektorgradient des Vektors  $\mathbf{a}$  ist nun durch die folgende Summe dyadischer Produkte definiert:

$$\text{grad} \circ \mathbf{a} = \text{grad } a_x \circ \mathbf{i} + \text{grad } a_y \circ \mathbf{j} + \text{grad } a_z \circ \mathbf{k}. \quad (1.9.74)$$

Damit schreibt sich (1.9.73) vereinfacht als

$$d\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda} d\lambda + d\mathbf{r}(\text{grad} \circ \mathbf{a}). \quad (1.9.75)$$

Wir vermeiden die Benutzung des Vektorgradienten, da das Rechnen damit relativ umständlich ist. Viel eleganter ist die Verwendung der Indexsymbolik, in der (1.9.72) die einfache Form

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^\mu} dx^\mu \\ &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (1.9.76)$$

erhält.

**Nabla-Differentialoperator**

Auch hier Bezug nehmend auf kartesische Koordinaten, definieren wir den Nabla-Differentialoperator (Nabla-Operator), der gleichzeitig Vektor und Differentialoperator ist, wie folgt:

$$\nabla = e_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.9.77)$$

Der Name Nabla kommt von einem hebräischen Saiteninstrument dieser Form.

Aus der Definition des Nabla-Operators erkennt man seine Linearität, wie der Vergleich mit (1.7.199) zeigt, d. h.

$$\nabla(k_1 F + k_2 G) = k_1 \nabla F + k_2 \nabla G \quad (1.9.78)$$

( $k_1, k_2$  Konstanten), usw.

Durch Vergleich mit (1.9.47), (1.9.57), (1.9.59), (1.9.68) und (1.9.74) bestätigt man die Schreibweisen

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{grad} \Psi &= \nabla \Psi, \\ \text{b) } \operatorname{div} \mathbf{a} &= \nabla \mathbf{a}, \\ \text{c) } \Delta \Psi &= \nabla^2 \Psi, \\ \text{d) } \operatorname{rot} \mathbf{b} &= \nabla \times \mathbf{b}, \\ \text{e) } \operatorname{dr}(\operatorname{grad} \circ \mathbf{a}) &= (\operatorname{dr} \nabla) \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (1.9.79)$$

Der Nabla-Operator bewährt sich sehr bei der Umformung von Differentialausdrücken. Seiner Natur entsprechend, unterliegt er einerseits den Rechenregeln der Vektoralgebra, andererseits wirkt er als Differentialoperator auf alle rechts von ihm stehenden (meist durch Klammern abgegrenzte) Größen. Stehen rechts Produkte, so kann wegen der Linearität des Nabla-Operators die Leibnizsche Produktregel angewendet werden. Sind solche Produkte nicht kommutativ, wie z. B. das Vektorprodukt oder das dyadische Produkt, so kann man einen Faktor davon nicht mehr nach links vor den Nabla-Operator ziehen. Deshalb bedient man sich der Symbolik eines angehängten Index  $c$ , der ausdrücken soll, daß auf diese Größe die Differentiation schon gewirkt hat, diese Größe also konstant zu halten ist.

Als operative Rechenregeln, die sehr sorgfältig gehandhabt werden müssen, halten wir fest:

1. Man schreibe den umzuformenden Differentialausdruck in die Nabla-Sprache um und bilde im Sinne der Leibnizschen Produktregel eine Summe gleichartiger Ausdrücke, wobei sich die Anzahl der Glieder aus der Anzahl der Faktoren der zu differenzierenden Produkte ergibt. Danach versehe man der Reihe nach in den Gliedern die bei der Differentiation konstant zu haltenden Faktoren mit dem Index  $c$ .
2. Man forme nach den Rechenregeln der Vektoralgebra die Ausdrücke so um, daß die mit dem Index  $c$  versehenen Größen links vom Nabla-Operator zu stehen kommen. Dann kann der Index  $c$  wieder weggelassen werden.
3. Man wandle die Nabla-Ausdrücke in die gewohnten Differentialausdrücke um.

Zur Illustration dieser Regeln geben wir im Detail einige Beispiele an ( $u, v, w$  Skalare):

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(uvw) &= \nabla uv_c w_c + \nabla u_c v w_c + \nabla u_c v_c w \\ &= vw \nabla u + uw \nabla v + uv \nabla w \\ &= vw \operatorname{grad} u + uw \operatorname{grad} v + uv \operatorname{grad} w, \\ \operatorname{div}(u\mathbf{a}) &= \nabla u_c \mathbf{a} + \nabla u \mathbf{a}_c \\ &= u \nabla \mathbf{a} + (\nabla u) \mathbf{a} \\ &= u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} u, \\ \operatorname{rot}(u\mathbf{a}) &= \nabla \times u_c \mathbf{a} + \nabla \times u \mathbf{a}_c \\ &= u \nabla \times \mathbf{a} + \nabla u \times \mathbf{a}_c \\ &= u \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \operatorname{grad} u, \\ \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \nabla(\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) \\ &= -\nabla(\mathbf{b} \times \mathbf{a}_c) + \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) \\ &= -\mathbf{a}(\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b}(\nabla \times \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} u &= \nabla \times \nabla u = 0.\end{aligned}$$

Gelegentlich wird der Nabla-Operator als  $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$  geschrieben, z. B.  $\operatorname{grad} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}$ . Diese Formel suggeriert die Interpretation, als würde  $\operatorname{grad} \Psi$  der (als Vektor anzusehenden) Änderung von  $\Psi$  in Richtung  $d\mathbf{r}$  entsprechen, was natürlich im allgemeinen falsch ist, wie unsere obigen Ausführungen, insbesondere (1.9.53), ausweisen. Nur im Fall der Kugelsymmetrie von  $\Psi(r)$  ist eine solche Identifizierung angebracht, weshalb in diesem Spezialfall das formale Differenzieren nach  $r$  zu sinnvollen Ergebnissen führt. Wir wollen diese leicht irreführende Symbolik lieber vermeiden.

### Umrechnungsformeln für Differentialausdrücke

Im folgenden stellen wir die geläufigsten Umformungen zusammen:

$$\begin{aligned}\text{a) } \operatorname{grad}(uv) &= u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u, \\ \text{b) } \operatorname{div}(u\mathbf{a}) &= u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} u, \\ \text{c) } \operatorname{rot}(u\mathbf{a}) &= u \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \operatorname{grad} u, \\ \text{d) } \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}, & (1.9.80) \\ \text{e) } \operatorname{grad}(\mathbf{a}\mathbf{b}) &= \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}, \\ \text{f) } \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}, \\ \text{g) } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a} \\ &\quad \left( \Delta \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2} \right), \\ \text{h) } (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{a} &= \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{a}^2 - \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} \\ &\quad (\text{Spezialfall von e}).\end{aligned}$$

Tritt der Ortsvektor, für den

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{div} \mathbf{r} &= 3, & \text{b) } \operatorname{rot} \mathbf{r} &= 0, \\ \text{c) } \operatorname{grad} r &= \frac{\mathbf{r}}{r}, & \text{d) } \operatorname{grad} \frac{1}{r} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (1.9.81)$$

gilt, auf, so vereinfachen sich einige dieser Formeln entscheidend:

$$\begin{aligned} \text{a) } (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r} &= \mathbf{a}, \\ \text{b) } \Delta(\mathbf{r} \mathbf{a}) &= \mathbf{r} \Delta \mathbf{a} + 2 \operatorname{div} \mathbf{a}, \\ \text{c) } \Delta(\mathbf{r} u) &= \mathbf{r} \Delta u + 2 \operatorname{grad} u, \\ \text{d) } \operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) + \operatorname{grad}(\mathbf{r} \mathbf{a}) &= -\mathbf{a} + \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (1.9.82)$$

In der Quantentheorie kommt der mit dem Bahndrehimpulsoperator verknüpfte Differentialoperator  $\mathbf{r} \times \nabla$  vor. Durch Rechnung bestätigt man

$$\begin{aligned} \text{a) } (\mathbf{r} \times \nabla) \times (\mathbf{r} \times \nabla) &= -\mathbf{r} \times \nabla, \\ \text{b) } (\mathbf{r} \times \nabla)^2 &= r^2 \Delta - (\mathbf{r} \nabla)^2 - (\mathbf{r} \nabla), \end{aligned} \quad (1.9.83)$$

wobei man zweckmäßigerweise diesen Operator auf einen Skalar wirken läßt und

$$(\mathbf{r} \times \nabla) u = \mathbf{r} \times \operatorname{grad} u \quad (1.9.84)$$

beachtet. Weiter gilt bei Wirkung dieses Operators auf einen Vektor:

$$(\mathbf{r} \times \nabla) \mathbf{a} = \mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{a}. \quad (1.9.85)$$

## 1.9.4 Integralsätze und Integralformeln

### a) Integralsätze

#### *Gaußscher Satz*

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dV = \int_{(V)} \mathbf{a} \, d\sigma \quad (1.9.86)$$

( $dV$  3-dimensionales Volumelement,  $d\sigma$  vom Volumen  $V$  nach außen gerichteter Flächenelementvektor). Der Gaußsche Satz gestattet die Umwandlung eines Volumintegrals über eine Divergenz in ein Oberflächenintegral, wobei die Oberfläche ( $V$ ) das Volumen  $V$  umschließt.

#### *Greenscher Satz*

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) \, dV = \int_{(V)} (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) \, d\sigma \quad (1.9.87)$$

( $u$  und  $v$  skalare Funktionen). Mit seiner Hilfe wird ein spezielles Volumintegral in ein Oberflächenintegral umgewandelt. Er ist vermöge des Gaußschen Satzes abzuleiten, indem man zunächst (1.9.80b) auf  $\mathbf{a} = \text{grad } v$  anwendet:

$$\text{div}(u \text{ grad } v) = u \Delta v + \text{grad } v \text{ grad } u, \quad (1.9.88)$$

danach  $u$  und  $v$  vertauscht:

$$\text{div}(v \text{ grad } u) = v \Delta u + \text{grad } u \text{ grad } v, \quad (1.9.89)$$

diese beiden letzten Gleichungen voneinander subtrahiert:

$$\text{div}(u \text{ grad } v - v \text{ grad } u) = u \Delta v - v \Delta u, \quad (1.9.90)$$

und darauf (1.9.86) anwendet.

### Stokesscher Satz

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_A \text{rot } \mathbf{a} \, d\boldsymbol{\sigma} &= \oint_{(A)} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } \Delta_{\mu\nu\lambda} \int_A a_{\lambda,\nu} \, d\sigma_\mu &= \oint_{(A)} a_\mu \, dx_\mu. \end{aligned} \quad (1.9.91)$$

Der Stokessche Satz, bei dessen Formulierung in Komponentenschreibweise wir auf (1.9.67) zurückgegriffen haben, ermöglicht die Umwandlung eines Flächenintegrals über eine Rotation in ein Kurvenintegral, wobei die geschlossene Integrationskurve ( $A$ ) die Fläche  $A$  berandet.

### b) Integralformeln

Neben diesen grundlegenden Integralsätzen sind oft noch folgende Integralformeln nützlich, die man aus (1.9.80) und den obigen Integralsätzen ableiten kann:

$$\int_V \text{grad } u \, dV = \int_{(V)} u \, d\boldsymbol{\sigma}, \quad (1.9.92)$$

$$\int_V \text{rot } \mathbf{a} \, dV = \int_{(V)} d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{a}, \quad (1.9.93)$$

$$\int_V \mathbf{r} \times \text{grad } u \, dV = \int_{(V)} u \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.9.94)$$

(diese Formel folgt aus der vorhergehenden für  $\mathbf{a} = r\mathbf{u}$  bei Benutzung von (1.9.80c) und (1.9.91)),

$$\int_V [\mathbf{r} \times \{(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{a}\}] dV + \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \operatorname{div} \mathbf{a} dV \quad (1.9.95)$$

$$= \int_{(V)} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) (\mathbf{a} d\boldsymbol{\sigma}),$$

$$\int_A d\boldsymbol{\sigma} \times \operatorname{grad} u = \int_{(A)} u d\mathbf{r}. \quad (1.9.96)$$

Die letzte Formel resultiert aus (1.9.91) für  $\mathbf{a} = n\mathbf{u}$  ( $n = \text{const}$ ) bei Heranziehung von (1.9.80c) und (1.6.45), wie nachfolgende Rechnung zeigt:

$$\int_A (\operatorname{grad} u \times \mathbf{n}) d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \int_A d\boldsymbol{\sigma} \times \operatorname{grad} u = \mathbf{n} \int_{(A)} u d\mathbf{r}.$$

### c) Zerlegungssatz für Vektorfelder

Wir knüpfen gedanklich an den durch die Formel (1.9.69) und (1.9.70) zum Ausdruck gebrachten Inhalt an.

Man nennt ein Vektorfeld  $\mathbf{v}^{(g)}$  (das Symbol (g) soll auf Gradientenfeld hindeuten), für das

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}^{(g)} = 0 \quad (1.9.97)$$

gilt, wirbelfrei. Durch Formel (1.9.69) haben wir bewiesen, daß die Wahl eines Gradientenfeldes für  $\mathbf{v}^{(g)}$ :

$$\mathbf{v}^{(g)} = \operatorname{grad} \Psi \quad (\Psi \text{ skalares Potential}), \quad (1.9.98)$$

hinreichend zur Befriedigung von (1.9.97) ist. Hier können wir nun nach Kenntnis des Stokes-Satzes zeigen, daß ein wirbelfreies Vektorfeld notwendigerweise ein Gradientenfeld sein muß, d. h., daß sich aus (1.9.97) notwendigerweise (1.9.98) ergibt.

Die Schlußweise basiert auf folgender Überlegung: Der Stokes-Satz (1.9.91) läßt aus (1.9.97) für jede beliebige Fläche  $A$  die Beziehung

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{v}^{(g)} d\boldsymbol{\sigma} = \int_{(A)} \mathbf{v}^{(g)} d\mathbf{r} = 0 \quad (1.9.99)$$

entstehen. Aus dem identischen Verschwinden des geschlossenen Linienintegrals resultiert, daß die Integration nur über ein vollständiges Differential erfolgt sein kann, d. h.

$$\text{a) } \mathbf{v}^{(g)} d\mathbf{r} = d\Psi, \quad \text{also b) } \mathbf{v}^{(g)} = \operatorname{grad} \Psi. \quad (1.9.100)$$

Die Divergenz dieses wirbelfreien Vektorfeldes  $\mathbf{v}^{(g)}$  wird damit:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^{(g)} = \Delta \Psi. \quad (1.9.101)$$

Ist eine Quelldichte  $\operatorname{div} \mathbf{v}^{(\text{g})}$  vorgegeben, so kann durch Lösen dieser Differentialgleichung das skalare Potential  $\psi$  bestimmt werden, woraus über (1.9.98) das wirbelfreie Gradientenfeld  $\mathbf{v}^{(\text{g})}$  ermittelt werden kann.

Ein Vektorfeld  $\mathbf{v}^{(\text{r})}$  (das Symbol  $(\text{r})$  soll auf Rotorfeld, synonym zu Wirbelfeld, hinweisen) mit der Eigenschaft

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^{(\text{r})} = 0 \quad (1.9.102)$$

heißt quellenfrei. Die Formel (1.9.70) bringt zum Ausdruck, daß die Wahl eines Wirbelfeldes für  $\mathbf{v}^{(\text{r})}$  ( $\mathbf{a}$  Vektorpotential):

$$\mathbf{v}^{(\text{r})} = \operatorname{rot} \mathbf{a} \quad (1.9.103)$$

hinreichend für die Erfüllung von (1.9.102) ist. Diese Darstellbarkeit (1.9.103) ist aber auch notwendig, wie aus den nachfolgenden Überlegungen ersichtlich wird.

Aus (1.9.103) folgt mittels (1.9.80g)

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}^{(\text{r})} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}. \quad (1.9.104)$$

Gibt man eine Wirbeldichte  $\operatorname{rot} \mathbf{v}^{(\text{r})}$  vor, so kann man durch Lösen dieser Differentialgleichung das Vektorpotential  $\mathbf{a}$  ermitteln, woraus dann über (1.9.103) das quellenfreie Wirbelfeld zu errechnen ist.

Der Zerlegungssatz für Vektorfelder lautet nun: Jedes überall stetige und im Unendlichen hinreichend stark abfallende Vektorfeld  $\mathbf{v}$  läßt sich eindeutig als Summe eines wirbelfreien und eines quellenfreien Feldes darstellen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\text{g})} + \mathbf{v}^{(\text{r})} \quad (1.9.105)$$

( $\mathbf{v}^{(\text{g})}$  Quellenfeld,  $\mathbf{v}^{(\text{r})}$  Wirbelfeld),

wobei

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{v}^{(\text{g})} &= -\operatorname{grad} \left( \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}|} d\bar{V} \right) \quad \text{und} \\ \text{b) } \mathbf{v}^{(\text{r})} &= \operatorname{rot} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}|} d\bar{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (1.9.106)$$

gilt. Es lassen sich in der Tat durch eine etwas längere Rechnung die Relationen

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{rot} \mathbf{v}^{(\text{g})} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}^{(\text{g})} = \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \text{b) } \operatorname{div} \mathbf{v}^{(\text{r})} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}^{(\text{r})} = \operatorname{rot} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.9.107)$$

beweisen. Außer Quellen und Wirbeln kommen deshalb keine weiteren Ursachen für eine Feldentstehung in Frage.

Die Eindeutigkeit der Zerlegung (1.9.105) beweist man indirekt, indem man zunächst von zwei verschiedenen Zerlegungen ausgeht, die jeweils zusammengehörigen Gleichungen voneinander subtrahiert und dann darauf die nachfolgende Schlußweise anwendet, die auf der Aussage basiert, daß ein im Unendlichen hinreichend stark abklingendes, stetiges (also keine Flächenbelegung) sowie überall quellenfreies und wirbelfreies Feld  $\mathbf{f}$  ( $\mathbf{f}$  steht für die Differenz der jeweils beiden als verschieden angenommenen Felder), für das also

$$\text{a) } \operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \quad \text{und} \quad \text{b) } \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$$

gefordert ist, identisch verschwindet.

In der Tat folgt aus der zweiten Gleichung  $\mathbf{f} = \operatorname{grad} u$  und damit aus der ersten

$$\Delta u = 0. \tag{1.9.108}$$

Da die Funktion  $u$  nur bis auf eine Konstante festgelegt ist, kann man die Randbedingung

$$u \Big|_{\infty} = 0 \tag{1.9.109}$$

postulieren. Daß  $u = 0$  und damit  $\mathbf{f} = 0$  aus (1.9.108) und (1.9.109) resultiert, erkennt man aus der Anwendung des Gaußschen Satzes (1.9.86):

$$\begin{aligned} \int_{(V)} u \operatorname{grad} u \, d\sigma &= \int_V \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) \, dV \\ &= \int_V [u \Delta u + (\operatorname{grad} u)^2] \, dV. \end{aligned} \tag{1.9.110}$$

Verschwindet für  $r \rightarrow \infty$  im Integral auf der linken Seite dieser Gleichung der Integrand stärker als die Oberfläche wächst, so geht dieses Integral gegen null. Damit muß auch das Volumintegral auf der rechten Seite null werden, was wegen (1.9.108)  $\operatorname{grad} u = 0$  und wegen (1.9.109)  $u = 0$  zur Folge hat.

### 1.9.5 Differentialausdrücke bei Unstetigkeiten

Bei den obigen Definitionen der Differentialausdrücke:  $\operatorname{grad}$  (1.9.44),  $\operatorname{div}$  (1.9.55) und  $\operatorname{rot}$  (1.9.62) war die Stetigkeit der Feldgrößen auf der Oberfläche ( $\Delta V$ ) vorausgesetzt worden. Schließt diese Oberfläche, wie in Abb. 1.10 skizziert, eine Sprungfläche  $F$  (Fläche, auf der die Feldgrößen unstetig sind) ein, so entstehen beim Grenzübergang keine endlichen Differentialquotienten, vielmehr divergieren diese Grenzwerte. Da bei der mathematischen Modellierung physikalischer Gegebenheiten Unstetigkeiten von Feldgrößen auftreten können, ist es zur Einführung der Begriffe Flächengradient ( $\operatorname{Grad}$ ), Flächendivergenz ( $\operatorname{Div}$ ) und Flächenrotation ( $\operatorname{Rot}$ ) gekommen, deren Definitionen den obigen Grenzwertdefinitionen nachgebildet



sind:

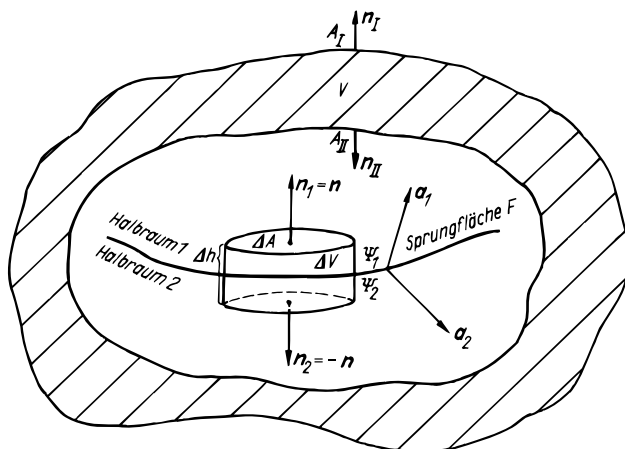
$$\text{Grad } \psi = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta A} \oint_{\Delta A} \psi \, d\boldsymbol{\sigma} \right), \quad (1.9.111)$$

$$\text{Div } \mathbf{a} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta A} \oint_{\Delta A} \mathbf{a} \, d\boldsymbol{\sigma} \right), \quad (1.9.112)$$

$$\text{Rot } \mathbf{a} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta A} \oint_{\Delta A} d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{a} \right). \quad (1.9.113)$$

Auf die Überführung der Grenzwertdefinition von grad, div und rot in die bekannten Differentialausdrücke wie auch auf die Ableitung des Gaußschen Satzes und Stokesschen Satzes haben wir verzichtet. Die Flächen-Differentialausdrücke, die für die physikalische Anwendung spezifisch sind und in der Mathematikausbildung kaum vermittelt werden, sollen hier aber näher untersucht werden.

Wir betrachten den in Abb. 1.10 skizzierten sehr flachen, kleinen trommelförmigen Bereich, in dessen Innerem die Sprungfläche verläuft und auf den sich die Integrale in (1.9.111), (1.9.112) und (1.9.113) beziehen.



**Abbildung 1.10:** Zur Ableitung der Differentialausdrücke für Feldgrößen mit Unstetigkeiten an einer Sprungfläche

Seine Höhe sei  $\Delta h$ , seine Grundfläche und Deckfläche mögen den Flächeninhalt  $\Delta A$  haben. Die Vektoren  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$  seien Normalenvektoren (Einheitsvektoren), also senkrecht zu den jeweiligen Flächen gerichtet. Die in den obigen Integralen gekennzeichnete Oberflächenintegration besteht demnach aus drei Gliedern: Grundflächen-, Deckflächen- und Man-

telanteil, z. B.

$$\oint_{\Delta A} \Psi \, d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_1 \Psi_1 \Delta A + \mathbf{n}_2 \Psi_2 \Delta A + \int_{(\text{Mantel})} \Psi \, d\boldsymbol{\sigma}. \quad (1.9.114)$$

Der Mantelanteil liefert im weiteren kein Glied, da sich bei der Integration die gegenüberliegenden Beiträge aus demselben Halbraum wegen der entgegengesetzten Orientierung des Flächenelementvektors kompensieren. Damit resultiert

$$\text{Grad } \Psi = (\Psi_1 - \Psi_2) \mathbf{n} \quad (1.9.115)$$

und analog

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{Div } \mathbf{a} &= (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \mathbf{n}, \\ \text{b) } \text{Rot } \mathbf{a} &= \mathbf{n} \times (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2). \end{aligned} \quad (1.9.116)$$

Als nächstes wenden wir den Gaußschen Satz auf den von den Flächen  $A_I$  und  $A_{II}$  begrenzten schraffierten Bereich  $V$  an:

$$\int_V \text{div } \mathbf{a} \, dV = \int_{A_I} \mathbf{a} \, d\boldsymbol{\sigma} + \int_{A_{II}} \mathbf{a} \, d\boldsymbol{\sigma}. \quad (1.9.117)$$

Nun lassen wir  $A_{II}$  die Sprungfläche dicht umschließen. Dann entsteht aus dem letzten Glied der rechten Seite ( $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_{II} \, df = -\mathbf{n} \, df$ )

$$\int_{A_{II}} \mathbf{a} \, d\boldsymbol{\sigma} = \int_F (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \mathbf{n}_{II} \, df = - \int_F \text{Div } \mathbf{a} \, df, \quad (1.9.118)$$

so daß der Gaußsche Satz die erweiterte Form

$$\int_V \text{div } \mathbf{a} \, dV + \int_F \text{Div } \mathbf{a} \, df = \int_{A_I} \mathbf{a} \, d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.9.119)$$

erhält.

### 1.9.6 Differentialausdrücke in speziellen orthogonalen krummlinigen Koordinatensystemen

Im Abschnitt 1.9.3 haben wir die allgemeinen Formeln für die Differentialausdrücke in orthogonalen krummlinigen Koordinaten zusammengestellt. Diese Formeln sollen nun unter Zuhilfenahme der Ergebnisse des Abschnitts 1.9.2 für die in der Physik geläufigsten 3-dimensionalen Koordinatensysteme expliziert werden.

**Kreiszyylinderkoordinaten**  $\{R, \Phi, z\}$

Vektor:

$$\mathbf{a} = e_R a_R + e_\Phi a_\Phi + \mathbf{k} a_z. \quad (1.9.120)$$

Gradient:

$$\text{grad } \Psi = e_R \frac{\partial \Psi}{\partial R} + e_\Phi \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} + \mathbf{k} \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (1.9.121)$$

Divergenz:

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{div } \mathbf{a} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R a_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial a_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \\ \text{b) } \Delta \Psi &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1.9.122)$$

Rotation:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{a} &= e_R \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial a_z}{\partial \Phi} - \frac{\partial a_\Phi}{\partial z} \right] + e_\Phi \left[ \frac{\partial a_R}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial R} \right] \\ &+ \mathbf{k} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (R a_\Phi)}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial a_R}{\partial \Phi} \right]. \end{aligned} \quad (1.9.123)$$

Man kann diese Formeln auch direkt herleiten, wenn man von (1.9.29a):

$$\begin{aligned} e_R &= \mathbf{i} \cos \Phi + \mathbf{j} \sin \Phi, \\ e_\Phi &= -\mathbf{i} \sin \Phi + \mathbf{j} \cos \Phi, \\ e_z &= \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (1.9.124)$$

ausgeht und sich daraus die folgenden Relationen ermittelt:

$$\begin{aligned} \text{a) } e_R \times e_\Phi &= \mathbf{k}, \\ \text{b) } e_\Phi \times \mathbf{k} &= e_R, \\ \text{c) } \mathbf{k} \times e_R &= e_\Phi; \end{aligned} \quad (1.9.125)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{div } e_R &= \frac{1}{R}, & \text{div } e_\Phi &= 0, & \text{div } \mathbf{k} &= 0, \\ \text{b) } \text{rot } e_R &= 0, & \text{rot } e_\Phi &= \frac{\mathbf{k}}{R}, & \text{rot } \mathbf{k} &= 0, \end{aligned} \quad (1.9.126)$$

wobei man

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{grad } \sin \Phi &= e_\Phi \frac{\cos \Phi}{R}, \\ \text{b) } \text{grad } \cos \Phi &= -e_\Phi \frac{\sin \Phi}{R} \end{aligned} \quad (1.9.127)$$

zu beachten hat. Für manche Umformungen sind auch die Zusammenhänge ( $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ;  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ ):

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial x^A} &= \mathbf{e}_A \frac{1}{R} - \mathbf{e}_R \frac{x_A}{R^2}, & \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial z} &= 0, \\ \text{b) } \frac{\partial \mathbf{e}_\Phi}{\partial x^A} &= \mathbf{k} \times \mathbf{e}_A \frac{1}{R} - \mathbf{e}_\Phi \frac{x_A}{R^2}, & \frac{\partial \mathbf{e}_\Phi}{\partial z} &= 0, \\ \text{c) } \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x^\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (1.9.128)$$

( $A = 1, 2$ ) nützlich, aus denen man  $\left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta \mathbf{e}_R &= -\mathbf{e}_R \frac{1}{R^2}, \\ \text{b) } \Delta \mathbf{e}_\Phi &= -\mathbf{e}_\Phi \frac{1}{R^2}, \\ \text{c) } \Delta \mathbf{k} &= 0 \end{aligned} \quad (1.9.129)$$

gewinnen kann. Diese letzten Formeln werden zur Herleitung von

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a} &= \mathbf{e}_R \left[ \Delta a_R - \frac{a_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial a_\Phi}{\partial \Phi} \right] \\ &+ \mathbf{e}_\Phi \left[ \Delta a_\Phi - \frac{a_\Phi}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial a_R}{\partial \Phi} \right] + \mathbf{k} \Delta a_z \end{aligned} \quad (1.9.130)$$

benutzt. Die Kenntnis dieses Laplaceschen Differentialausdrucks ist für die Behandlung mancher physikalischer Probleme erforderlich.

### Räumliche Polarkoordinaten $\{r, \vartheta, \varphi\}$

Vektor:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_r a_r + \mathbf{e}_\vartheta a_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi a_\varphi. \quad (1.9.131)$$

Gradient:

$$\text{grad } \Psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}. \quad (1.9.132)$$

Divergenz:

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{div } \mathbf{a} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) \\ &+ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \text{b) } \Delta \Psi &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ &+ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (1.9.133)$$

Rotation:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} = & e_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\sin \vartheta a_\varphi)}{\partial \vartheta} \right] + e_\vartheta \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] \\ & + e_\varphi \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial(ra_\vartheta)}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (1.9.134)$$

Auch hier kann man eine direkte Herleitung dieser Formeln vornehmen, wenn man von (1.9.37a):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \cos \varphi \sin \vartheta + \mathbf{j} \sin \varphi \sin \vartheta + \mathbf{k} \cos \vartheta, \\ \mathbf{e}_\vartheta &= \mathbf{i} \cos \varphi \cos \vartheta + \mathbf{j} \sin \varphi \cos \vartheta - \mathbf{k} \sin \vartheta, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.9.135)$$

ausgeht und die folgenden Zusammenhänge errechnet:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\vartheta &= \mathbf{e}_\varphi, \\ \text{b) } \mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_r, \end{aligned} \quad (1.9.136)$$

$$\text{c) } \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\vartheta;$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{div} \mathbf{e}_r &= \frac{2}{r}, & \operatorname{div} \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{1}{r} \cot \vartheta, \\ & \operatorname{div} \mathbf{e}_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1.9.137)$$

$$\text{b) } \operatorname{rot} \mathbf{e}_r = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \frac{\cot \vartheta}{r} - \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r},$$

wofür man

$$\text{a) } \operatorname{grad} \sin \vartheta = \mathbf{e}_\vartheta \frac{\cos \vartheta}{r}, \quad \operatorname{grad} \cos \vartheta = -\mathbf{e}_\vartheta \frac{\sin \vartheta}{r}, \quad (1.9.138)$$

$$\text{b) } \operatorname{grad} \sin \varphi = \mathbf{e}_\varphi \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta}, \quad \operatorname{grad} \cos \varphi = -\mathbf{e}_\varphi \frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta}$$

benötigt. Ermittelt man noch die Relationen

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial x^\alpha} &= \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r} - \mathbf{e}_r \frac{x_\alpha}{r^2}, \\ \text{b) } \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial x^\alpha} &= \mathbf{e}_\alpha \frac{\cot \vartheta}{r} + \mathbf{e}_r \left[ (\cot \vartheta)_{,\alpha} - \frac{x_\alpha}{r^2} \cot \vartheta \right] + \mathbf{k} \frac{(\sin \vartheta)_{,\alpha}}{\sin^2 \vartheta}, \end{aligned} \quad (1.9.139)$$

$$\text{c) } \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial x^\alpha} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \vartheta} - \mathbf{e}_\varphi \left[ \frac{x_\alpha}{r^2} + (\ln \sin \vartheta)_{,\alpha} \right],$$

aus denen die Formeln

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta \mathbf{e}_r &= -\mathbf{e}_r \frac{2}{r^2}, \\ \text{b) } \Delta \mathbf{e}_\vartheta &= -\mathbf{e}_r \frac{2}{r^2} \cot \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}, \end{aligned} \quad (1.9.140)$$

$$\text{c) } \Delta \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}$$

zu gewinnen sind, so hat man damit die Hilfsmittel zur Ableitung des für die physikalischen Anwendungen nützlichen Laplaceschen Differentialausdrucks aufbereitet. Man findet

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a} = & \mathbf{e}_r \left[ \Delta a_r - \frac{2}{r^2} a_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2} a_\vartheta \right] \\ & + \mathbf{e}_\vartheta \left[ \Delta a_\vartheta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} a_\vartheta - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \right] \\ & + \mathbf{e}_\varphi \left[ \Delta a_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} a_\varphi + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (1.9.141)$$

## 1.10 Differentialgleichungen

### 1.10.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

#### a) Klassifizierung der Lösungen

Die allgemeine Form einer gewöhnlichen, im allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung lautet ( $y^{(k)}$  Ableitung  $k$ -ter Ordnung):

$$F \left( y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x \right) = 0. \quad (1.10.1)$$

Sie zu lösen heißt, die Gesamtheit aller Funktionen  $y(x)$  zu ermitteln, die sie befriedigen. Die allgemeine (vollständige) Lösung enthält  $n$  willkürliche Integrationskonstanten. Gibt man diesen Konstanten spezielle Werte, so bekommt man daraus partikuläre Lösungen.

Eine nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung kann eine Lösung haben, die nicht durch eine spezielle Wahl der Konstanten hervorgeht. Man hat es dann mit einer singulären Lösung zu tun (Envelope).

Die bei der Lösung einer Differentialgleichung auftretenden Integrationskonstanten werden durch eine entsprechende Anzahl von Anfangs- und Randbedingungen festgelegt.

Ist es gelungen, aus einer Differentialgleichung  $n$ -ter-Ordnung durch Integration eine von niedrigerer Ordnung zu gewinnen, so nennt man letztere eine intermediäre Lösung.

#### b) Einige spezielle Differentialgleichungen

Die Lösungsverfahren für Differentialgleichungen sind sehr vielschichtig. Im folgenden sollen die Lösungen einiger in der Physik gelegentlich auftretender Differentialgleichungen angegeben werden.

##### *Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*

$$y' = f(x)y + g(x). \quad (1.10.2)$$

Lösung:

$$y = \left[ A + \int g(x) \exp \left( - \int f(x) dx \right) dx \right] \exp \left( \int f(x) dx \right) \quad (1.10.3)$$

( $A$  Konstante).

**Bernoullische Differentialgleichung**

$$y' = f(x)y + g(x)y^n. \quad (1.10.4)$$

Durch die Substitution  $Y = y^{1-n}$  erfolgt die Zurückführung der Bernoullischen Differentialgleichung auf den Typ (1.10.2).

**Riccatische Differentialgleichung**

$$y' = a_1(x) + a_2(x)y + a_3(x)y^2. \quad (1.10.5)$$

Die Lösung ist durch die Substitution  $y = Y + Z$  möglich, wenn man eine spezielle Lösung  $Y(x)$  kennt.

**Exakte Differentialgleichung**

Die Differentialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0 \quad (1.10.6)$$

heißt exakte Differentialgleichung, wenn die zugeordnete Pfaffsche Form

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad (1.10.7)$$

ein vollständiges Differential ist. Ist das nicht der Fall, so kann durch Multiplikation mit einem integrierenden Faktor (Eulerscher Multiplikator)  $M$ , der der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial(Mg)}{\partial x} = \frac{\partial(Mf)}{\partial y} \quad (1.10.8)$$

genügen muß, die Vollständigkeit erreicht werden und die Integration mittels Kurvenintegration erfolgen.

**Eulersche Differentialgleichung**

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1.10.9)$$

( $a_1, \dots, a_n$  Konstanten).

Durch die Substitution  $x = e^\xi$  erhält man eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, mit der wir uns später ausführlich befassen werden.

**c) Allgemeine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung****Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung**

Diese Differentialgleichung lautet:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = -q(x). \quad (1.10.10)$$

$L$  symbolisiert einen linearen Differentialoperator. Die Funktion  $q(x)$  beschreibt die Inhomogenität. Ist  $q(x) = 0$ , so spricht man von einer homogenen Differentialgleichung. Ist  $q(x) \neq 0$ , so hat man es mit einer inhomogenen Differentialgleichung zu tun. Wegen der variablen Koeffizienten  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  ist das Auffinden einer Lösung von (1.10.10) im allgemeinen sehr schwierig.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1.10.10) ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung  $Y(x)$  der homogenen Differentialgleichung  $L[Y] = 0$ , wobei  $Y(x)$   $n$  Integrationskonstanten  $C_1, \dots, C_n$  enthält, und einer Partikulärlösung  $Q(x)$  der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = Y(x) + Q(x). \quad (1.10.11)$$

### Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

Die Lösung lautet:

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (1.10.12)$$

wobei die Funktionen  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  ein Fundamentalsystem bilden müssen. Das bedeutet, daß sie einerseits die homogene Differentialgleichung befriedigen und andererseits linear unabhängig sein müssen, d. h., aus  $Y(x) = 0$  muß  $C_1 = 0, C_2 = 0, \dots, C_n = 0$  folgen.

Notwendige und hinreichende Bedingung für die lineare Unabhängigkeit ist das Nichtverschwinden der Wronski-Determinante:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (1.10.13)$$

$$= A_0 \exp\left(-\int p_1(x) dx\right) \neq 0 \quad (A_0 \text{ Konstante}).$$

Mit der linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung werden wir uns später noch ausführlich befassen.

### Variation der Konstanten

Diese Methode, bei der die Integrationskonstanten  $C_i$  in (1.10.12) im Sinne eines Ansatzes als variabel betrachtet werden, dient zur Gewinnung einer Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1.10.10) aus der allgemeinen Lösung (1.10.12) der homogenen Differentialgleichung:

$$Q(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x). \quad (1.10.14)$$



Die  $n$  variablen Koeffizienten  $C_i(x)$  bestimmen sich aus dem Gleichungssystem von  $n$  Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i' y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n C_i' y_i' = 0, \dots, \\ \sum_{i=1}^n C_i' y_i^{(n-2)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n C_i' y_i^{(n-1)} = -q(x). \end{aligned} \quad (1.10.15)$$

### Konstruktion der Green-Funktion (Grundlösung)

Auch diese Methode dient der Auffindung einer Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1.10.10), und zwar in Form der quellenmäßigen Integraldarstellung mittels der Green-Funktion  $G(x, \xi)$ :

$$Q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi) q(\xi) d\xi. \quad (1.10.16)$$

Geht man damit in (1.10.10) ein, so erkennt man, daß  $Q(x)$  tatsächlich Lösung ist, wenn die Green-Funktion die inhomogene Differentialgleichung

$$L[G(x, \xi)] = -\delta(x - \xi) \quad (1.10.17)$$

mit der Deltafunktion als Inhomogenität befriedigt.  $G(x, \xi)$  muß also, außer in  $x = \xi$ , die homogene Differentialgleichung überall erfüllen. Sie wird deshalb aus zwei in  $x = \xi$  zusammentreffenden Lösungen der homogenen Differentialgleichung konstruiert, wobei  $G$  und seine Ableitungen überall stetig sein müssen, mit Ausnahme der  $(n - 1)$ -ten Ableitung  $\frac{\partial^{(n-1)} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}$ , die den Sprung

$$\frac{\partial^{(n-1)} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{(n-1)} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=\xi-0} = -1 \quad (1.10.18)$$

aufweisen muß, damit die aus (1.10.17) resultierende Gleichung

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} L[G(x, \xi)] dx = -1 \quad (1.10.19)$$

gilt.

Die Erfüllung der Anfangs- und Randbedingungen erfolgt, soweit diese nicht direkt erfüllt werden, durch Addition einer geeigneten Lösung der homogenen Differentialgleichung.

### Homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Diese lautet:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1.10.20)$$

Es gibt dafür etliche Lösungsverfahren. Wir erwähnen die Lösung mittels Exponentialansatz

$$y = e^{\lambda x}, \quad (1.10.21)$$

der von (1.10.20) zu der charakteristischen algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades führt:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0. \end{aligned} \quad (1.10.22)$$

Sind alle Nullstellen  $\lambda_i$  voneinander verschieden, so resultiert das Fundamentalsystem

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, \quad y_n = e^{\lambda_n x}. \quad (1.10.23)$$

Liegen mehrfache Nullstellen vor, und zwar die Nullstelle  $\lambda_k$  mit der Vielfachheit  $\mu_k$ , so daß statt (1.10.22)

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \dots = 0 \quad (1.10.24)$$

zu stehen kommt, so lautet das Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= e^{\lambda_1 x}, & y_1^{(2)} &= x e^{\lambda_1 x}, \\ y_1^{(3)} &= x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, & y_1^{(\mu_1)} &= x^{\mu_1-1} e^{\lambda_1 x}; \\ y_2^{(1)} &= e^{\lambda_2 x}, & y_2^{(2)} &= x e^{\lambda_2 x}, \dots; \text{ usw.} \end{aligned} \quad (1.10.25)$$

Eine in der Physik ganz besonders häufig auftretende Differentialgleichung dieser Art ist die Schwingungsgleichung

$$y'' + a^2 y = 0 \quad (a \text{ Konstante}) \quad (1.10.26)$$

mit ihren Lösungen

$$\begin{aligned} \text{a) } y_1 &= \cos(ax), \quad y_2 = \sin(ax) && \text{(reelle Fassung),} \\ \text{b) } y_1 &= e^{i ax}, \quad y_2 = e^{-i ax} && \text{(komplexe Fassung).} \end{aligned} \quad (1.10.27)$$

## 1.10.2 Fuchssche Klasse der homogenen linearen Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten

### *Schwach-singuläre Stelle*

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = 0. \quad (1.10.28)$$

Diese Differentialgleichung heißt in  $x = a$  regulär bzw. singulär, wenn die Koeffizienten  $P_\mu(x)$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ ) in  $x = a$  regulär bzw. singulär sind. Besitzt  $P_\mu(x)$  in  $x = a$  einen Pol höchstens  $\mu$ -ter Ordnung, so heißt  $x = a$  eine schwach-singuläre Stelle (Stelle der Bestimmtheit).

Eine Differentialgleichung gehört der Fuchsschen Klasse an, wenn alle Singularitäten, auch in  $x = \infty$ , schwach-singuläre Stellen sind. Die Lösung besitzt in diesem Fall höchstens außerwesentliche Singularitäten (Pole), d. h., der Hauptteil der Laurent-Entwicklung um eine schwach-singuläre Stelle weist nur endlich viele Glieder auf.

**Reihenentwicklung um eine schwach-singuläre Stelle**

Zur Vereinfachung der Situation transformiert man die zu betrachtende schwach-singuläre Stelle in den Ursprung und gibt der Differentialgleichung dann die Form

$$D[y] = x^n y^{(n)} + x^n P_1(x) y^{(n-1)} + \dots + x^n P_n(x) y = 0. \quad (1.10.29)$$

Nun macht man den Reihenansatz

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu} x^{\lambda+\nu} = g(x, \lambda) \quad (1.10.30)$$

( $g_{\nu}$  konstante Koeffizienten mit  $g_{-1} = g_{-2} = \dots = 0$ ,  $\lambda$  freier Parameter) und erhält

$$D[y] = D[g(x, \lambda)] = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu} D[x^{\nu+\lambda}]. \quad (1.10.31)$$

Als nächstes rechnet man mittels (1.10.29)  $D[x^s]$  aus, wobei man auf eine Funktion  $f(x, s)$  stößt:

$$D[x^s] = x^s f(x, s). \quad (1.10.32)$$

Die Differentialgleichung (1.10.29) nimmt dann die Gestalt

$$D[y] = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu} x^{\nu+\lambda} f(x, \nu + \lambda) = 0 \quad (1.10.33)$$

an. Nun entwickelt man  $f(x, \nu + \lambda)$  nach Potenzen von  $x$ :

$$f(x, \nu + \lambda) = f(\nu + \lambda) + x f_1(\nu + \lambda) + x^2 f_2(\nu + \lambda) + \dots, \quad (1.10.34)$$

und erhält aus (1.10.33) bei geeigneter Indexverschiebung

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+\lambda} [f(\nu + \lambda) g_{\nu} + f_1(\nu + \lambda - 1) g_{\nu-1} \\ + f_2(\nu + \lambda - 2) g_{\nu-2} + \dots + f_{\nu}(\lambda) g_0] = 0, \end{aligned} \quad (1.10.35)$$

woraus durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{a) } f(\lambda) g_0 &= 0, \\ \text{b) } f(\lambda + 1) g_1 + f_1(\lambda) g_0 &= 0, \\ \text{c) } f(\lambda + 2) g_2 + f_1(\lambda + 1) g_1 + f_2(\lambda) g_0 &= 0, \\ \text{d) } f(\lambda + 3) g_3 + f_1(\lambda + 2) g_2 + f_2(\lambda + 1) g_1 + f_3(\lambda) g_0 &= 0 \\ \text{usw.} \end{aligned} \quad (1.10.36)$$

entsteht. Nach Voraussetzung ist  $g_0 \neq 0$ , so daß aus der ersten Gleichung die charakteristische Gleichung  $n$ -ten Grades für den charakteristischen Exponenten, nämlich

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0, \quad (1.10.37)$$

hervorgeht.

Sind alle Nullstellen  $\lambda_i$  voneinander verschieden und ist die Differenz zweier Nullstellen keine ganze Zahl  $\varkappa$  ( $f(\lambda_i + \varkappa) \neq 0$ ), so daß sich aus (1.10.36b), (1.10.36c) usw. die Koeffizienten  $g_\nu$  sukzessive errechnen und durch  $g_0$  ausdrücken lassen  $\left( g_\nu = \frac{Z}{N} g_0, Z \text{ entstehender Zähler, } N \text{ entstehender Nenner} \right)$ , so bilden die Lösungen

$$y_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\lambda_i) x^{\lambda_i + \nu} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.10.38)$$

ein Fundamentalsystem.

Differieren die voneinander verschiedenen Nullstellen um eine ganze Zahl, so wird  $g_0$  so gewählt, daß der im Nenner  $N$  auftretende Faktor mit der Nullstelle herausfällt.

Tritt eine Nullstelle  $\lambda_1$  mit der Vielfachheit  $\mu_1$  auf:

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} (\lambda - \lambda_2) \dots = 0, \quad (1.10.39)$$

so ist wegen

$$f'(\lambda_1) = 0, \quad f''(\lambda_1) = 0, \dots, \quad f^{(\mu_1-1)}(\lambda_1) = 0 \quad (1.10.40)$$

das Fundamentalsystem durch

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= g(x, \lambda_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\lambda_1) x^{\lambda_1 + \nu}, \\ y_1^{(2)} &= \left( \frac{\partial g(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} g'_\nu(\lambda_1) x^{\lambda_1 + \nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\lambda_1) x^{\lambda_1 + \nu} \ln x, \\ &\text{usw.;} \end{aligned} \quad (1.10.41)$$

$$y_2 = g(x, \lambda_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\lambda_2) x^{\lambda_2 + \nu}; \dots$$

gegeben.

Die zuletzt dargestellte Methode verdankt man G. FROBENIUS (Frobenius-Verfahren).

Wir haben uns mit der Fuchsschen Klasse näher befaßt, weil sie bei den Eigenwertproblemen der Physik, insbesondere der Quantenmechanik, für die Ordnung  $n = 2$  eine große Rolle spielt.

### 1.10.3 Eigenwertproblem bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und Sturm-Liouville-Theorie

#### *Definition des Eigenwertproblems*

Das Eigenwertproblem wird hier durch die Vorgabe einer homogenen linearen Differentialgleichung für eine Funktion  $y(x)$  definiert, wobei in den Koeffizienten der Differentialgleichung

chung ein Parameter  $\lambda$  auftritt, der bei homogenen Randbedingungen nur für bestimmte Werte  $\lambda_k$  (Eigenwerte) zu nichttrivialen Lösungen  $y_k(x)$  (Eigenfunktionen) führt.

Die zu untersuchende Differentialgleichung (Eigenwertgleichung) sei

$$M[y] = \lambda N[y], \quad (1.10.42)$$

wobei ( $n > p$ )

$$\begin{aligned} \text{a) } M[y] &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[ f_k(x) y^{(k)}(x) \right]^{(k)}, \\ \text{b) } N[y] &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \left[ g_k(x) y^{(k)}(x) \right]^{(k)} \end{aligned} \quad (1.10.43)$$

homogene lineare Differentialausdrücke mit reellen Koeffizienten in selbstadjungierter Form sind. Offensichtlich ist die Ordnung der Differentialgleichung (1.10.42) gerade ( $2n$ ), so daß die allgemeine Lösung ( $2n$ ) Integrationskonstanten aufweist, die durch die ( $2n$ ) homogenen linearen Randbedingungen  $R_s[y] = 0$  ( $s = 1, 2, \dots, 2n$ ) der Gestalt ( $A_k, B_k, a, b$  vorgegebene reelle Konstanten)

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \left[ A_k y^{(k)}(a) + B_k y^{(k)}(b) \right] = 0 \quad (1.10.44)$$

festgelegt werden. In diesen Randbedingungen ist ( $2n - 1$ ) die höchste Ordnung der vorkommenden Ableitungen. Das Intervall  $a \leq x \leq b$ , auf dessen Grenzen sich die Randbedingungen beziehen, heißt Grundintervall.

Randbedingungen der Art (1.10.44), aber mit Konstanten auf der rechten Seite der Gleichung, heißen inhomogene lineare Randbedingungen.

Die selbstadjungierte Form der Differentialausdrücke in (1.10.42) definiert noch nicht die Selbstadjungiertheit eines Eigenwertproblems, da darüberhinaus noch die Randbedingungen berücksichtigt werden müssen.

Ein Eigenwertproblem heißt selbstadjungiert, wenn für zwei beliebige Vergleichsfunktionen  $u$  und  $v$ , die alle Randbedingungen erfüllen, die Relationen (Stern  $*$  bedeutet komplexe Konjugation)

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_a^b (u^* M[v] - v M[u^*]) dx &= 0 \quad \text{und} \\ \text{b) } \int_a^b (u^* N[v] - v N[u^*]) dx &= 0 \end{aligned} \quad (1.10.45)$$

gelten (Definition der Selbstadjungiertheit). In der Regel überprüft man durch partielle Integration die Erfüllung dieser Bedingungen.

**Reellität der Eigenwerte und Orthogonalität der Eigenfunktionen**

Die Eigenwerte eines selbstadjungierten Eigenwertproblems sind reell, wenn

$$\int_a^b y_i^*(x)N[y_i(x)] dx \neq 0 \quad (1.10.46)$$

gilt.

Man beweist diese Aussage, indem man (1.10.42) auf die Eigenfunktionen  $y_i(x)$  und  $y_i^*(x)$  anwendet, die Gleichung

$$y_i^*M[y_i] - y_iM[y_i^*] = \lambda_i y_i^*N[y_i] - \lambda_i^* y_i N[y_i^*] \quad (1.10.47)$$

bildet, darüber integriert und die Selbstadjungiertheit (1.10.45) benutzt. Es folgt dann

$$(\lambda_i - \lambda_i^*) \int_a^b y_i^*(x)N[y_i(x)] dx = 0, \quad (1.10.48)$$

woraus wegen (1.10.46) auf  $\lambda_i = \lambda_i^*$  geschlossen werden kann.

Des weiteren sind die zu verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_i$  und  $\lambda_k$  eines selbstadjungierten Eigenwertproblems gehörenden Eigenfunktionen  $y_i(x)$  und  $y_k(x)$  zueinander orthogonal:

$$\int_a^b y_i^*(x)N[y_k(x)] dx = 0. \quad (1.10.49)$$

Zum Beweis dieser Behauptung bildet man analog zu (1.10.47) die Gleichung

$$y_i^*M[y_k] - y_kM[y_i^*] = \lambda_k y_i^*N[y_k] - \lambda_i y_k N[y_i^*], \quad (1.10.50)$$

integriert darüber und nutzt die Selbstadjungiertheit aus. Dann folgt

$$(\lambda_k - \lambda_i) \int_a^b y_i^*N[y_k] dx = 0 \quad (1.10.51)$$

und weiter wegen  $\lambda_k \neq \lambda_i$  die Orthogonalität (1.10.49).

Diese Feststellungen erinnern uns einerseits an die im Abschnitt 1.7.10 gemachten Aussagen über orthogonale Funktionssysteme und andererseits an die im Abschnitt 1.4.4 festgehaltenen Erkenntnisse über die Orthogonalität der Eigenvektoren und die Reellität der Eigenwerte hermitescher Matrizen. Tatsächlich ist der strukturelle Hintergrund für diese auch bei Integralgleichungen auftretenden Gegebenheiten von gleichem Ursprung, wie im abstrakten Operatoren-Formalismus generell gezeigt werden kann, in dem diese Aussagen aus der Theorie der Matrizen, Differentialgleichungen und Integralgleichungen nur als spezielle Darstellungen allgemein-gültiger Zusammenhänge erscheinen. Deshalb werden die Begriffe der Selbstadjungiertheit und Hermitezität oft synonym gebraucht.

Da wir uns in der Theorie der Matrizen ausführlich mit dem Problem der Entartung befaßt haben, soll diese Thematik hier übergangen werden.

**Eigenwertproblem für eine Differentialgleichung 2. Ordnung**

Die allgemeinen Aussagen dieses Abschnitts sollen im folgenden auf die Eigenwertgleichung 2. Ordnung ( $p, q, r, s$  reell)

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = \lambda s(x)y \quad (1.10.52)$$

angewendet werden. Multipliziert man diese Gleichung mit einer freien Funktion durch, so kann diese so bestimmt werden, daß sich die selbstadjungierte Form

$$P(x)y'' + P'(x)y' + R(x)y = \lambda S(x)y \quad (1.10.53)$$

ergibt, aus der wir

$$\begin{aligned} \text{a) } M[y] &= Py'' + P'y' + Ry, \\ \text{b) } N[y] &= Sy \end{aligned} \quad (1.10.54)$$

ablesen. Durch partielle Integration resultiert einerseits

$$\int_a^b (uM[v] - vM[u]) \, dx = [P(v'u - u'v)]_a^b, \quad (1.10.55)$$

während andererseits von selbst

$$\int_a^b (uN[v] - vN[u]) \, dx = 0 \quad (1.10.56)$$

gilt.

Falls durch die Randbedingungen, eventuell auch durch eine geschickte Wahl des Grundintervalls, die rechte Seite von (1.10.55) zum Verschwinden gebracht werden kann, hat man ein orthogonales Funktionensystem mit reellen Eigenwerten gefunden, denn für verschiedene Eigenfunktionen folgt gemäß (1.10.49)

$$\int_a^b S(x)y_i^*(x)y_k(x) \, dx = 0. \quad (1.10.57)$$

$S(x)$  heißt Belegungsfunktion oder Gewichtsfunktion. Durch den Übergang

$$\varphi_i(x) = \sqrt{S(x)}y_i(x) \quad (1.10.58)$$

erhält man die Orthogonalitätsrelation in der üblichen Gestalt:

$$\int_a^b \varphi_i^*(x)\varphi_k(x) \, dx = 0. \quad (1.10.59)$$

Wegen der Linearität der Differentialgleichung (1.10.52) ist die Lösung nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, den man so festlegen kann, daß

$$\int_a^b \varphi_i^*(x) \varphi_i(x) dx = 1 \quad (1.10.60)$$

gilt. Die beiden letzten Gleichungen kann man dann bei Benutzung der Symbolik (1.7.187) in der Orthonormalitätsrelation

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_i^*(x) \varphi_k(x) dx = \delta_{ik} \quad (1.10.61)$$

zusammenfassen.

### **Hinweis auf die Sturm-Liouville-Theorie**

Die in diesem Abschnitt aufgelisteten Erkenntnisse zum Eigenwertproblem linearer Differentialgleichungen ordnen sich in die umfassend ausgearbeitete Sturm-Liouville-Theorie ein, bei der insbesondere lineare homogene Randbedingungen benutzt werden. Auf dieser Basis lassen sich dann eine Reihe von Theoremen folgern, auf die wir hier nur stichwortartig hinweisen können: Orthogonalität und Vollständigkeit der Eigenfunktionen, Reellität und unendliche Anzahl der Eigenwerte, Aussagen über die Anzahl der Knoten im Grundintervall usw.

## **1.10.4 Einige spezielle homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung**

### **a) Ein spezieller Differentialgleichungstyp**

Die Differentialgleichung

$$Q_2(x)y'' + \frac{1}{x}Q_1(x)y' + \frac{1}{x^2}Q_0(x)y = 0 \quad (1.10.62)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= A_0 + B_0x^\sigma, \\ Q_1(x) &= A_1 + B_1x^\sigma, \\ Q_2(x) &= A_2 + B_2x^\sigma \end{aligned} \quad (1.10.63)$$

( $A_i, B_i$  Konstanten,  $\sigma$  natürliche Zahl) tritt in der Physik häufig auf. Wir wollen sie deshalb eingehender untersuchen, da etliche spätere Anwendungen als Spezialfall darin enthalten sind.

Wir gehen mit dem Lösungsansatz (1.10.30)

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^{\nu+\lambda} \quad (1.10.64)$$



in sie ein und finden bei entsprechender Indexverschiebung die folgende Rekursionsformel für die Koeffizienten:

$$g_{\nu+\sigma} = -g_{\nu} \frac{B_0 + B_1(\nu + \lambda) + B_2(\nu + \lambda)(\nu + \lambda - 1)}{A_0 + A_1(\nu + \lambda + \sigma) + A_2(\nu + \lambda + \sigma)(\nu + \lambda + \sigma - 1)}. \quad (1.10.65)$$

Für  $\nu = -\sigma$  resultiert wegen  $g_{-\sigma} = 0$ ,  $g_0 \neq 0$  die charakteristische Gleichung

$$A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda(\lambda - 1) = 0 \quad (1.10.66)$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{A_2} - 1 \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2 - \frac{4A_0}{A_2}}. \quad (1.10.67)$$

Soll die Reihe abbrechen, wobei das Glied mit dem Koeffizienten  $g_{\bar{\nu}}$  das letzte stehenbleibende Glied sei ( $g_{\bar{\nu}+\sigma} = 0$  usw.), so entsteht aus (1.10.65) die Abbruchbedingung

$$B_0 + B_1(\bar{\nu} + \lambda) + B_2(\bar{\nu} + \lambda)(\bar{\nu} + \lambda - 1) = 0. \quad (1.10.68)$$

Bei den physikalischen Eigenwertproblemen, insbesondere in der Quantenmechanik, resultieren daraus die diskreten Eigenwerte physikalischer Systeme. A. SOMMERFELD hat diese Methode ausgearbeitet. Sie wird deshalb Sommerfeldsche Polynommethode genannt.

### b) Gaußsche Differentialgleichung

Diese Differentialgleichung lautet:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0. \quad (1.10.69)$$

Ihre Lösungen heißen hypergeometrische Funktionen. Durch die drei freien Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  überdecken diese eine große Lösungsklasse und enthalten deshalb viele Spezialfälle. Der Reihenansatz (1.10.30) mit dem Entwicklungszentrum  $x = 0$  liefert die um 1 springende Rekursionsformel

$$g_{\nu+1} = g_{\nu} \frac{(\alpha + \lambda + \nu)(\beta + \lambda + \nu)}{(\gamma + \lambda + \nu)(1 + \lambda + \nu)} \quad (1.10.70)$$

für die Koeffizienten und daraus für  $\nu = -1$  die charakteristische Gleichung

$$\lambda(\lambda + \gamma - 1) = 0. \quad (1.10.71)$$

Falls  $\gamma$  keine ganze Zahl ist (ansonsten Anwendung des in Abschnitt 1.10.2 erwähnten Frobenius-Verfahrens), liegen die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned} \text{a) } y_1 &= F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots, \\ \text{b) } y_2 &= x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x) \end{aligned} \quad (1.10.72)$$

vor. Der Grenzübergang  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0$  mit endlich bleibendem  $\beta x = \xi$  läßt aus (1.10.62) die Differentialgleichung

$$\xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} + (\gamma - \xi) \frac{dy}{d\xi} - \alpha y = 0 \quad (1.10.73)$$

entstehen, deren Lösungen man als konfluente hypergeometrische Funktionen bezeichnet.

### c) Zugeordnete Legendresche Differentialgleichung

So nennt man die Differentialgleichung ( $\beta, \mu$  reelle Parameter)

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{1}{1-x^2} \left( \beta - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right) y = 0, \quad (1.10.74)$$

die nach der Substitution  $x = \cos \vartheta$  ( $\vartheta$  Polwinkel) in

$$\frac{d^2 y}{d\vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{dy}{d\vartheta} + \left( \beta - \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} \right) y = 0 \quad (1.10.75)$$

übergeht. Bei  $x = \pm 1$  liegen schwach-singuläre Stellen. Die linear unabhängigen Lösungen heißen zugeordnete Legendresche Funktionen (zugeordnete Kugelfunktionen) 1. Art und 2. Art.

Entwickelt man im Sinne von (1.10.30) die Lösung von (1.10.74) um den Punkt  $x = \cos \vartheta = 1$ , d. h.  $\vartheta = 0$  (Nordpol):

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu} (x-1)^{\lambda+\nu}, \quad (1.10.76)$$

so ergibt sich die um 1 springende Rekursionsformel

$$g_{\nu+1} = g_{\nu} \frac{\frac{\beta}{2}}{(\lambda + \nu + 1)^2 - \frac{\mu^2}{4}}, \quad (1.10.77)$$

aus der für  $\nu = -1$  die charakteristische Gleichung

$$\text{a) } \lambda^2 - \frac{\mu^2}{4} = 0, \quad \text{d. h. } \text{b) } \lambda_1 = \frac{\mu}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\mu}{2}, \quad (1.10.78)$$

hervorgeht.

Die Forderung der Regularität von  $y(x)$  bedeutet, daß  $\lambda$  nicht negativ sein darf, denn sonst würde  $y(x)$  bei  $\vartheta = 0$  singular werden. Wir haben in diesem Fall  $\lambda = \frac{|\mu|}{2}$  zu wählen und erhalten damit statt (1.10.76)

$$y(x) = (x-1)^{\frac{|\mu|}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu}^{(1)} (x-1)^{\nu}. \quad (1.10.79)$$

Analog resultiert bei einer Entwicklung um  $x = \cos \vartheta = -1$ , d. h.  $\vartheta = \pi$  (Südpol),

$$y(x) = (x+1)^{\frac{|\mu|}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu}^{(-1)} (x+1)^{\nu}. \quad (1.10.80)$$

Der Ansatz

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{|\mu|}{2}} V(x) = (x^2 - 1)^{\frac{|\mu|}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{g}_{\nu} x^{\lambda + \nu} \quad (1.10.81)$$

trägt wegen  $(x^2 - 1)^{\frac{|\mu|}{2}} = (x-1)^{\frac{|\mu|}{2}} (x+1)^{\frac{|\mu|}{2}}$  beiden Singularitäten Rechnung. Ihn wollen wir als Ausgangspunkt zur Auffindung der Lösungen von (1.10.74) machen.

Gehen wir mit (1.10.81) in (1.10.74) ein, so folgt für  $V$  die Differentialgleichung

$$(1 - x^2)V'' - 2x(1 + |\mu|)V' + [\beta - |\mu|(1 + |\mu|)]V = 0. \quad (1.10.82)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (1.10.62), so lesen wir für die Konstanten ab (Entwicklung um  $x = \cos \vartheta = 0$ , also um den Äquator  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ):

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, & A_1 &= 0, & A_2 &= 1, \\ B_0 &= \beta - |\mu|(1 + |\mu|), & B_1 &= -2(1 + |\mu|), & B_2 &= -1, \\ \sigma &= 2, \end{aligned} \quad (1.10.83)$$

während sich aus (1.10.66) die charakteristische Gleichung

$$\text{a) } \lambda(\lambda - 1) = 0 \quad \text{mit} \quad \text{b) } \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 \quad (1.10.84)$$

ergibt. Die Rekursionsformel (1.10.65) springt wegen  $\sigma = 2$  jeweils um 2. Im Falle  $\lambda = \lambda_1 = 0$  fängt die Reihe für  $V$  mit dem Glied  $\bar{g}_0$  an und weist nur gerade Potenzen auf, im Falle  $\lambda = \lambda_2 = 1$  beginnt die Entwicklung mit  $\bar{g}_0 x$  und besitzt nur ungerade Potenzen.

Schließlich bekommen wir, falls wir die Möglichkeit des Abbruchs der Reihe fordern, also Polynomlösungen für  $V$  suchen, aus (1.10.68)

$$\beta = (|\mu| + \bar{\nu} + \lambda)(|\mu| + \bar{\nu} + \lambda + 1). \quad (1.10.85)$$

Im folgenden setzen wir nun voraus, daß  $\mu = m$  eine ganze Zahl sei ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $|m| = 0, 1, 2, \dots$ ). Dann resultiert wegen (1.10.84) und wegen  $\bar{\nu} = 0, 1, 2, \dots$  (Grad des Polynoms) bei Einführung der Abkürzung

$$\text{a) } l = |m| + n_{\vartheta} \quad \text{mit} \quad \text{b) } n_{\vartheta} = \bar{\nu} + \lambda, \quad (1.10.86)$$

wobei

$$\begin{aligned} \text{a) } l &= 0, 1, 2, \dots, & \text{b) } |m| &\leq l \quad \text{bzw.} \\ \text{c) } -l &\leq m \leq l \end{aligned} \quad (1.10.87)$$

gilt, statt (1.10.85)

$$\beta = l(l+1). \quad (1.10.88)$$

Die Laufzahlen  $l$ ,  $m$  und  $n_\vartheta$  besitzen in der Quantenmechanik eine große Bedeutung. Sie heißen: Nebenquantenzahl oder Bahndrehimpulsquantenzahl ( $l$ ), magnetische Quantenzahl ( $m$ ), Polwinkelquantenzahl ( $n_\vartheta$ ).

In dieser Spezialisierung der Parameter in der Differentialgleichung (1.10.74) bezeichnet man die oben erwähnten, das Fundamentalsystem bildenden zugeordneten Legendreschen Funktionen 1. Art mit  $P_l^{|m|}(x)$  und diejenigen 2. Art mit  $Q_l^{|m|}(x)$ .

Insbesondere kommen wir mittels der eben durchgeführten Reihenentwicklung, die beiden Fälle  $\lambda = 0, 1$  zusammenfassend, zu der folgenden konkreten Gestalt der zugeordneten Legendreschen Funktionen 1. Art (im folgenden kurz als zugeordnete Kugelfunktionen bezeichnet):

$$y(x) = P_l^{|m|}(x) = (x^2 - 1)^{\frac{|m|}{2}} \sum_{\nu=0}^{l-|m|} \bar{g}_\nu x^{\nu+\lambda}. \quad (1.10.89)$$

Man nennt  $l$  den Grad und  $|m|$  die Ordnung der zugeordneten Kugelfunktion.

Die speziellen zugeordneten Kugelfunktionen von der Ordnung null:

$$P_l^0(x) = P_l(x), \quad (1.10.90)$$

heißen Legendresche Polynome (zonale Kugelfunktionen).

Diese sind folgendermaßen durch Differentiation zu gewinnen:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (1.10.91)$$

Die zugeordneten Kugelfunktionen sind durch Differentiation der Legendreschen Polynome zu erhalten:

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \\ &= \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2 - 1)^l \quad (m \geq 0). \end{aligned} \quad (1.10.92)$$

Wegen des Definitionsbereiches der Laufzahl  $m$  ( $-l \leq m \leq l$ ) ist es zweckmäßig, auch zugeordnete Kugelfunktionen negativer Ordnung einzuführen. Man definiert diese durch

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (m \geq 0) \quad (1.10.93)$$

(nicht einheitlich in der Literatur).

Die zugeordneten Kugelfunktionen genügen den Rekursionsformeln

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & (2l+1)xP_l^m(x) = (l-m+1)P_{l+1}^m(x) + (l+m)P_{l-1}^m(x), \\
 \text{b) } & P_{l-1}^m(x) - P_{l+1}^m(x) = (2l+1)\sqrt{1-x^2}P_l^{m-1}(x), \\
 \text{c) } & P_l^{m+2}(x) + 2(m+1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}P_l^{m+1}(x) \\
 & \quad + (l-m)(l+m+1)P_l^m(x) = 0, \\
 \text{d) } & (1-x^2)\frac{dP_l^m(x)}{dx} = (l+1)xP_l^m(x) - (l-m+1)P_{l+1}^m(x).
 \end{aligned} \tag{1.10.94}$$

Weiter gilt für sie die Orthonormierung

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 P_k^m(x)P_l^m(x) dx &= \int_0^\pi P_k^m(\cos\vartheta)P_l^m(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta \\
 &= \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{kl}.
 \end{aligned} \tag{1.10.95}$$

Auch die folgenden Formeln werden gelegentlich gebraucht:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & P_l^m(-x) = (-1)^{l-m}P_l^m(x), \\
 \text{b) } & P_l(-x) = (-1)^lP_l(x), \\
 \text{c) } & \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} [P_l^m(x)]^2 dx = \frac{1}{2m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \quad (0 < m \leq l), \\
 \text{d) } & \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} P_l^m(x)P_l^k(x) dx = 0 \\
 & \quad (0 \leq m \leq l, 0 \leq k \leq l, m \neq k).
 \end{aligned} \tag{1.10.96}$$

Im weiteren listen wir einige Kugelfunktionen und zugeordnete Kugelfunktionen niedrigen Grades und niedriger Ordnung auf:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \tag{1.10.97}$$

$$\begin{aligned}
 P_1^1(x) &= -\sqrt{1-x^2}, \\
 P_2^1(x) &= -3x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^2(x) = 3(1-x^2), \\
 P_3^1(x) &= -\frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2}, \quad P_3^2(x) = 15x(1-x^2), \\
 P_3^3(x) &= -15(1-x^2)\sqrt{1-x^2},
 \end{aligned} \tag{1.10.98}$$

die bei der Substitution  $x = \cos\vartheta$  übergehen in:

$$P_0(\cos\vartheta) = 1, \quad P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta, \quad P_2(\cos\vartheta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1); \tag{1.10.99}$$

$$\begin{aligned}
P_1^1(\cos \vartheta) &= -\sin \vartheta, \\
P_2^1(\cos \vartheta) &= -\frac{3}{2} \sin 2\vartheta, \\
P_2^2(\cos \vartheta) &= \frac{3}{2}(1 - \cos 2\vartheta), \\
P_3^1(\cos \vartheta) &= -\frac{3}{8}(\sin \vartheta + 5 \sin 3\vartheta), \\
P_3^2(\cos \vartheta) &= \frac{15}{4}(\cos \vartheta - \cos 3\vartheta), \\
P_3^3(\cos \vartheta) &= -\frac{15}{4}(3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta).
\end{aligned} \tag{1.10.100}$$

#### d) Legendresche Differentialgleichung

Diese Differentialgleichung ist als Spezialfall für  $\mu = 0$  in (1.10.74) bzw. (1.10.75) enthalten:

$$\begin{aligned}
\text{a) } y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\beta}{1-x^2}y &= 0 \quad \text{bzw.} \\
\text{b) } \frac{d^2y}{d\vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{dy}{d\vartheta} + \beta y &= 0.
\end{aligned} \tag{1.10.101}$$

Die Lösungen heißen Legendresche Funktionen (Kugelfunktionen). Aus (1.10.81) und (1.10.83) geht dann

$$\begin{aligned}
\text{a) } y(x) = V(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{g}_{\nu} x^{\lambda+\nu}, \\
\text{b) } A_0 &= 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \\
B_0 &= \beta, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = -1, \quad \sigma = 2
\end{aligned} \tag{1.10.102}$$

hervor, so daß sich (1.10.65) auf

$$\bar{g}_{\nu+2} = \bar{g}_{\nu} \frac{(\nu + \lambda)(\nu + \lambda + 1) - \beta}{(\nu + \lambda + 1)(\nu + \lambda + 2)} \tag{1.10.103}$$

spezialisiert. Die charakteristische Gleichung (1.10.84) und ihre Lösungen bleiben unverändert:

$$\text{a) } \lambda(\lambda - 1) = 0 \quad \text{mit} \quad \text{b) } \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1. \tag{1.10.104}$$

Im Falle  $\lambda = \lambda_1 = 0$  fängt die Reihenentwicklung mit  $\bar{g}_0$  an. Für  $\lambda = \lambda_2 = 1$  beginnt die Reihenentwicklung mit  $\bar{g}_0 x$ .

Oben fanden wir, daß es bei der Wahl  $\beta = l(l+1)$  (1.10.88) abbrechende Reihenentwicklungen gibt, also Polynome entstehen. Wir wollen diesen Tatbestand genauer verfolgen.

Für  $\lambda = \lambda_1 = 0$  resultiert aus (1.10.103)

$$\bar{g}_{\nu+2} = \bar{g}_{\nu} \frac{\nu(\nu + 1) - l(l + 1)}{(\nu + 1)(\nu + 2)}, \tag{1.10.105}$$

während für  $\lambda = \lambda_2 = 1$  diese Formel mit einem um 1 verschobenen Index übernommen werden kann. Auf diese Weise erhalten wir die beiden, das Fundamentalsystem bildenden Lösungen

$$\begin{aligned} \text{a) } y_1(x) &= 1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!}x^4 - \dots, \\ \text{b) } y_2(x) &= x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3 \\ &\quad + \frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!}x^5 - \dots \end{aligned} \quad (1.10.106)$$

Ist  $l$  gerade, so bricht die erste Reihe ab. Ist  $l$  ungerade, so bricht die zweite Reihe ab. Die abbrechenden Funktionen sind die bereits in (1.10.90) aufgetretenen Legendreschen Polynome (spezielle Legendresche Funktionen 1. Art). Die nicht abbrechenden Funktionen bezeichnet man mit  $Q_l(x)$  (Legendresche Funktionen 2. Art).

Es läßt sich folgender Zusammenhang beweisen ( $l \geq 1$ ):

$$Q_l(x) = P_l(x) \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \text{Polynom } (l-1)\text{-ten Grades.} \quad (1.10.107)$$

Die Legendresche Differentialgleichung (1.10.101) zeigt gegenüber der Substitution  $l \rightarrow -(l+1)$  Invarianz. Deshalb ist  $P_{-(l+1)}(x)$  neben  $P_l(x)$  eine zweite unabhängige Lösung. Es gilt die Relation

$$P_{-(l+1)}(x) = Q_l(x), \quad (1.10.108)$$

so daß man also auch  $P_l(x)$  und  $P_{-(l+1)}(x)$  als Fundamentalsystem ansehen kann.

Für die Legendreschen Polynome  $P_l(x)$  gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \text{a) } P_{l+1}(x) &= \frac{2l+1}{l+1}xP_l(x) - \frac{l}{l+1}P_{l-1}(x) \quad (l \geq 0), \\ \text{b) } \frac{dP_l(x)}{dx} &= \frac{l}{x^2-1}(xP_l(x) - P_{l-1}(x)) \\ &= \frac{1}{x} \left( lP_l(x) + \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} \right) \quad (l \geq 1), \\ \text{c) } \frac{dP_{l+1}(x)}{dx} &= \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} + (2l+1)P_l(x) \quad (l \geq 1). \end{aligned} \quad (1.10.109)$$

Die Legendreschen Polynome treten als Koeffizienten der Reihenentwicklung der Erzeugenden auf:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \quad (|t| \leq 1). \quad (1.10.110)$$

Für sie gilt die Orthonormierung

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_l(x) dx = \int_0^\pi P_k(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (1.10.111)$$

$$= \frac{2}{2l+1} \delta_{lk}$$

und die auch für die Physik wichtige Beziehung

$$\int_{-1}^1 x^n P_{n-2\alpha}(x) dx = \begin{cases} \frac{2n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - \alpha + 1)} \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2\alpha} \\ (\text{außer } \alpha \text{ negativ oder halbzahlig}), \\ 0 \\ (\alpha \text{ negativ oder halbzahlig}). \end{cases} \quad (1.10.112)$$

Bei Verwendung der kartesischen Koordinate  $z = r \cos \vartheta$  kann man der Relation (1.10.91) die Form

$$P_l(\cos \vartheta) = \frac{(-1)^l}{l!} r^{l+1} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (1.10.113)$$

$$\left( r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

geben.

Einige Kugelfunktionen niedrigen Grades wollen wir auflisten:

$$\begin{aligned} \text{a) } P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); \\ \text{b) } Q_0(x) &= \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \operatorname{artanh} x, \\ Q_1(x) &= x \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 = x \operatorname{artanh} x - 1. \end{aligned} \quad (1.10.114)$$

Mittels des Polwinkels erhalten diese Formeln die Gestalt

$$\begin{aligned} \text{a) } P_0(\cos \vartheta) &= 1, \quad P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta, \\ P_2(\cos \vartheta) &= \frac{1}{4}(3 \cos 2\vartheta + 1), \\ P_3(\cos \vartheta) &= \frac{1}{8}(5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta), \\ \text{b) } Q_0(\cos \vartheta) &= -\ln \tan \frac{\vartheta}{2}, \\ Q_1(\cos \vartheta) &= -1 - \cos \vartheta \ln \tan \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned} \quad (1.10.115)$$



**e) Besselsche Differentialgleichung**

Diese Differentialgleichung lautet:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right)y = 0. \quad (1.10.116)$$

Der Parameter  $\mu$  bestimmt die Ordnung der Besselschen Differentialgleichung, deren Lösungen man Zylinderfunktionen  $Z_\mu(x)$  nennt. Die Stelle  $x = 0$  ist eine Stelle der Bestimmtheit, während das für  $x = \infty$  nicht zutrifft. Der Vergleich von (1.10.116) mit dem allgemeinen Typ (1.10.62) führt auf die Parameter:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\mu^2, & A_1 &= 1, & A_2 &= 1, \\ B_0 &= 1, & B_1 &= 0, & B_2 &= 0, & \sigma &= 2. \end{aligned} \quad (1.10.117)$$

Damit erhalten wir im Sinne der Reihenentwicklung (1.10.30)

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^{\nu+\lambda} \quad (1.10.118)$$

und für die Koeffizienten gemäß (1.10.65) die Rekursionsformel

$$g_{\nu+2} = -g_\nu \frac{1}{(\nu + \lambda + 2)^2 - \mu^2}. \quad (1.10.119)$$

Weiter folgt aus (1.10.66) die charakteristische Gleichung

$$\text{a) } \lambda^2 = \mu^2, \quad \text{d. h. } \text{b) } \lambda_1 = \mu, \quad \lambda_2 = -\mu, \quad (1.10.120)$$

so daß (1.10.119) die Form

$$g_{\nu+2} = -g_\nu \frac{1}{(\nu + 2 \pm \mu)^2 - \mu^2} \quad (1.10.121)$$

annimmt. Die Abbruchbedingung (1.10.68) ist nicht erfüllbar.

Die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung (1.10.116) erhält demnach bei Verwendung von (1.10.121) die Gestalt ( $\mu$  nicht ganzzahlig)

$$\begin{aligned} y(x) &= g_0 x^\mu \left( 1 - \frac{x^2}{2(2\mu+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2\mu+2)(2\mu+4)} - \dots \right) \\ &+ \bar{g}_0 x^{-\mu} \left( 1 + \frac{x^2}{2(2\mu-2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2\mu-2)(2\mu-4)} + \dots \right), \end{aligned} \quad (1.10.122)$$

wobei  $g_0$  und  $\bar{g}_0$  als die beiden Integrationskonstanten anzusehen sind. Mit einer etwas anderen Normierung kann man die beiden in Klammern stehenden Ausdrücke folgendermaßen zusammenfassend schreiben, wobei der Index  $\mu$  positiv oder negativ sein kann:

$$I_\mu(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2\nu}}{\nu! \Gamma(\mu + \nu + 1)}. \quad (1.10.123)$$

Man nennt diese das Fundamentalsystem bildenden Funktionen Bessel-Funktionen mit positivem bzw. negativem Index  $\mu$ . Statt (1.10.122) kann man dann

$$Z_\mu(x) = A_1 I_\mu(x) + A_2 I_{-\mu}(x) \quad (A_1, A_2 \text{ Konstanten}) \quad (1.10.124)$$

schreiben.

Für die Zylinderfunktionen gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \text{a) } Z_{\mu-1}(x) + Z_{\mu+1}(x) &= \frac{2\mu}{x} Z_\mu(x), \\ \text{b) } 2 \frac{dZ_\mu(x)}{dx} &= Z_{\mu-1}(x) - Z_{\mu+1}(x). \end{aligned} \quad (1.10.125)$$

Die Bessel-Funktionen genügen der Orthonormalitätsrelation

$$\int_0^1 I_\mu(\alpha_k x) I_\mu(\alpha_l x) x \, dx = \frac{1}{2} [I_{\mu+1}(\alpha_k)]^2 \delta_{kl} \quad (\mu > -1), \quad (1.10.126)$$

wobei die  $\alpha_k$  die durch

$$I_\mu(\alpha_k) = 0 \quad (1.10.127)$$

definierten Wurzeln sind.

Durch Grenzübergang entsteht

$$\int_0^\infty I_\mu(\alpha x) I_\mu(\beta x) x \, dx = \frac{1}{\alpha} \delta(\alpha - \beta). \quad (1.10.128)$$

Für ganzzahlige Parameter  $\mu = n$  gilt

$$I_{-n}(x) = (-1)^n I_n(x), \quad (1.10.129)$$

so daß  $I_{-n}(x)$  keine zweite unabhängige Lösung ist.

Eine zweite unabhängige Lösung ist die Neumannsche Funktion

$$N_n(x) = \lim_{\mu \rightarrow n} \frac{I_\mu(x) \cos(\pi\mu) - I_{-\mu}(x)}{\sin(\pi\mu)}, \quad (1.10.130)$$

denn der Zähler dieses Ausdrucks ist eine zweite Lösung. Diese Eigenschaft wird durch den Grenzprozeß nicht zerstört.

Für die Wellenausbreitung ist die Benutzung von Kombinationen von Bessel-Funktionen und Neumann-Funktionen in Form der Hankel-Funktionen 1. Art und 2. Art zweckmäßig, die ebenfalls ein Fundamentalsystem bilden:

$$\begin{aligned} \text{a) } H_n^{(1)}(x) &= I_n(x) + i N_n(x), \\ \text{b) } H_n^{(2)}(x) &= I_n(x) - i N_n(x). \end{aligned} \quad (1.10.131)$$

Die Bessel-Funktionen ergeben sich als Koeffizienten der Reihenentwicklung der Erzeugenden

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n. \quad (1.10.132)$$

Für sie existieren etliche Integraldarstellungen, von denen wir nur

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi \quad (1.10.133)$$

angeben wollen.

Im folgenden listen wir einige Strukturen von Zylinderfunktionen niedriger Ordnung auf:

$$\begin{aligned} \text{a) } I_0(x) &= 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} - \dots, \\ \text{b) } I_1(x) &= \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1 \cdot 2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!3!} - \dots \right), \\ \text{c) } N_0(x) &= \frac{2}{\pi} \left[ \left( \ln \frac{x}{2} + C_E \right) I_0(x) + 2I_2(x) - \dots \right] \\ &\quad \left( \begin{array}{l} C_E = 0,577216 \dots \text{Euler-} \\ \text{Mascheroni-Konstante} \end{array} \right), \\ \text{d) } N_1(x) &= \frac{2}{\pi} \left[ \left( \ln \frac{x}{2} + C_E \right) I_1(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} I_1(x) + \dots \right], \\ \text{e) } I_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \\ N_{\frac{1}{2}}(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad N_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \end{aligned} \quad (1.10.134)$$

Für  $x \gg 1$  und  $x \gg n$  liegt das folgende Grenzverhalten vor:

$$\begin{aligned} \text{a) } I_n(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{für gerade } n, \\ \text{b) } I_n(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{für ungerade } n, \\ \text{c) } H_n^{(1)}(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i x - i \pi \frac{2n+1}{4}}, \\ \text{d) } H_n^{(2)}(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i x + i \pi \frac{2n+1}{4}}. \end{aligned} \quad (1.10.135)$$

### f) Hermitesche Differentialgleichung

Nach dem obigen Schema lassen sich auch noch eine Reihe anderer, für die Physik bedeutende Differentialgleichungen behandeln. Im folgenden geben wir die wichtigsten Gesichtspunkte zu einigen weiteren Differentialgleichungen an.

Hermitesche Differentialgleichung ( $\mu$  Parameter):

$$y'' - 2xy' + 2\mu y = 0. \quad (1.10.136)$$

Der Vergleich mit (1.10.62) ergibt

$$\begin{aligned} A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \\ B_0 = 2\mu, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = 0, \quad \sigma = 2. \end{aligned} \quad (1.10.137)$$

Aus (1.10.65) und (1.10.66) resultieren die Rekursionsformel

$$g_{\nu+2} = 2g_{\nu} \frac{\nu + \lambda - \mu}{(\nu + \lambda + 2)(\nu + \lambda + 1)} \quad (1.10.138)$$

und die charakteristische Gleichung

$$\text{a) } \lambda(\lambda - 1) = 0 \quad \text{mit} \quad \text{b) } \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1. \quad (1.10.139)$$

Die Abbruchbedingung (1.10.68) erhält die Form

$$\mu - \bar{\nu} - \lambda = 0. \quad (1.10.140)$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) = g_0 \left[ 1 - \frac{2\mu}{2!} x^2 + \frac{2^2 \mu(\mu - 2)}{4!} x^4 - \dots \right] \\ + g_1 \left[ x - \frac{2(\mu - 1)}{3!} x^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.10.141)$$

( $g_0, g_1$  Integrationskonstanten), die die Hermiteschen Funktionen  $H_{\mu}(x)$  der Ordnung  $\mu$  als Lösungen der Hermiteschen Differentialgleichung enthält.

Es gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \text{a) } H_{\mu+1}(x) &= 2xH_{\mu}(x) - 2\mu H_{\mu-1}(x), \\ \text{b) } \frac{dH_{\mu}(x)}{dx} &= 2\mu H_{\mu-1}(x). \end{aligned} \quad (1.10.142)$$

Die für nichtnegatives ganzzahliges  $\mu = m$  abbrechenden Lösungen sind die Hermiteschen Polynome  $H_m(x)$ , für die die Orthonormalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \quad (1.10.143)$$

besteht. Weiterhin sind sie die Koeffizienten der Reihenentwicklung der Erzeugenden

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x) \frac{t^m}{m!}. \quad (1.10.144)$$

Auch durch Differentiation sind sie zu gewinnen:

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}. \quad (1.10.145)$$

Einige Hermitesche Polynome niedriger Ordnung sind

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x. \end{aligned} \quad (1.10.146)$$

### g) Verallgemeinerte Laguerresche Differentialgleichung

Diese lautet:

$$y'' + (\varkappa + 1 - x) \frac{y'}{x} + \frac{\mu - \varkappa}{x} y = 0. \quad (1.10.147)$$

Ihre Lösungen nennt man verallgemeinerte Laguerresche Funktionen  $L_{\mu}^{\varkappa}(x)$ . Vergleichen wir mit (1.10.62), so finden wir

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, & A_1 &= \varkappa + 1, & A_2 &= 1, \\ B_0 &= \mu - \varkappa, & B_1 &= -1, & B_2 &= 0, & \sigma &= 1, \end{aligned} \quad (1.10.148)$$

so daß aus (1.10.65), (1.10.66) und (1.10.68) die Rekursionsformel

$$g_{\nu+1} = g_{\nu} \frac{\varkappa + \nu + \lambda - \mu}{(\varkappa + \nu + \lambda + 1)(\nu + \lambda + 1)}, \quad (1.10.149)$$

die charakteristische Gleichung

$$\text{a) } \lambda(\lambda + \varkappa) = 0, \quad \text{d. h. } \text{b) } \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\varkappa, \quad (1.10.150)$$

und die Abbruchbedingung

$$\mu - \varkappa - \bar{\nu} - \lambda = 0 \quad (1.10.151)$$

hervorgehen.

Für nichtnegative ganzzahlige  $\mu = m$  und  $\mu - \varkappa = m - k$  kommt es gemäß (1.10.149) zum Abbruch der Reihenentwicklung. Es entstehen aus den verallgemeinerten Laguerreschen

Funktionen die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome  $L_m^k(x)$ , für die die Orthonormalitätsrelationen

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^{\infty} x^k e^{-x} L_m^k(x) L_n^k(x) dx &= \frac{(m!)^3}{(m-k)!} \delta_{mn} \quad (k > -1), \\ \text{b) } \int_0^{\infty} x^{k+1} e^{-\frac{(1+\alpha)x}{2}} L_m^k(x) L_n^k(\alpha x) dx & \\ &= \frac{(m!)^3}{(m-k)!} (2m-k+1) \delta_{mn} \quad \left( \alpha = \frac{2m-k+1}{2n-k+1} \right) \end{aligned} \quad (1.10.152)$$

gelten. In der Reihenentwicklung der Erzeugenden treten sie als Koeffizienten auf:

$$e^{-xt}(1+t)^n = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n-m} L_n^{n-m}(x) t^m. \quad (1.10.153)$$

Weiterhin sind sie durch Differentiation aus den Laguerreschen Polynomen  $L_n(x) = L_n^0(x)$ , die als der Spezialfall  $k = 0$  in den verallgemeinerten Laguerreschen Polynomen enthalten sind, wie folgt zu gewinnen:

$$L_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} L_n(x). \quad (1.10.154)$$

In diesem Sinne ist die Laguerresche Differentialgleichung

$$y'' + (1-x) \frac{y'}{x} + \frac{m}{x} y = 0 \quad (1.10.155)$$

auch der Spezialfall  $k = 0$  von (1.10.147).

Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} \text{a) } L_{n+1}(x) &= (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x), \\ \text{b) } \frac{dL_{n+1}(x)}{dx} &= -n \left[ L_n(x) - \frac{dL_n(x)}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (1.10.156)$$

Gewinnung der Laguerreschen Polynome durch Differentiation:

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \quad (1.10.157)$$

Einige einfache Laguerresche Polynome:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \quad L_1(x) = 1-x, \quad L_2(x) = 2-4x+x^2, \\ L_3(x) &= 6-18x+9x^2-x^3; \\ L_1^1(x) &= -1, \quad L_2^1(x) = -4+2x, \quad L_2^2(x) = 2, \\ L_3^3(x) &= -6. \end{aligned} \quad (1.10.158)$$

### 1.10.5 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

Das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit  $n$  Gleichungen kann man wie folgt schreiben:

$$\frac{dy_\nu(x)}{dx} = \sum_{\mu=1}^n f_{\nu\mu}(x)y_\mu(x) + g_\nu(x) \quad (1.10.159)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Dabei sind die  $f_{\nu\mu}(x)$  bzw.  $g_\nu(x)$  vorgegebene Koeffizienten bzw. Inhomogenitäten. Aus dem Fundamentalsystem des homogenen Systems ( $g_\nu = 0$ ), nämlich aus den Partikulärlösungen

$$\begin{array}{ccccccc} y_{11}(x), & y_{12}(x), & \dots, & y_{1n}(x) & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ y_{n1}(x), & y_{n2}(x), & \dots, & y_{nn}(x) & & & \end{array}, \quad (1.10.160)$$

die Lösungen von

$$\frac{dy_{\nu\kappa}(x)}{dx} = \sum_{\mu=1}^n f_{\nu\mu}(x)y_{\mu\kappa}(x) \quad (1.10.161)$$

sind, baut sich die allgemeine Lösung des homogenen Systems wie folgt auf:

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 = c_1 y_{11} + c_2 y_{12} + \dots + c_n y_{1n}, & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ y_n = c_1 y_{n1} + c_2 y_{n2} + \dots + c_n y_{nn} & & & & (c_i \text{ Konstanten}). & & \end{array} \quad (1.10.162)$$

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Partikulärlösungen (1.10.160) ein Fundamentalsystem bilden, ist das Nichtverschwinden der aus diesen gebildeten Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.10.163)$$

Das inhomogene System kann man mit der Methode der Variation der Konstanten  $c_i$  lösen. Das sieht man dadurch ein, daß man aus dem Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit  $n$  Gleichungen (1.10.159) durch Elimination im Prinzip eine inhomogene Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung gewinnen kann.

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist auch hier durch Addition der allgemeinen Lösung des homogenen Systems und einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems zu erhalten.

Liegen konstante Koeffizienten  $f_{\nu\mu} = a_{\nu\mu}$  vor, so läßt der Exponentialansatz

$$y_\nu(x) = d_\nu e^{\lambda x} \quad (d_\nu, \lambda \text{ Konstanten}) \quad (1.10.164)$$

aus diesem homogenen Differentialgleichungssystem das homogene Gleichungssystem

$$\sum_{\mu=1}^n (a_{\nu\mu} - \lambda\delta_{\nu\mu})d_{\mu} = 0 \quad (1.10.165)$$

entstehen, das für nichttriviale Lösungen gemäß (1.4.46) die Säkulargleichung

$$\det(a_{\nu\mu} - \lambda\delta_{\nu\mu}) = 0 \quad (1.10.166)$$

nach sich zieht, die die Nullstellen (Eigenwerte)  $\lambda_{\nu}$  besitzen möge. Jeder Nullstelle  $\lambda_{\nu}$  sind dann die Koeffizienten  $d_{\nu}$  zuzuordnen, so daß sich die das Fundamentalsystem aufbauenden Partikulärlösungen zu

$$y_{\nu}(x) = d_{\nu} e^{\lambda_{\nu} x} \quad (1.10.167)$$

ergeben.

Liegen mehrfache Wurzeln vor, so wird das Fundamentalsystem, ähnlich wie bei Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten, nach dem Schema

$$\begin{aligned} y_{11} &= d_{11} e^{\lambda_1 x}, & y_{12}(x) &= \left( d_{12}^{(0)} + x d_{12}^{(1)} \right) e^{\lambda_1 x}, \\ y_{13}(x) &= \left( d_{13}^{(0)} + x d_{13}^{(1)} + x^2 d_{13}^{(2)} \right) e^{\lambda_1 x}, & \text{ usw.} \end{aligned} \quad (1.10.168)$$

aufgebaut.

## 1.10.6 Partielle Differentialgleichungen

### a) Allgemeine, vollständige und singuläre Lösung

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist bei weitem noch nicht so weit ausgearbeitet wie diejenige der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Erstere besitzen aber in der Physik eine herausragende Bedeutung, da die Naturgesetze weitgehend auf ihrer Basis formuliert werden. Insbesondere stehen partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung im Vordergrund. Im folgenden soll das wichtigste Material aufbereitet werden.

Eine partielle Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  der  $p$  unabhängigen Variablen  $\{x_i\} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  besitzt die Struktur  $\left( u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{,i,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \text{ usw. } \dots \right)$

$$F(x_k, u, u_{,i}, u_{,i,j}, \dots) = 0. \quad (1.10.169)$$

Die Ordnung dieser Differentialgleichung ist durch die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung bestimmt.

Man nennt die Differentialgleichung linear, wenn sie in den gesuchten Funktionen und deren Ableitungen linear ist. Homogenität bzw. Inhomogenität der linearen Differentialgleichung sind in gewohnter Weise zu verstehen. Im linearen Fall gilt das bekannte Superpositionsprinzip, d. h., eine Linearkombination von Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  ist wieder Lösung:

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2. \quad (1.10.170)$$



Unter der allgemeinen Lösung einer partiellen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit  $p$  unabhängigen Variablen versteht man eine Lösung, die  $n$  willkürliche Funktionen von  $(p-1)$  Variablen enthält, wobei diese Variablen die unabhängigen Variablen oder auch Kombinationen davon sein können.

Daneben tritt bei Differentialgleichungen 1. Ordnung der Begriff der vollständigen Lösung auf, die eine Funktion der  $p$  unabhängigen Variablen  $x_k$  ist und  $p$  unabhängige Parameter  $a_k$  aufweisen muß.

Man kann die vollständige Lösung zur Konstruktion der allgemeinen Lösung benutzen: Es sei

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_p; a_1, a_2, \dots, a_p) \quad (1.10.171)$$

die vollständige Lösung, also eine  $p$ -fache Schar von Funktionen. Nun reduziert man die Zahl der Freiheitsgrade der Parameter um eins:

$$a_p = v(a_1, a_2, \dots, a_{p-1}). \quad (1.10.172)$$

Im Sinne der Enveloppenberechnung bildet man nach der Kettenregel die folgenden  $(p-1)$  Gleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial a_k} + \frac{\partial U}{\partial a_p} \frac{\partial v}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p-1), \quad (1.10.173)$$

die man nach  $a_k$  auflösen kann:

$$a_k = a_k(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (k = 1, 2, \dots, p-1). \quad (1.10.174)$$

Damit sind bei Heranziehung von (1.10.172) alle Parameter als Funktionen von  $x_k$  gegeben, so daß aus  $U$  eine Funktion der unabhängigen Variablen entsteht, in die eine willkürliche Funktion  $v$  von  $(p-1)$  Variablen eingeht.

Die singuläre Lösung bekommt man z. B. aus der vollständigen Lösung, indem man

$$\frac{\partial U}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (1.10.175)$$

setzt, von diesen  $p$  Gleichungen zu

$$a_k = a_k(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (1.10.176)$$

übergeht und damit die Parameter in (1.10.171) eliminiert. Damit wird die gesuchte Funktion als singuläre Lösung eine Funktion nur der unabhängigen Variablen, vorausgesetzt, daß die Differentialgleichung erfüllt ist.

Zur Veranschaulichung dieser Darlegungen beziehen wir uns im folgenden auf den 2-dimensionalen Fall ( $p = 2$ ) mit der Zuordnung:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad U = z. \quad (1.10.177)$$

Die vollständige Lösung (1.10.171) lautet dann:

$$z = z(x, y; a, b) \quad (1.10.178)$$

und beinhaltet eine 2-parametrische Flächenschar. Aus den Gleichungen (1.10.172) und (1.10.173) geht

$$\text{a) } b = v(a), \quad \text{b) } \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial b} \frac{dv}{da} = 0 \quad (1.10.179)$$

hervor. Durch die Setzung (1.10.179a) wird die 2-parametrische Flächenschar (1.10.178) auf eine 1-parametrische reduziert:

$$z = z(x, y; a, v(a)). \quad (1.10.180)$$

Zieht man nun noch (1.10.179b) zur Elimination von  $a$  heran, so gelangt man zur allgemeinen Lösung mit der willkürlichen Funktion  $v$  von einer Variablen. Dieser letzte Schritt bedeutet Enveloppenbildung hinsichtlich einer speziellen, durch die Wahl von  $v$  festgelegten 1-parametrischen Flächenschar (1.10.180). Die singuläre Lösung hingegen bedeutet gemäß (1.10.175)

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = 0, \quad (1.10.181)$$

also Enveloppenbildung hinsichtlich aller in der vollständigen Lösung enthaltenen Lösungen.

## b) Partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

### *Kegelfelder*

Dieser Abschnitt dient dazu, einen tieferen Einblick in die Hamilton-Jacobi-Theorie der Mechanik zu vermitteln. Dabei spielen die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung als ausgezeichnete Kurven eine besondere Rolle. In der Mechanik sieht man nämlich, daß die Charakteristiken der Hamilton-Jacobi-Gleichung gerade die Bahnkurven der Massenpunkte sind.

In Anwendung von (1.10.169) schreiben wir die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in der Form

$$F(x_k, u, u_{,k}) = 0. \quad (1.10.182)$$

Die allgemeine Lösung hat die explizite bzw. implizite Gestalt

$$\begin{aligned} \text{a) } u &= u(x_k) = u(x_1, x_2, \dots, x_p) && \text{bzw.} \\ \text{b) } G(x_k, u) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10.183)$$

Durch Differentiation entsteht aus (1.10.183b) bei Verwendung der Abkürzungen  $G_{,u} = \frac{\partial G}{\partial u}$ ,  $p_k = u_{,k}$  :

$$\text{a) } G_{,k} + G_{,u} u_{,k} = 0, \quad \text{b) } p_k = -\frac{G_{,k}}{G_{,u}}. \quad (1.10.184)$$

Mit Hilfe der letzten Formel kann man der Differentialgleichung (1.10.182) die Gestalt

$$F\left(x_k, u, -\frac{G_{,k}}{G_{,u}}\right) = \Phi(x_k, u, G_{,k}, G_{,u}) = 0 \quad (1.10.185)$$

geben. In dieser Form tritt  $G$  selbst nicht mehr auf. Dafür ist die Zahl der unabhängigen Variablen um eins erhöht.

Es ist zweckmäßig, weiter die Richtungsgrößen für die Normalenrichtung, nämlich

$$\text{a) } P_k = G_{,k}, \quad \text{b) } P_u = G_{,u}, \quad (1.10.186)$$

einzuführen, womit sich dann die Formeln (1.10.184) und (1.10.185) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \text{a) } P_k + P_u p_k &= 0, \\ \text{b) } p_k &= -\frac{P_k}{P_u}, \\ \text{c) } \Phi(x_k, u, P_k, P_u) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10.187)$$

Die Funktion  $\Phi$  ist in  $P_k$  und  $P_u$  homogen vom Grad 0.

Es bietet sich nun an, die Größen  $\{x_k, u\}$  als die Koordinaten eines  $(p+1)$ -dimensionalen Raumes anzusehen, in dem  $G(x_k, u) = 0$  eine Hyperfläche beschreibt. Die  $(p+1)$  partiellen Ableitungen  $\{P_k, P_u\}$  bestimmen dann in einem herausgegriffenen Punkt die Richtung der auf dieser Hyperfläche senkrecht stehenden Normalen. Durch (1.10.187c) erfolgt die Einschränkung dieser Richtung um einen Freiheitsgrad, so daß die Freiheit der Normalen auf einen  $p$ -dimensionalen Kegelmantel begrenzt wird, den man Normalenkegel (Richtungskegel) nennt. Die senkrecht auf der Normalenrichtung stehenden Flächenelemente hüllen in dem herausgegriffenen Punkt ebenfalls einen Kegel ein, der Elementarkegel heißt, der wiederum der Spitzenteil des Mongeschen Tangentialkegels ist, der von den Tangentialebenen eingehüllt wird.

Im Unterschied zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung, wo einem Raumpunkt ein Richtungsfeld zugeordnet wird, ist hier gemäß (1.10.187c) der Raum mit dem Elementarkegelfeld überdeckt.

Die Integration der partiellen Differentialgleichung (1.10.185) bedeutet geometrisch die Auffindung von Hyperflächen. Nach A. L. CAUCHY kann man die Hyperflächen aus den Charakteristiken aufbauen, die die Integralkurven eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems sind. Die Charakteristiken sind dabei in der Hyperfläche gelegene Kurven, die den Elementarkegel längs einer Mantellinie berühren. Während es im Normalfall zu jeder Raumkurve eine einzige Lösungsfläche gibt, sind den Charakteristiken unendlich viele Lösungsflächen zugeordnet.

### **Charakteristiken**

Wir betrachten nun eine im  $(p+1)$ -dimensionalen Raum vorgegebene Raumkurve mit dem Kurvenparameter  $\lambda$ :

$$x_k = x_k(\lambda), \quad u = u(\lambda), \quad (1.10.188)$$

die in der zu bestimmenden Lösungsfläche liegen möge:

$$G(x_k(\lambda), u(\lambda)) = 0. \quad (1.10.189)$$

Um die Fläche selbst zu erhalten, müssen noch die Richtungsgrößen der Normalen (aus der sich das senkrecht daraufstehende Flächenelement ergibt)

$$P_k = P_k(\lambda), \quad P_u = P_u(\lambda) \quad (1.10.190)$$

längs der Kurve bestimmt werden. Die Größen (1.10.188) und (1.10.190), die einen Flächenstreifen (Kurve und begleitende Flächenelemente) definieren, müssen die Differentialgleichung (1.10.187c) befriedigen. Von dem Flächenstreifen aus kann im Normalfall die Hyperfläche eindeutig aufgebaut werden (Cauchy-Problem).

Aus (1.10.184a) ist die längs der Raumkurve gültige Streifenbedingung  $\left(x_k = \frac{dx_k}{d\lambda}, \dot{u} = \frac{du}{d\lambda}\right)$

$$\sum_{k=1}^p P_k(\lambda) \dot{x}_k(\lambda) + P_u(\lambda) \dot{u}(\lambda) = 0 \quad (1.10.191)$$

zu gewinnen, der die  $(p+1)$  Größen  $P_k(\lambda)$  und  $P_u(\lambda)$  genügen müssen.

Als nächstes leiten wir aus (1.10.187c) durch Differentiation nach  $x_l$  und  $u$  das inhomogene Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} G_{,k,l} + \frac{\partial \Phi}{\partial P_u} G_{,u,l} = -\Phi_{,l}, \\ \text{b) } & \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} G_{,k,u} + \frac{\partial \Phi}{\partial P_u} G_{,u,u} = -\Phi_{,u}, \end{aligned} \quad (1.10.192)$$

für die zweiten Ableitungen von  $G$  her. Weiter resultiert durch Differentiation nach  $\lambda$  aus (1.10.186) das ähnlich gebaute inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sum_{k=1}^p \dot{x}_k G_{,k,l} + \dot{u} G_{,u,l} = \dot{P}_l, \\ \text{b) } & \sum_{k=1}^p \dot{x}_k G_{,k,u} + \dot{u} G_{,u,u} = \dot{P}_u. \end{aligned} \quad (1.10.193)$$

Das Aufbauen der Lösungsfläche  $G = 0$  durch Potenzreihenentwicklung von einer gegebenen Raumkurve aus setzt die Kenntnis der partiellen Ableitungen von  $G$  in beliebiger Ordnung voraus. In der mathematischen Literatur wird gezeigt, daß die eindeutige Existenz der partiellen Ableitungen 2. Ordnung von  $G$  dann nicht gesichert ist, wenn die beiden als von  $\lambda$  abhängig zu betrachtenden Gleichungssysteme (1.10.192) und (1.10.193) voneinander abhängig werden. Raumkurven dieser Art heißen Charakteristiken. Eine solche Abhängigkeit ist gegeben, wenn sich die beiden Gleichungssysteme decken. Das ist der Fall für

$$\begin{aligned} \text{a) } \dot{x}_k &= \alpha(\lambda) \frac{\partial \Phi}{\partial P_k}, & \text{b) } \dot{u} &= \alpha(\lambda) \frac{\partial \Phi}{\partial P_u}, \\ \text{c) } \dot{P}_l &= -\alpha(\lambda) \Phi_{,l}, & \text{d) } \dot{P}_u &= -\alpha(\lambda) \Phi_{,u}, \end{aligned} \quad (1.10.194)$$

wobei  $\alpha(\lambda)$  ein zunächst freier Proportionalitätsfaktor ist. Mittels der Gleichung (1.10.185) kann man dafür auch

$$\begin{aligned} \text{a) } \dot{x}_k &= -\frac{\alpha}{P_u} \frac{\partial F}{\partial p_k}, & \text{b) } \dot{u} &= -\alpha \sum_{k=1}^p \frac{p_k}{P_u} \frac{\partial F}{\partial p_k}, \\ \text{c) } \dot{p}_l &= \frac{\alpha}{P_u} (F_{,l} + p_l F_{,u}), & \text{d) } \dot{P}_u &= -\alpha F_{,u} \end{aligned} \quad (1.10.195)$$

schreiben. Die Veränderung der Parametrisierung

$$d\xi = -\frac{\alpha(\lambda)}{P_u(\lambda)} d\lambda \quad (1.10.196)$$

läßt nun anstelle von (1.10.194) oder (1.10.195) die folgende endgültige Form der Differentialgleichungssysteme für die Charakteristiken entstehen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{dx_k}{d\xi} &= -P_u \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}, & \text{b) } \frac{du}{d\xi} &= -P_u \frac{\partial \Phi}{\partial P_u}, \\ \text{c) } \frac{dP_l}{d\xi} &= P_u \Phi_{,l}, & \text{d) } \frac{dP_u}{d\xi} &= P_u \Phi_{,u} \end{aligned} \quad (1.10.197)$$

oder

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{dx_k}{d\xi} &= \frac{\partial F}{\partial p_k}, & \text{b) } \frac{du}{d\xi} &= \sum_{k=1}^p p_k \frac{\partial F}{\partial p_k}, \\ \text{c) } \frac{dp_l}{d\xi} &= -(F_{,l} + p_l F_{,u}), & \text{d) } \frac{dP_u}{d\xi} &= P_u F_{,u}. \end{aligned} \quad (1.10.198)$$

Zur Veranschaulichung dieser allgemeinen Überlegungen spezialisieren wir sie kurz auf den 3-dimensionalen Fall ( $p = 2$ ). Dann kann man die Zuordnung

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad u = z(x, y), \quad G(x, y, z) = 0 \quad (1.10.199)$$

treffen, so daß statt (1.10.185)

$$F(x, y, z, z_{,x}, z_{,y}) = \Phi(x, y, z, G_{,x}, G_{,y}, G_{,z}) = 0 \quad (1.10.200)$$

zu stehen kommt.

Die Normalenrichtung zu  $G = 0$  ist durch den Gradienten  $\text{grad } G = iG_{,x} + jG_{,y} + kG_{,z}$  gegeben. Die drei Richtungsgrößen  $G_{,x}$ ,  $G_{,y}$ ,  $G_{,z}$  sind nun durch (1.10.200) um einen Freiheitsgrad eingeschränkt. Dadurch bleibt für die Normalenrichtung, die im 3-dimensionalen Fall zwei Freiheitsgrade besitzt, nur ein Freiheitsgrad übrig, d. h., die Normale überstreicht den Mantel eines Kegels. Wir verzichten auf die Explizierung der anderen obigen Überlegungen.

### c) Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

#### Typeneinteilung

Um die Situation nicht zu sehr zu komplizieren, beschränken wir uns auf den 2-dimensionalen Fall, d. h. auf gesuchte Funktionen  $z = z(x, y)$ , für die die inhomogene lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\begin{aligned} L[z] &= a(x, y)z_{,x,x} + 2b(x, y)z_{,x,y} + c(x, y)z_{,y,y} \\ &\quad + d(x, y)z_{,x} + e(x, y)z_{,y} + f(x, y)z \\ &= -q(x, y) \end{aligned} \quad (1.10.201)$$

gelten möge, wobei  $(-q(x, y))$  die Inhomogenität angibt.

Im Falle  $q = 0$  nennt man die Differentialgleichung homogen. Für die Lösung homogener Gleichungen gibt es eine Reihe ausgearbeiteter Lösungsverfahren: Summationsmethode, Integrationsmethode, Verschiebungsmethode, Faltungsmethode usw.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung setzt sich additiv aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen.

Durch die Transformation

$$\text{a) } x = x(\xi, \eta), \quad \text{b) } y = y(\xi, \eta) \quad (1.10.202)$$

erhält man aus (1.10.201) die folgende neue Struktur der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &[a(\xi, x)^2 + 2b\xi, x\xi, y + c(\xi, y)^2] z_{, \xi, \xi} \\ &+ 2[a\xi, x\eta, x + b(\xi, x\eta, y + \xi, y\eta, x) + c\xi, y\eta, y] z_{, \xi, \eta} \\ &+ [a(\eta, x)^2 + 2b\eta, x\eta, y + c(\eta, y)^2] z_{, \eta, \eta} \\ &= \Phi(\xi, \eta, z, z_{, \xi}, z_{, \eta}). \end{aligned} \quad (1.10.203)$$

Besitzt die Gleichung

$$a \left( \frac{\xi, x}{\xi, y} \right)^2 + 2b \left( \frac{\xi, x}{\xi, y} \right) + c = 0 \quad (1.10.204)$$

zwei verschiedene Wurzeln, so kann man die beiden Glieder mit  $z_{, \xi, \xi}$  und  $z_{, \eta, \eta}$  zum Verschwinden bringen.

Im Falle reeller Variablen und Koeffizienten unterscheidet man auf der Basis dieser Überlegungen folgende Typen, wobei wegen der variablen Koeffizienten Änderungen im Definitionsbereich möglich sind:

#### 1. Hyperbolischer Typ

$$b^2 - ac > 0. \quad (1.10.205)$$

Hier ist die Normalform

$$z_{, \xi, \eta} = \Psi(\xi, \eta, z, z_{, \xi}, z_{, \eta}) \quad (1.10.206)$$

erreichbar, die bei Anwendung der Transformation

$$\text{a) } \xi = \varrho - \lambda, \quad \text{b) } \eta = \varrho + \lambda, \quad (1.10.207)$$

in die geläufigere Form

$$z_{,\varrho,\varrho} - z_{,\lambda,\lambda} = H(\varrho, \lambda, z, z_{,\varrho}, z_{,\lambda}) \quad (1.10.208)$$

übergeht.

### 2. Parabolischer Typ

$$b^2 - ac = 0. \quad (1.10.209)$$

Hier ist die Normalform

$$z_{,\xi,\xi} = P(\xi, \eta, z, z_{,\xi}, z_{,\eta}) \quad (1.10.210)$$

zu erhalten.

### 3. Elliptischer Typ

$$b^2 - ac < 0. \quad (1.10.211)$$

Die Normalform ist in diesem Fall durch ( $\lambda = i\mu$ )

$$z_{,\varrho,\varrho} + z_{,\mu,\mu} = E(\varrho, \mu, z, z_{,\varrho}, z_{,\mu}) \quad (1.10.212)$$

gegeben.

### **Charakteristiken**

Auch bei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung spielen die Charakteristiken als ausgezeichnete Kurven eine besondere Rolle. Während im Normalfall eine in der  $x$ - $y$ -Ebene gelegene Kurve, auf der  $z$  und  $\frac{\partial z}{\partial n}$  ( $n$  symbolisiert die Richtung der Kurvennormalen) im Sinne von Randbedingungen vorgegeben sind, dazu dienen kann, die Lösung  $z(x, y)$  zu bestimmen, läßt sich im Falle einer Charakteristik die Lösungsfunktion nicht eindeutig gewinnen. Deshalb sind die Charakteristiken nicht für die Festlegung von Randbedingungen geeignet.

Die Gleichung für die Charakteristiken von (1.10.201) lautet:

$$\begin{aligned} \text{a) } a(dy)^2 - 2b dx dy + c(dx)^2 &= 0 & \text{ bzw.} \\ \text{b) } a \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \frac{dy}{dx} + c &= 0. \end{aligned} \quad (1.10.213)$$

Im hyperbolischen Fall gehen durch jeden Punkt zwei Charakteristiken. Im parabolischen Fall fallen diese zusammen. Im elliptischen Fall existieren keine reellen Charakteristiken.

**Wellengleichung**

Eine in der Physik häufig auftretende Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ ist die Wellengleichung, hier in zwei Dimensionen als Spezialfall von (1.10.201) angegeben:

$$z_{,x,x} - z_{,y,y} = 0. \quad (1.10.214)$$

Die d'Alembertsche Lösung

$$z = F_1(x - y) + F_2(x + y) \quad (1.10.215)$$

( $F_1, F_2$  beliebige Funktionen) ist die allgemeine Lösung. Ist  $x$  eine kartesische Ortskoordinate und  $t = \frac{y}{c_p}$  die Zeit ( $c_p = \text{const}$ ), so beschreibt  $F_1$  bzw.  $F_2$  eine mit der Phasengeschwindigkeit  $c_p$  in positive bzw. negative  $x$ -Richtung laufende Welle.

Aus (1.10.213) folgen die Charakteristiken

$$x \mp y = \text{const}, \quad (1.10.216)$$

auf denen die Funktionswerte von  $F_1$  und  $F_2$  konstant sind, d. h., in der  $x$ - $y$ -Ebene pflanzen sich die Wellen in Richtung der Charakteristiken fort. Daran erkennt man ganz deutlich, daß die Charakteristiken zur Festlegung von Randbedingungen ungeeignet sind.

**Anfangswerte und Randwerte**

Bei der obigen Behandlung der Charakteristiken haben wir bei der Vorgabe der Lösungsfunktion und deren Ableitung (in Richtung der Kurvennormalen) auf einer Kurve allgemein von Randbedingungen gesprochen.

Im Falle einer Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ kann man gegebenenfalls, wie wir am Beispiel der Wellengleichung gezeigt haben, eine Koordinate zu der Zeit in Beziehung setzen, wodurch die Randbedingungen zu spezifisch physikalischen Anfangsbedingungen werden, weil nämlich aus dem Anfangszustand einer Funktion (z. B. Funktionsverlauf und zeitliche Ableitung auf einer Kurve) zu einem bestimmten Zeitpunkt der Funktionsverlauf für die Zukunft berechnet werden kann (Cauchy-Problem). Man denke dabei etwa an das Schwingungsproblem einer Saite.

Im parabolischen Fall formt man die Differentialgleichung so um, daß zeitliche Ableitungen nur in 1. Ordnung auftreten (z. B. Wärmeleitungsgleichung, Diffusionsgleichung, Schrödinger-Gleichung der Wellenmechanik). Es braucht dann als Anfangsbedingung nur der Verlauf der Lösungsfunktion zu einem festen Zeitpunkt vorgegeben zu werden.

Im elliptischen Fall werden die Randbedingungen auf der Berandung eines geschlossenen Gebietes vorgeschrieben. Im Unterschied zum hyperbolischen Fall ist auf dieser Berandung nicht  $z$  und  $\frac{\partial z}{\partial n}$ , sondern  $z$  oder  $\frac{\partial z}{\partial n}$  (bzw. eine Linearkombination davon) vorzugeben. Die Lösungsfunktion selbst ist dann im Innern des Gebietes bestimmt.

Man unterscheidet in allgemeiner auf die Koordinaten  $\{x_k\} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  eines Gebietes  $V_p$  mit der Berandung ( $V_p$ ) bezogener Fassung für eine gesuchte Funktion  $u(x_k)$  folgende drei Standardaufgaben mit inhomogenen Randbedingungen, bei denen die Inhomogenitäten durch die vorgeschriebenen Funktionen  $f_\alpha(x_k)$  beschrieben werden.



Randwertproblem 1. Art (Dirichletsches Problem):

$$u(x_k) \Big|_{(V_p)} = f_1(x_k), \quad (1.10.217)$$

Randwertproblem 2. Art (Neumannsches Problem):

$$\frac{\partial u(x_k)}{\partial n} \Big|_{(V_p)} = f_2(x_k), \quad (1.10.218)$$

Randwertproblem 3. Art:

$$\left[ \alpha u(x_k) + \beta \frac{\partial u(x_k)}{\partial n} \right] \Big|_{(V_p)} = f_3(x_k) \quad (1.10.219)$$

( $\alpha, \beta$  Konstanten).

### **Inhomogene Differentialgleichung**

Wir gehen, anknüpfend an (1.10.201), von der auf  $p$  Dimensionen erweiterten linearen inhomogenen partiellen Differentialgleichung

$$L[u(x_k)] = -q(x_k) \quad (1.10.220)$$

aus, wobei  $L$  ein linearer selbstadjungierter Differentialoperator ist.

Die für  $q = 0$  entstehende lineare homogene partielle Differentialgleichung wird bei einer der physikalischen Situation angepaßten Koordinatenwahl oft durch Separation der Variablen mittels Produktansatz erfolgreich gelöst. Dieser Methode begegnet man sehr häufig bei physikalischen Anwendungen.

Die bekanntesten Methoden zur Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung sind:

1. Entwicklung der Lösung nach Eigenfunktionen des homogenen Problems,
2. Variation der Konstanten,
3. Methode der Greenschen Funktion.

Diese Methoden haben wir bereits bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen exemplifiziert. Im folgenden wollen wir die Methode der Greenschen Funktion bei den partiellen Differentialgleichungen näher kennenlernen.

In Verallgemeinerung von (1.7.180) wird die zur inhomogenen Differentialgleichung (1.10.220) gehörige Greensche Funktion  $G^{(p)}(x_k, \xi_k)$  durch

$$L[G^{(p)}(x_k, \xi_k)] = -\delta^{(p)}(x_k - \xi_k) \quad (1.10.221)$$

definiert, wobei im Falle kartesischer Koordinaten  $\{x_k\} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  und  $\{\xi_k\} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p\}$  die  $p$ -dimensionale Deltafunktion in Verallgemeinerung von (1.7.174) durch

$$\begin{aligned} \text{a) } & \delta^{(p)}(x_k - \xi_k) = \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2)\dots\delta(x_p - \xi_p) \quad \text{mit} \\ \text{b) } & \int \delta^{(p)}(x_k - \xi_k) d^{(p)}x = 1 \end{aligned} \quad (1.10.222)$$

(Integration über den ganzen Raum)

gegeben ist.

Wir zeigen nun, daß die allgemeine Lösung von (1.10.220) die Gestalt

$$u(x_k) = u^{(h)}(x_k) + \int q(\xi_k) G^{(p)}(x_k, \xi_k) d^{(p)}\xi \quad (1.10.223)$$

besitzt, wobei  $u^{(h)}(x_k)$  die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist und die Lösung der inhomogenen Gleichung als quellenmäßige Darstellung geschrieben wurde. In der Tat folgt bei Anwendung des Differentialoperators  $L$ :

$$\begin{aligned} L[u(x_k)] &= \int q(\xi_k) L[G^{(p)}(x_k, \xi_k)] d^{(p)}\xi \\ &= - \int q(\xi_k) \delta^{(p)}(x_k - \xi_k) d^{(p)}\xi = -q(x_k). \end{aligned} \quad (1.10.224)$$

Die Fourier-Entwicklung (1.7.190) der Greenschen Funktion nach dem als vollständig vorausgesetzten Orthonormalsystem von Eigenfunktionen  $\varphi_\Omega(x_k)$  der Eigenwertgleichung

$$L[\varphi_\Omega(x_k)] = \lambda_\Omega \varphi_\Omega(x_k) \quad (1.10.225)$$

schreibt sich als

$$\begin{aligned} \text{a) } & G^{(p)}(x_k, \xi_k) = \sum_{\Omega} \alpha_\Omega(\xi_k) \varphi_\Omega(x_k) \quad \text{mit} \\ \text{b) } & \alpha_\Omega(\xi_k) = (\varphi_\Omega, G^{(p)}), \end{aligned} \quad (1.10.226)$$

wobei wir nur den diskreten Anteil wiedergegeben haben. Setzen wir (1.10.226a) in (1.10.221) ein, so resultiert mittels (1.10.225) bei Beachtung der Orthonormalität (1.7.188a)

$$(\varphi_\Omega, \varphi_\Lambda) = \delta_{\Omega\Lambda} \quad (1.10.227)$$

und der Vollständigkeitsrelation (1.7.189)

$$\sum_{\Omega} \varphi_\Omega^*(\xi_k) \varphi_\Omega(x_k) = \delta^{(p)}(x_k - \xi_k) \quad (1.10.228)$$

für die Fourier-Koeffizienten die Formel

$$\alpha_\Omega(\xi_k) = -\frac{1}{\lambda_\Omega} \varphi_\Omega^*(\xi_k). \quad (1.10.229)$$

Die Greensche Funktion erhält damit die Form

$$G^{(p)}(x_k, \xi_k) = - \sum_{\Omega} \frac{1}{\lambda_{\Omega}} \varphi_{\Omega}^*(\xi_k) \varphi_{\Omega}(x_k) \quad (1.10.230)$$

(Satz von Mercer).

Wegen der Reellität der Eigenwerte gilt

$$G^{(p)}(x_k, \xi_k)^* = G^{(p)}(\xi_k, x_k). \quad (1.10.231)$$

Ist die Greensche Funktion reell, so resultiert ihre Symmetrie

$$G^{(p)}(x_k, \xi_k) = G^{(p)}(\xi_k, x_k). \quad (1.10.232)$$

## 1.11 Lineare Integralgleichungen

### 1.11.1 Einführung

Neben den algebraischen Gleichungen und Differentialgleichungen besitzen in Physik und Technik auch die Integralgleichungen eine herausragende Bedeutung. Sie sind gleichsam einem algebraischen Gleichungssystem mit unendlich vielen Gleichungen für unendlich viele Unbekannte zuzuordnen, wobei das Integralzeichen die Funktion des Summenzeichens übernimmt.

Die wichtigsten Typen von Integralgleichungen für die gesuchte Funktion  $\varphi(t)$  sind ( $a, b$  reell):

Fredholmsche Integralgleichung 1. Art:

$$\int_a^b \mathcal{K}(x, t) \varphi(t) dt + f(x) = 0. \quad (1.11.1)$$

Dabei sind hier wie auch später die Inhomogenität  $f(x)$  und der Kern  $\mathcal{K}(x, t)$  vorgegeben.

Fredholmsche Integralgleichung 2. Art:

$$\int_a^b \mathcal{K}(x, t) \varphi(t) dt - \varphi(x) + f(x) = 0. \quad (1.11.2)$$

Man kann dafür auch

$$\int_a^b [\mathcal{K}(x, t) - \delta(x - t)] \varphi(t) dt + f(x) = 0 \quad (1.11.3)$$

schreiben, wenn  $x$  im Grundgebiet  $a < x < b$  liegt, so daß in diesem Fall eine Zurückführung auf (1.11.1) mit einem veränderten Kern möglich ist.

Volterrasche Integralgleichung 1. Art:

$$\int_a^x \mathcal{K}(x, t)\varphi(t) dt + f(x) = 0. \quad (1.11.4)$$

Volterrasche Integralgleichung 2. Art:

$$\int_a^x \mathcal{K}(x, t)\varphi(t) dt - \varphi(x) + f(x) = 0. \quad (1.11.5)$$

Der Unterschied der Volterraschen Integralgleichung, in die man Randbedingungen oder Anfangsbedingungen einarbeiten kann, gegenüber den Fredholmschen besteht also in der Variabilität der oberen Integrationsgrenze. Dadurch sind die Volterraschen Integralgleichungen schwieriger als die Fredholmschen zu behandeln.

Treten in einer Integralgleichung auch noch Differentialquotienten auf, so spricht man von Integro-Differentialgleichungen.

Unter einer quadratischen Integralform in der Funktion  $\Phi(x)$  versteht man den Ausdruck

$$F = \int_{x=a}^b \int_{y=a}^b \mathcal{K}(x, y)\Phi(x)\Phi(y) dx dy. \quad (1.11.6)$$

## 1.11.2 Fredholmsche Integralgleichung 2. Art

### *Neumannsche Reihe*

Da die Fredholmsche Integralgleichung 2. Art leichter zu behandeln ist als diejenige 1. Art, soll sie zunächst betrachtet werden. Es ist zweckmäßig, durch die Wahl ( $\lambda$  Parameter)

$$\mathcal{K}(x, t) = \lambda K(x, t) \quad (1.11.7)$$

der Gleichung (1.11.2) die folgende Form zu geben:

$$\lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt - \varphi(x) + f(x) = 0. \quad (1.11.8)$$

Ist  $f(x)$  stetig und  $K(x, t)$  stückweise stetig und sind weiter die quadratische Integrierbarkeit dieser Größen sowie einige andere mathematische Forderungen gesichert, so läßt sich die Lösung von (1.11.8), Konvergenz und Darstellung vorausgesetzt, durch sukzessive Approxi-

mation in Form der Neumannschen Reihen gewinnen:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt + \dots \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \int_a^b K_i(x, t) f(t) dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda) f(t) dt,\end{aligned}\tag{1.11.9}$$

wobei die iterierten Kerne durch

$$\begin{aligned}K_i(x, y) &= \int_a^b K_{i-1}(x, t) K(t, y) dt, & K_1(x, y) &= K(x, y) \\ &(i = 2, 3, \dots)\end{aligned}\tag{1.11.10}$$

definiert sind.

Man erhält dieses Ergebnis, indem man mit der Approximation  $\varphi(t) \rightarrow \varphi_0(t) = f(t)$  in (1.11.8) unter dem Integral beginnt, daraus  $\varphi(t) \rightarrow \varphi_1(t)$  errechnet, diese Größe unter das Integral setzt, daraus  $\varphi(t) \rightarrow \varphi_2(t)$  gewinnt, usw.

Der Ausdruck

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(x, t)\tag{1.11.11}$$

heißt lösender Kern oder Resolvente. Geht man mit (1.11.9) in (1.11.8) ein, so ergibt sich wegen der Gültigkeit der entstehenden Gleichung für beliebige Funktionen  $f(t)$  für die Resolvente die Beziehung

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, t) \Gamma(t, y; \lambda) dt.\tag{1.11.12}$$

### **Eigenwert-Integralgleichung**

Setzt man in (1.11.8) die Inhomogenität  $f(x) = 0$ , so ergibt sich die Eigenwert-Integralgleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt,\tag{1.11.13}$$

die für die Eigenwerte  $\lambda_\Omega$  die Eigenfunktionen  $\varphi_\Omega(x)$  besitzen möge:

$$\varphi_\Omega(x) = \lambda_\Omega \int_a^b K(x, t) \varphi_\Omega(t) dt \quad (\Omega = 0, 1, \dots).\tag{1.11.14}$$

Diese in der Mathematik traditionelle Gestalt der Eigenwertgleichung bedeutet im Vergleich zur linearen Algebra und zu den linearen Differentialgleichungen, daß die Eigenwerte hier den reziproken Eigenwerten jener Theorien entsprechen.

Durch komplexe Konjugation entsteht aus (1.11.14)

$$\varphi_{\Omega}^*(x) = \lambda_{\Omega}^* \int_a^b K^*(x, t) \varphi_{\Omega}^*(t) dt. \quad (1.11.15)$$

Im folgenden setzen wir die Hermitezität des Kerns voraus:

$$K^*(t, x) = K(x, t). \quad (1.11.16)$$

Aus den beiden Gleichungen (1.11.14) und (1.11.15) gewinnt man durch entsprechende Multiplikationen mit  $\varphi_{\Omega}^*(x)$  bzw.  $\varphi_{\Omega}(x)$  sowie Integration und Subtraktion

$$(\lambda_{\Omega} - \lambda_{\Omega}^*) \int_{x=a}^b \int_{t=a}^b K(x, t) \varphi_{\Omega}^*(x) \varphi_{\Omega}(t) dx dt = 0, \quad (1.11.17)$$

woraus dann, das Nichtverschwinden des Integrals vorausgesetzt, auf die Reellität der Eigenwerte geschlossen werden kann:

$$\lambda_{\Omega}^* = \lambda_{\Omega}. \quad (1.11.18)$$

Vertauscht man in (1.11.15) den Index  $\Omega \rightarrow \Gamma$ , so ergibt sich aus (1.11.14) und (1.11.15) in ähnlicher Weise die Gleichung ( $\lambda_{\Omega} \neq 0$ )

$$\left( \frac{1}{\lambda_{\Omega}} - \frac{1}{\lambda_{\Gamma}} \right) \int_a^b \varphi_{\Gamma}^*(x) \varphi_{\Omega}(x) dx = 0, \quad (1.11.19)$$

woraus für verschiedene Eigenwerte ( $\lambda_{\Gamma} \neq \lambda_{\Omega}$ ) die Orthogonalität

$$\int_a^b \varphi_{\Gamma}^*(x) \varphi_{\Omega}(x) dx = 0 \quad (1.11.20)$$

folgt. Wegen der Linearität der Eigenwertgleichung können die Eigenfunktionen auf eins normiert werden, so daß die Orthonormalitätsrelation

$$(\varphi_{\Gamma}, \varphi_{\Omega}) = \int_a^b \varphi_{\Gamma}^*(x) \varphi_{\Omega}(x) dx = \delta_{\Gamma\Omega} \quad (1.11.21)$$

zu stehen kommt.

Wir erkennen damit, daß ein hermitescher Kern auf dieselben Eigenschaften für die Eigenwerte und Eigenfunktionen führt wie in der linearen Algebra eine hermitesche Matrix oder bei

den linearen Differentialgleichungen ein selbstadjungierter (hermitescher) Differentialoperator.

Wir verzichten auf die Wiedergabe von Sätzen über die Folgerungen aus entarteten Eigenwerten, usw. Die Grundkenntnisse können aus den eben erwähnten Gebieten übertragen werden.

Der in der Mathematik geläufigen Behandlungsweise folgend, setzen wir für das Weitere die Reellität des Kerns voraus, wodurch die Eigenschaften der Hermitezität (1.11.16) in die Eigenschaft der Symmetrie

$$K(t, x) = K(x, t) \quad (1.11.22)$$

übergeht. Wir können dann auch, wenn wir von Phasenfaktoren der Art  $e^{i\phi\mu}$  absehen, mit reellen Eigenfunktionen rechnen.

Entwickeln wir den Kern nach Eigenfunktionen, so ergibt sich die Bilinearform-Darstellung

$$K(x, y) = \sum_{\Omega=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\Omega}} \varphi_{\Omega}(x) \varphi_{\Omega}(y), \quad (1.11.23)$$

mit deren Hilfe für die iterierten Kerne

$$K_i(x, y) = \sum_{\Omega=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{\Omega})^i} \varphi_{\Omega}(x) \varphi_{\Omega}(y) \quad (i = 2, 3, \dots) \quad (1.11.24)$$

und für die Resolvente (1.11.11) die Partialbruchzerlegung

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \sum_{\Omega=0}^{\infty} \frac{\varphi_{\Omega}(x) \varphi_{\Omega}(y)}{\lambda_{\Omega}(\lambda_{\Omega} - \lambda)} \quad (1.11.25)$$

folgt. Durch Integration entsteht aus (1.11.23) und (1.11.24) wegen (1.11.21)

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_a^b K(x, x) dx &= \sum_{\Omega=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\Omega}}, \\ \text{b) } \int_a^b K_i(x, x) dx &= \sum_{\Omega=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{\Omega})^i} \quad (i = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (1.11.26)$$

Die Neumannsche Reihe (1.11.9) gibt eine Reihendarstellung für die Lösung der inhomogenen Gleichung (1.11.8) wieder. Ein anderer Zugang zur Gewinnung einer Lösung in Reihenform besteht darin, daß man in (1.11.8)  $\varphi(x)$  und  $f(x)$  in Fourier-Reihen nach dem Orthonormalsystem entwickelt und bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten mittels der Eigenwertgleichung (1.11.14) eliminiert. Man findet dann die Schmidtsche Auflösungsformel

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\Omega=0}^{\infty} \frac{\lambda f_{\Omega}}{\lambda_{\Omega} - \lambda} \varphi_{\Omega}(x), \quad (1.11.27)$$

wobei gemäß (1.7.191a)

$$f_{\Omega} = (\varphi_{\Omega}, f) \quad (1.11.28)$$

gilt. Aus (1.11.27) erkennt man deutlich den Inhalt des Fredholmschen Alternativsatzes:

Die homogene Lösung besitzt für  $\lambda = \lambda_{\Omega}$  die nichttrivialen Eigenlösungen  $\varphi_{\Omega}$  und für  $\lambda \neq \lambda_{\Omega}$  nur die triviale Lösung  $\varphi(x) = 0$ . Die inhomogene Lösung hat für  $\lambda \neq \lambda_{\Omega}$  nichttriviale Lösungen und für  $\lambda = \lambda_{\Omega}$  nur dann Lösungen, wenn  $f_{\Omega} = 0$  ist, d. h., wenn die Eigenfunktionen zur Inhomogenität orthogonal sind.

Auch in der linearen Integralgleichungs-Theorie gilt die Aussage, daß sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Integralgleichung additiv aus der allgemeinen Lösung der homogenen Integralgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Integralgleichung zusammensetzt.

### 1.11.3 Fredholmsche Integralgleichung 1. Art

Zur Lösung der Fredholmschen Integralgleichung 1. Art (1.11.1)

$$\int_a^b \mathcal{K}(x, t) \varphi(t) dt + f(x) = 0 \quad (1.11.29)$$

kommen Erkenntnisse aus der Theorie der Fredholmschen Integralgleichung 2. Art zur Anwendung. So kann man die in (1.11.29) auftretenden Funktionen  $\varphi(x)$  und  $f(x)$  nach dem der Integralgleichung (1.11.14) zugeordneten Orthonormalsystem entwickeln:

$$\begin{aligned} \text{a) } \varphi(x) &= \sum_{\Omega=0}^{\infty} c_{\Omega} \varphi_{\Omega}(x), \\ \text{b) } f(x) &= \sum_{\Omega=0}^{\infty} f_{\Omega} \varphi_{\Omega}(x). \end{aligned} \quad (1.11.30)$$

Geht man damit in (1.11.29) ein, so folgt mittels (1.11.14)

$$c_{\Omega} = -\lambda_{\Omega} f_{\Omega}. \quad (1.11.31)$$

Da die Größen  $f_{\Omega}$  und  $\lambda_{\Omega}$  im Prinzip bekannt sind, ist damit auch  $\varphi(x)$  bestimmt. Natürlich sind dann die üblichen mathematischen Erfordernisse noch zu überprüfen.

## 1.12 Tensoren

### 1.12.1 Allgemeiner Tensorbegriff

Um eine allgemein-gültige Definition eines Tensors zu geben, gehen wir zunächst von einem allgemeinen  $n$ -dimensionalen Raum aus, in dem ein herausgegriffener Punkt durch die  $n$  unabhängigen Koordinaten  $x^i$ , die vorerst durchaus krummlinig sein können, festgelegt ist. Die Koordinatentransformation

$$x^{j'} = x^{j'}(x^i), \quad (1.12.1)$$



gekennzeichnet durch einen Strich am Index, bedeutet bei Festhalten des Punktes Auswechseln der Koordinaten, wobei die gestrichenen Koordinaten im allgemeinen wieder krummlinig sind. Durch Differentialbildung entsteht aus (1.12.1)

$$\text{a) } dx^{j'} = A_{i'}^{j'} dx^i \quad \text{mit} \quad \text{b) } A_{i'}^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}. \quad (1.12.2)$$

Die Koordinatendifferentiale (1.12.2a), die den existierenden Funktionen (1.12.1) korrespondieren, sind vollständige Differentiale. Man nennt Koordinaten dieser Art holonom. Bei anholonomen Koordinaten sind die Differentiale (1.12.2a) unvollständig. Wir verzichten im weiteren auf die Benutzung solcher anholonomen Koordinaten.

Die Umkehrung von (1.12.2a), nämlich

$$\text{a) } dx^i = A_{k'}^i dx^{k'} \quad \text{mit} \quad \text{b) } A_{k'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}, \quad (1.12.3)$$

ist möglich, wenn die Koeffizientendeterminante nicht verschwindet:

$$\det(A_{i'}^{j'}) \neq 0. \quad (1.12.4)$$

Dabei ist  $(A_{k'}^i)$  die Inverse zu  $(A_{i'}^{j'})$ . Es gilt, wie man mittels der Kettenregel bestätigt,

$$\text{a) } A_{i'}^{j'} A_{k'}^i = \delta_{k'}^{j'} = \delta_k^j \quad \text{und} \quad \text{b) } A_{i'}^j A_k^{i'} = \delta_k^j. \quad (1.12.5)$$

Geht man von der ersten Gleichung zur zugeordneten Determinantengleichung über, so erhält man

$$\det(A_{i'}^{j'}) \cdot \det(A_{k'}^i) = 1. \quad (1.12.6)$$

Der zugrunde gelegte  $n$ -dimensionale Raum wird durch die Einführung der sogenannten geometrischen Objekte (im wesentlichen Tensoren und Spinoren) mit Inhalt ausgestattet. An einem geometrischen Objekt hat man grundsätzlich zweierlei Dinge klar voneinander zu unterscheiden, nämlich

1. den durch das Grundsymbol bestimmten algebraischen Charakter, der sich in der algebraischen Axiomatik, also in den Rechenregeln ausdrückt (als Beispiele für in diesem Sinne unterschiedliche geometrische Objekte nennen wir die bereits oben eingeführten Skalare, Vektoren, dyadischen Produkte, Matrizen usw.);
2. den Transformationscharakter, der durch die transformatorische Axiomatik festgelegt wird.

Der Transformationscharakter eines geometrischen Objektes drückt sich in seinem Indexbild (Indizes sind dem Grundsymbol angefügt) aus, das Skalaren, Vektoren, dyadischen Produkten, Matrizen usw. anhaften kann.

Dem Transformationscharakter nach unterscheiden wir in der Physik, durch gruppentheoretische Einsichten determiniert, grundsätzlich Tensoren (in der Feldtheorie zur Beschreibung von Teilchen mit ganzzahligem Spin) und Spinoren (in der Feldtheorie zur Beschreibung von Teilchen mit halbzahligem Spin) sowie daraus aufgebaute Größen.

Die Anzahl der Indizes an einem geometrischen Objekt nennt man dessen Stufe. Untere Indizes heißen kovariante Indizes, obere heißen kontravariante Indizes.

Eine im allgemeinen vom Raumpunkt abhängige Größe  $T_{ij..}{}^{kl..}(x^m)$  besitzt nun Tensorcharakter, wenn bei kontinuierlichen Koordinatentransformationen das tensorielle Transformationsgesetz

$$T_{i'j'..}{}^{k'l'..}(x^{m'}) = A_{i'}^i A_{j'}^j A_k^{k'} A_l^{l'} \dots T_{ij..}{}^{kl..}(x^m) \quad (1.12.7)$$

gilt. Man nennt dann diese Größen  $T_{ij..}{}^{kl..}$  die Tensorcomponenten eines als abstrakte Größe konzipierten (echten) Tensors  $T$  (Tensorfeld). Man beachte dabei, daß auf der rechten Seite, wie auch bei früheren Gleichungen, entsprechend unserer Konvention zu summieren ist, hier also über  $i, j, k, l$  usw. von 1 bis  $n$ . Die Indizes  $i$  und  $i', j$  und  $j'$  usw. sind jeweils als unabhängig, d. h. voneinander entkoppelt, zu betrachten.

Ein kovarianter Index transformiert sich also mit den Koeffizienten  $A_{i'}^i$ , und ein kontravarianter mit den Koeffizienten  $A_k^{k'}$ , d. h., beide Arten von Indizes transformieren sich mit zueinander inversen Koeffizienten. Man sagt, daß sich gleichartige Indizes kogredient zueinander und ungleichartige kontragredient zueinander transformieren.

Bei dem in (1.12.7) betrachteten Tensor handelt es sich um einen gemischten Tensor, da sich seine Indizes sowohl aus kovarianten als auch aus kontravarianten Indizes rekrutieren. Die einmal fixierte Indexreihenfolge darf dabei nicht willkürlich verändert werden, da solche Veränderungen Symmetrieforderungen bedeuten.

Unter einem invarianten Tensor versteht man einen Tensor mit folgender Eigenschaft seiner Komponenten:

$$T_{i'j'..}{}^{k'l'..} = T_{ij..}{}^{kl..}, \quad (1.12.8)$$

wobei in diesem besonderen Fall die Indizes mit Strich und ohne Strich nicht als entkoppelt zu denken sind, z. B.  $T_{1'..}{}^{..} = T_{1..}{}^{..}$  usw.

Ein gemischter Tensor besonderer Art ist der Kronecker-Tensor (Kronecker-Symbol)  $\delta_k^j = g_k^j$ , wie man durch die folgende Schreibung von (1.12.5) erkennt:

$$\delta_{k'}^{j'} = A_{k'}^i A_l^{j'} \delta_i^l. \quad (1.12.9)$$

Er ist nämlich ein invarianter konstanter Tensor, dessen Komponenten in jedem Koordinatensystem die gleichen festen Zahlenwerte besitzen.

Im folgenden konkretisieren wir die obigen allgemeinen Erkenntnisse auf Tensoren niedriger Stufenzahl:

### **Tensor 0. Stufe**

Der Tensor 0. Stufe trägt keinen Index. Er transformiert sich also gemäß

$$T'(x^{m'}) = T(x^m). \quad (1.12.10)$$

Da der einzige ihn charakterisierende Wert für alle Koordinatensysteme derselbe ist, nennt man ihn auch synonym Invariante.

Beispiele aus der Physik sind: Druck, Ruhmassendichte, elektrische Ruhladungsdichte, elektrische Ladung usw.

**Tensor 1. Stufe**

Der Tensor 1. Stufe trägt einen Index, transformiert sich also in der Form

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{i'}(x^{m'}) &= A_{i'}^k T_k(x^m) & \text{bzw.} \\ \text{b) } T^{i'}(x^{m'}) &= A_k^{i'} T^k(x^m). \end{aligned} \quad (1.12.11)$$

Die skalaren Tensoren 1. Stufe (Grundsymbol weist auf Skalar, angefügter Index auf Tensor hin) sind die Komponenten eines invarianten Vektors. Man nennt diesen Tensor 1. Stufe deshalb auch oft kurz Vektor.

Ein Blick auf (1.12.2a) lehrt uns, daß die Koordinatendifferentiale Tensoren 1. Stufe sind. Auch die im Abschnitt 1.6.2 eingeführten Basisvektoren transformieren sich tensoriell:

$$\begin{aligned} \text{a) } e_{i'}(x^{m'}) &= A_{i'}^k e_k(x^m) & \text{bzw.} \\ \text{b) } e^{i'}(x^{m'}) &= A_k^{i'} e^k(x^m), \end{aligned} \quad (1.12.12)$$

sind also, obwohl sie hinsichtlich ihres algebraischen Charakters Vektoren sind, hinsichtlich ihres Transformationscharakters Tensoren 1. Stufe.

Die Vektorkomponenten  $a_i$  bzw.  $a^i$  transformieren sich als Tensoren 1. Stufe wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{a) } a_{i'}(x^{m'}) &= A_{i'}^k a_k(x^m) & \text{bzw.} \\ \text{b) } a^{i'}(x^{m'}) &= A_k^{i'} a^k(x^m). \end{aligned} \quad (1.12.13)$$

Daraus resultiert, daß der Vektor  $\mathbf{a}$  in (1.6.5) ein Tensor 0. Stufe, also eine Vektorinvariante wird:

$$\mathbf{a}'(x^{m'}) = \mathbf{a}(x^m). \quad (1.12.14)$$

Ein Beispiel dafür ist der Bogendifferentialvektor (1.6.25), für den

$$ds' = ds \quad (1.12.15)$$

gilt. Daraus resultiert die Invarianz des Linienelements

$$ds' = ds. \quad (1.12.16)$$

**Tensor 2. Stufe**

Der Tensor 2. Stufe trägt zwei Indizes, transformiert sich also gemäß

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{i'j'}(x^{m'}) &= A_{i'}^k A_{j'}^l T_{kl}(x^m) & \text{bzw.} \\ \text{b) } T^{i'j'}(x^{m'}) &= A_k^{i'} A_l^{j'} T^{kl}(x^m) & \text{bzw.} \\ \text{c) } T_{i'}^{j'}(x^{m'}) &= A_{i'}^k A_l^{j'} T_k^l(x^m) & \text{bzw.} \\ \text{d) } T^{i'}_{j'}(x^{m'}) &= A_k^{i'} A_{j'}^l T^k_l(x^m). \end{aligned} \quad (1.12.17)$$

Da in der Anfangszeit der Theoretischen Physik Tensoren höherer Stufe kaum benutzt wurden, wurde der Tensor 2. Stufe schlechthin als Tensor bezeichnet.

Im folgenden lernen wir die wichtigsten algebraischen Operationen für Tensoren kennen:

### **Addition**

Die Addition von zwei Tensoren führt nur dann wieder zu einem entsprechenden Tensor, wenn das Indexbild beider Tensoren übereinstimmt und beide Tensoren auf denselben Raumpunkt bezogen sind:

$${}^I T_{ij..}{}^{kl..}(x^m) + {}^{II} T_{ij..}{}^{kl..}(x^m) = T_{ij..}{}^{kl..}(x^m). \quad (1.12.18)$$

### **Äußere Multiplikation**

Bei auf denselben Raumpunkt bezogenen Tensoren entsteht durch Produktbildung das äußere Tensorprodukt:

$${}^I T_{ij..}{}^{kl..}(x^m) {}^{II} T_{rs..}{}^{\cdot\cdot}(x^m) = T_{ij..}{}^{kl}{}_{rs..}{}^{\cdot\cdot}(x^m), \quad (1.12.19)$$

das wieder ein Tensor ist.

### **Verjüngung**

Werden in einem Tensor ein kovarianter und ein kontravarianter Index gleichgesetzt, was Summation über beide Indizes bedeutet, so spricht man von Verjüngung bezüglich dieser beiden Indizes:

$$T_{ij..}{}^{kl..} \rightarrow T_{ij..}{}^{jl..}. \quad (1.12.20)$$

Die Verjüngung vermindert die Stufe um die Zahl 2.

### **Innere Multiplikation**

Durch Verjüngung bezüglich des letzten Index eines Faktors und des ersten Index des darauf folgenden Faktors in einem äußeren Tensorprodukt entsteht, sofern diese Verjüngung gemäß der Indexstellung möglich ist, aus einem äußeren Tensorprodukt das innere Tensorprodukt:

$${}^I T_{ij..}{}^{kl}(x^m) {}^{II} T_{rs..}{}^{\cdot\cdot}(x^m) \rightarrow {}^I T_{ij..}{}^{kl}(x^m) {}^{II} T_{ls..}{}^{\cdot\cdot}(x^m). \quad (1.12.21)$$

### **Spurbildung**

Durch Verjüngung bezüglich der beiden Indizes eines gemischten Tensors 2. Stufe entsteht die Spur des Tensors 2. Stufe, die eine Invariante ist:

$$T_i{}^k \rightarrow T_i{}^i. \quad (1.12.22)$$

Im weiteren listen wir einige innere Eigenschaften von Tensoren auf:

### **Symmetrie**

Ein Tensor  $T_{..i..j..}$  heißt in den Indizes  $i$  und  $j$  symmetrisch, wenn gilt

$$(T_{..i..j..})^T = T_{..j..i..} = T_{..i..j..}. \quad (1.12.23)$$

Dabei bedeutet das Zeichen T die schon bei Matrizen kennengelernte Operation Transponierung (Indexvertauschung). Einen in allen Indizes symmetrischen Tensor bezeichnet man als vollsymmetrisch.

### **Antisymmetrie**

Einen Tensor  $T_{..i..j..}$  nennt man in den Indizes  $i$  und  $j$  antisymmetrisch, wenn die Relation

$$(T_{..i..j..})^T = T_{..j..i..} = -T_{..i..j..} \quad (1.12.24)$$

vorliegt. Ist ein Tensor in allen Indizes antisymmetrisch, so heißt er vollantisymmetrisch.

### **Hermitezität**

Einen Tensor 2. Stufe nennt man hermitesch, wenn

$$(T_{ij})^+ = (T_{ij}^*)^T = T_{ji}^* = T_{ij} \quad (1.12.25)$$

gilt. Dabei bedeuten die Symbole \* bzw. + wie in der Matrizenrechnung die Operationen komplexe Konjugation bzw. hermitesche Konjugation.

### **Antihermitezität**

Einen Tensor 2. Stufe bezeichnet man als antihermitesch, wenn

$$(T_{ij})^+ = -T_{ij} \quad (1.12.26)$$

ist.

Symmetrie, Antisymmetrie, Hermitezität und Antihermitezität bleiben bei reellen Koordinatentransformationen erhalten.

Die Symmetrisierung, Hermitesierung usw. von Tensoren erfolgt nach dem Vorbild der Matrizenrechnung.

## **1.12.2 Pseudotensoren**

Im Zusammenhang mit den diskreten Koordinatentransformationen (z. B. Spiegelung, Zeitumkehr) haben in der Quantenfeldtheorie im Unterschied zu den bisher behandelten echten Tensoren auch die Pseudotensoren eine große Bedeutung erlangt.

Das pseudotensorielle Transformationsgesetz lautet im Unterschied zu (1.12.7) folgendermaßen:

$$T_{i'j'}^{k'l'}(x^{m'}) = (\text{sign } f(A_{s'}^r)) A_{i'}^i A_{j'}^j A_k^{k'} A_l^{l'} \dots T_{ij..}^{kl..}(x^m). \quad (1.12.27)$$

Auf der rechten Seite geht also noch das Vorzeichen einer Funktion der Elemente der Transformationsmatrix ein. Ist diese Funktion speziell die reziproke Funktionaldeterminante, also

$$f = \det(A_{s'}^r), \quad (1.12.28)$$

so spricht man von einem normalen Pseudotensor.

Es versteht sich sofort, daß das Produkt von Tensoren und Pseudotensoren zu Pseudotensoren und das von Pseudotensoren und Pseudotensoren gleicher Art zu Tensoren führt.

Ein in der Theoretischen Physik auftretender, nur aus metrischen Größen aufgebauter normaler Pseudotensor ist der Levi-Civitasche Pseudotensor

$$\begin{aligned} \text{a) } \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} &= \sqrt{-\det(g_{rs})} \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} &= -\frac{1}{\sqrt{-\det(g_{rs})}} \Delta^{i_1 i_2 \dots i_n}. \end{aligned} \quad (1.12.29)$$

Dabei ist  $\det(g_{rs})$  die metrische Determinante, also die aus dem metrischen Tensor  $g_{rs}$  gewonnene Determinante. Weiter bedeutet

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Delta^{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (1.12.30)$$

das Levi-Civita-Symbol, das in allen Indizes vollantisymmetrisch ist (1.3.3), also für zwei gleiche Indizes verschwindet, und für das  $\Delta_{12\dots n} = 1$  (1.3.2) gilt. Wir haben dieses auch in 3-dimensionaler Fassung kennengelernt (1.6.36).

In Anknüpfung an (1.7.48) wird das  $n$ -dimensionale Volumelement und Volumen durch

$$\begin{aligned} \text{a) } d^{(n)}V &= \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} dV^{i_1 i_2 \dots i_n} = \sqrt{\det(g_{rs})} d^{(n)}x \\ & \quad (d^{(n)}x = dx^1 dx^2 \dots dx^n), \\ \text{b) } V^{(n)} &= \int d^{(n)}V \end{aligned} \quad (1.12.31)$$

definiert. Dabei ist  $dV^{i_1 i_2 \dots i_n}$  der  $n$ -dimensionale Maschentensor, der aus den Komponenten der  $n$  Linienelementvektoren  $ds_{(i)} = e_k dx_{(i)}^k$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) wie folgt gebildet ist:

$$dV^{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{vmatrix} dx_{(1)}^{i_1} & \dots & dx_{(1)}^{i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ dx_{(n)}^{i_1} & \dots & dx_{(n)}^{i_n} \end{vmatrix}. \quad (1.12.32)$$

### 1.12.3 Tensoren im 3-dimensionalen Euklidischen Raum

Um den mathematischen Apparat maximal zu vereinfachen, schränken wir uns hier auf kartesische (geradlinig rechtwinklige) Koordinaten ein. Dann fallen die kovarianten und kontravarianten Tensorcomponenten zusammen, so daß wir nur untere Indizes zu benutzen brauchen. Entsprechend unserer Konvention laufen kleine griechische Indizes hier von 1 bis 3. Im folgenden knüpfen wir an die Symbolik von Abschnitt 1.6.3 an.

Gemäß der Verknüpfung

$$b_\mu = T_{\mu\nu} a_\nu \quad (1.12.33)$$

bzw.

$$\mathbf{b} = T \mathbf{a} \quad (1.12.34)$$

in kompakter (indexfreier) Schreibweise wird ein Vektor  $\mathbf{a}$  durch den Tensor  $T$  einem anderen Vektor  $\mathbf{b}$  zugeordnet. Ausgeschrieben lautet (1.12.33):

$$\begin{aligned} b_1 &= T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3, \\ b_2 &= T_{21}a_1 + T_{22}a_2 + T_{23}a_3, \\ b_3 &= T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + T_{33}a_3. \end{aligned} \quad (1.12.35)$$

Bei einer Koordinatentransformation von einem kartesischen Koordinatensystem  $\{x_\mu\}$  zu einem anderen kartesischen Koordinatensystem  $\{x_{\mu'}\}$  transformieren sich die Vektorkomponenten gemäß (1.12.11a)

$$\begin{aligned} \text{a) } a_{1'} &= A_{1'}^1 a_1 + A_{1'}^2 a_2 + A_{1'}^3 a_3, \\ a_{2'} &= A_{2'}^1 a_1 + A_{2'}^2 a_2 + A_{2'}^3 a_3, \\ a_{3'} &= A_{3'}^1 a_1 + A_{3'}^2 a_2 + A_{3'}^3 a_3, \\ \text{b) } b_{1'} &= A_{1'}^1 b_1 + A_{1'}^2 b_2 + A_{1'}^3 b_3, \\ b_{2'} &= A_{2'}^1 b_1 + A_{2'}^2 b_2 + A_{2'}^3 b_3, \\ b_{3'} &= A_{3'}^1 b_1 + A_{3'}^2 b_2 + A_{3'}^3 b_3 \end{aligned} \quad (1.12.36)$$

und die Tensorcomponenten gemäß (1.12.17a)

$$\begin{aligned} T_{1'1'} &= A_{1'}^1 A_{1'}^1 T_{11} + A_{1'}^1 A_{1'}^2 T_{12} + A_{1'}^1 A_{1'}^3 T_{13} \\ &+ A_{1'}^2 A_{1'}^1 T_{21} + A_{1'}^2 A_{1'}^2 T_{22} + A_{1'}^2 A_{1'}^3 T_{23} \\ &+ A_{1'}^3 A_{1'}^1 T_{31} + A_{1'}^3 A_{1'}^2 T_{32} + A_{1'}^3 A_{1'}^3 T_{33} \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (1.12.37)$$

An diesem Beispiel der ausgeschriebenen Transformationsformel für eine einzige Komponente kann man die Zweckmäßigkeit der Summenkonvention sicherlich leicht ermessen.

Für die Basisvektoren  $e_\mu = e^\mu$ , die gemäß (1.6.32b) mit den Einheitsvektoren zusammenfallen, d. h.  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} = \{e_\mu\} = \{e^\mu\}$  ergibt sich vermöge (1.12.11) das Transformationsgesetz

$$\text{a) } e_{\mu'} = A_{\mu'}^\nu e_\nu \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } e^{\mu'} = A_{\nu'}^{\mu'} e^\nu. \quad (1.12.38)$$

Da für die transformierte Basis, die den gestrichenen kartesischen Koordinaten zugeordnet ist,  $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\} = \{\mathbf{e}_{\mu'}\} = \{\mathbf{e}^{\mu'}\}$  gilt, resultiert

$$\text{a) } A_{\nu}^{\mu'} = A_{\mu'}^{\nu} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } A^T = A^{-1} \quad (1.12.39)$$

und daraus

$$\det(A_{\nu}^{\mu'}) = \pm 1. \quad (1.12.40)$$

Wir haben es also mit der orthogonalen Transformation ( $O[3]$ ) zu tun, die wir bereits in Abschnitt 1.8.1 kennenlernten. Konsequenterweise müßten wir nun für den Rest dieses Abschnitts die Symbolik ändern ( $A \rightarrow \Omega$ ), was aber aus für diesen Abschnitt angestrebten Einheitlichkeitsgründen unzweckmäßig wäre. Wir verzichten deshalb darauf.

Ausgeschrieben lautet (1.12.38):

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= A_1^1 \mathbf{i} + A_1^2 \mathbf{j} + A_1^3 \mathbf{k}, \\ \mathbf{j}' &= A_2^1 \mathbf{i} + A_2^2 \mathbf{j} + A_2^3 \mathbf{k}, \\ \mathbf{k}' &= A_3^1 \mathbf{i} + A_3^2 \mathbf{j} + A_3^3 \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.12.41)$$

Im Falle von Drehungen, für die  $\det(A_{\nu}^{\mu'}) = 1$  ist, bedeutet die Transformation (1.12.41) anschaulich, daß die beiden kartesischen Basisvektorsysteme  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  und  $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$  durch eine Drehung auseinander hervorgehen.

Neben den Drehungen haben in der gegenwärtigen Physik auch die Spiegelungen eine große Bedeutung erlangt. Im 3-Dimensionalen bedeuten diese den Übergang von einem Rechtssystem zu einem Linkssystem der Basis (Dreibein) oder umgekehrt. Sie lassen sich auf zwei verschiedene Typen zurückführen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left. \begin{array}{l} \mathbf{i}' = -\mathbf{i} \\ \mathbf{j}' = -\mathbf{j} \\ \mathbf{k}' = -\mathbf{k} \end{array} \right\}, \quad \text{d.h.} \quad (A_{\nu}^{\mu'}) = (A_{\nu}^{\mu'}) \\ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{mit} \quad \det(A_{\nu}^{\mu'}) = -1 \end{aligned}$$

(Spiegelung aller drei Basisvektoren),

$$\begin{aligned} \text{b) } \left. \begin{array}{l} \mathbf{i}' = \mathbf{i} \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} \\ \mathbf{k}' = -\mathbf{k} \end{array} \right\}, \quad \text{d.h.} \quad (A_{\nu}^{\mu'}) = (A_{\nu}^{\mu'}) \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{mit} \quad \det(A_{\nu}^{\mu'}) = -1 \end{aligned} \quad (1.12.42)$$

(Spiegelung eines einzigen herausgegriffenen Basisvektors).



Im folgenden wollen wir auf den ersten Fall Bezug nehmen. Dann transformieren sich gemäß (1.12.36a) die Vektorkomponenten wie folgt:

$$a_{x'} = -a_x, \quad a_{y'} = -a_y, \quad a_{z'} = -a_z \quad (1.12.43)$$

(echter oder polarer Vektor).

In Formel (1.12.29) lernten wir den Levi-Civitaschen Pseudotensor als normalen Pseudotensor kennen. Bei Spezialisierung auf kartesische Koordinaten lautet diese Formel wegen (1.6.34b) hier:

$$\text{a) } \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = i \Delta_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{mit} \quad \text{b) } \Delta_{123} = 1. \quad (1.12.44)$$

Gemäß (1.12.27) resultiert das Transformationsgesetz

$$\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = (\text{sign det}(A_{\mu\nu}^{\alpha'})) A_{\alpha'}^{\alpha} A_{\beta'}^{\beta} A_{\gamma'}^{\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}. \quad (1.12.45)$$

Daraus erkennt man, daß sich der Levi-Civitasche Pseudotensor bei Drehungen wie ein echter Tensor verhält, bei Spiegelungen jedoch rechts ein negatives Vorzeichen auftritt, was den pseudotensoriellen Charakter ausdrückt.

In den verschiedensten Gebieten der Physik besitzt im 3-dimensionalen Tensorkalkül der antisymmetrische Tensor

$$A = (A_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12.46)$$

mit seinen 3 unabhängigen Komponenten  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{23}$  eine große Bedeutung. Mit Hilfe des Levi-Civitaschen Pseudotensors (1.12.44) läßt er sich auf einen Pseudotensor 1. Stufe abbilden ( $A_{\mu\nu} \rightarrow t_{\alpha}$ ). Es gelten die vermöge (1.6.36b) zu beweisenden Zusammenhänge, wenn wir definieren ( $\varepsilon_{\alpha\tau\sigma} = i \Delta_{\alpha\tau\sigma}$ ):

$$\begin{aligned} \text{a) } t_{\alpha} &= \frac{1}{2i} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\gamma}, \\ \text{b) } A_{\tau\sigma} &= -i \varepsilon_{\alpha\tau\sigma} t_{\alpha} = \Delta_{\alpha\tau\sigma} t_{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.12.47)$$

Im einzelnen lauten diese Gleichungen (zyklische Zuordnung):

$$t_1 = A_{23}, \quad t_2 = A_{31}, \quad t_3 = A_{12}. \quad (1.12.48)$$

Diese Abbildung ist sehr zweckmäßig. Dann schreibt sich nämlich das Produkt des Tensors  $A$  mit einem Vektor  $\mathbf{c}$  als Vektorprodukt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ac} &= \mathbf{e}_{\mu} A_{\mu\nu} c_{\nu} \\ &= -\mathbf{i}(t_y c_z - t_z c_y) - \mathbf{j}(t_z c_x - t_x c_z) - \mathbf{k}(t_x c_y - t_y c_x) \\ &= \mathbf{c} \times \mathbf{t}, \end{aligned} \quad (1.12.49)$$

wenn wir die vektorielle Größe

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}t_x + \mathbf{j}t_y + \mathbf{k}t_z \quad (1.12.50)$$

eingeführen.

Aus der Definition (1.12.47) von  $t_\alpha$  erkennt man den pseudotensoriellen Transformationscharakter dieser Größe, der durch den Levi-Civitaschen Pseudotensor auf der rechten Seite eingebracht wird. Es ergibt sich das Transformationsgesetz

$$t_{\alpha'} = (\text{sign det}(A_{\alpha'}^\mu)) A_{\alpha'}^\alpha t_\alpha. \quad (1.12.51)$$

Bei Drehungen folgt deshalb, da  $\text{sign det}(A_{\alpha'}^\mu) = 1$  gilt, das Transformationsgesetz eines echten Tensors 1. Stufe, nämlich

$$t_{\alpha'} = A_{\alpha'}^\beta t_\beta. \quad (1.12.52)$$

Für Spiegelungen gilt wegen  $\text{sign det}(A_{\alpha'}^\mu) = -1$ , so daß im Unterschied zu (1.12.43) das Transformationsgesetz

$$\text{a) } t_{\alpha'} = t_\alpha \quad \text{also} \quad \text{b) } t_{x'} = t_x, \quad t_{y'} = t_y, \quad t_{z'} = t_z \quad (1.12.53)$$

resultiert. Die vektorielle Größe  $\mathbf{t}$ , die wir durch Abbildung aus einem antisymmetrischen Tensor erhalten haben, ist also in Wirklichkeit ein Pseudovektor, für den in Gegenüberstellung zum Begriff des echten oder polaren Vektors der Terminus axialer Vektor eingeführt wurde.

Bauen wir den antisymmetrischen Tensor insbesondere aus den beiden Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  wie folgt auf:

$$A_{\beta\gamma} = a_\beta b_\gamma - a_\gamma b_\beta, \quad (1.12.54)$$

so finden wir vermöge (1.12.47)

$$t_\alpha = \Delta_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma \quad (1.12.55)$$

bzw. durch Vergleich mit (1.6.37)

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \mathbf{e}_\alpha \Delta_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma &= \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}(a_z b_x - a_x b_z) \\ &\quad + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (1.12.56)$$

Das Vektorprodukt ist also ebenfalls ein axialer Vektor. Aus der Tatsache, daß durch das Vektorprodukt dem von ihm aufgespannten Parallelogramm ein Schraubensinn (Achsenrichtung) zugeordnet wird, erklärt sich der Name axialer Vektor.

### 1.12.4 Hauptachsentransformation im 3-dimensionalen Euklidischen Raum

In den Abschnitten 1.4.4 und 1.4.5 haben wir das Problem der Hauptachsentransformation bei quadratischen und hermiteschen Formen ganz allgemein kennengelernt. In den verschiedensten Gebieten der Physik taucht dieselbe Fragestellung in 3-dimensionaler Gestalt auch hinsichtlich symmetrischer Tensoren  $T_{\mu\nu}$  immer wieder auf. Deshalb wollen wir uns im folgenden mit diesem sehr konkreten Hauptachsenproblem im Detail beschäftigen, wobei kartesische Koordinaten verwendet werden.

Im folgenden gehen wir unter Benutzung von (1.12.33) von der quadratischen Form (1.4.65) aus:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2F &= \mathbf{a}(T\mathbf{a}) = b_{\mu}a_{\mu} = T_{\mu\nu}a_{\mu}a_{\nu} \quad \text{mit} \\ \text{b) } b_{\mu} &= T_{\mu\nu}a_{\nu}. \end{aligned} \quad (1.12.57)$$

Die dabei auftretenden Tensorkomponenten beziehen sich auf die orthonormale Basis  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , in der sich der Vektor  $\mathbf{a}$  wie folgt schreibt:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z. \quad (1.12.58)$$

Aus (1.12.57a) resultiert nun

$$\text{a) } b_{\mu} = \frac{\partial F}{\partial a_{\mu}} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } \mathbf{b} = \text{grad}_{\mathbf{a}} F. \quad (1.12.59)$$

Die letzte Gleichung bedeutet, daß der Gradient von  $F$  durch Differentiation nach den Komponenten von  $\mathbf{a}$  zu bilden ist. Bekanntlich steht der so gebildete Gradient auf der betrachteten Fläche senkrecht. Wir werden diese Schreibweise auch später benutzen.

Die Hauptachsen der Fläche 2. Grades zeichnen sich nun gerade dadurch aus, daß die Richtung dieses Gradienten mit der Richtung des Vektors  $\mathbf{a}$  zusammenfällt, d. h., diese Richtungen sind aus der Gleichung

$$\mathbf{b} = T\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \quad (\lambda \text{ Proportionalitätsfaktor}) \quad (1.12.60)$$

zu bestimmen. Damit sind wir auf die Eigenwertgleichung

$$\text{a) } T\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } (T - \lambda\mathbb{I})\mathbf{a} = 0 \quad (1.12.61)$$

gestoßen, die nur Lösungen besitzt, wenn die Säkulargleichung

$$\det(T - \lambda\mathbb{I}) = 0 \quad (1.12.62)$$

erfüllt ist. Die Säkulargleichung ist in diesem Fall eine algebraische Gleichung 3. Grades in  $\lambda$ , die die Eigenwerte  $\{\lambda_{\mu}\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  als Lösungen besitzt. Die zugehörigen Eigenvektoren seien  $\mathbf{a}_{(T)}$ .

Im Abschnitt über Matrizen haben wir festgestellt, daß eine reelle symmetrische Matrix reelle Eigenwerte besitzt und die zugehörigen Eigenvektoren orthonormierbar sind. Hier soll der Beweis für diese Aussage im Falle eines 3-dimensionalen reellen symmetrischen Tensors im Vektorformalismus konkret durchgeführt werden. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die Eigenwertgleichung (1.12.61a) mit  $\mathbf{a}^*$  und erhalten

$$\mathbf{a}^*(T\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}^*\mathbf{a}. \quad (1.12.63)$$

Dabei bedeutet  $\mathbf{a}^* = e_{\mu}a_{\mu}^*$  den komplex-konjugierten Vektor zu  $\mathbf{a}$ , d. h., wir lassen eventuell auftretende komplexe Vektorkomponenten zu. Komplexe Konjugation von (1.12.63) liefert

$$\mathbf{a}(T^*\mathbf{a}^*) = \lambda^*\mathbf{a}\mathbf{a}^*. \quad (1.12.64)$$

Subtraktion der beiden letzten Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda^*) \mathbf{a}^* \mathbf{a} &= \mathbf{a}^* (T \mathbf{a}) - \mathbf{a} (T^* \mathbf{a}^*) \\ &= (T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^*) a_\mu^* a_\nu = 0, \end{aligned} \quad (1.12.65)$$

wenn wir für den Tensor Hermitezität ( $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}^*$ ) oder noch spezieller Reellität und Symmetrie voraussetzen. Damit ist die Reellität

$$\lambda = \lambda^* \quad (1.12.66)$$

der Eigenwerte bewiesen, wenn  $\mathbf{a}$  kein Nullvektor ist, also  $\mathbf{a}^* \mathbf{a} \neq 0$  gilt, was in der Physik im 3-dimensionalen Ortsraum die Regel sein wird.

Um die Orthonormalität der Eigenvektoren zu beweisen, schreiben wir die Eigenwertgleichung (1.12.61a) für die konkreten Eigenwerte  $\lambda_\Gamma$  und  $\lambda_\Sigma$  (in diesem Fall in der komplex-konjugierten Form) auf:

$$\text{a) } T \mathbf{a}_{(\Gamma)} = \lambda_\Gamma \mathbf{a}_{(\Gamma)}, \quad \text{b) } T^* \mathbf{a}_{(\Sigma)}^* = \lambda_\Sigma \mathbf{a}_{(\Sigma)}^*. \quad (1.12.67)$$

Die erste bzw. zweite Gleichung multiplizieren wir mit den Eigenvektoren  $\mathbf{a}_{(\Sigma)}^*$  bzw.  $\mathbf{a}_{(\Gamma)}$  durch. Die beiden erhaltenen Gleichungen subtrahieren wir voneinander:

$$(\lambda_\Gamma - \lambda_\Sigma) \mathbf{a}_{(\Sigma)}^* \mathbf{a}_{(\Gamma)} = (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}^*) a_{(\Sigma)\mu}^* a_{(\Gamma)\nu} = 0. \quad (1.12.68)$$

Daraus folgt, daß für verschiedene Eigenwerte ( $\lambda_\Gamma \neq \lambda_\Sigma$ ) die Eigenvektoren orthogonal sind:

$$\mathbf{a}_{(\Sigma)}^* \mathbf{a}_{(\Gamma)} = 0. \quad (1.12.69)$$

Da die Eigenwertgleichung (1.12.61a) linear ist, kann man sie mit einem freien Faktor multiplizieren, den man gerade so wählen kann, daß die Norm des Eigenvektors gleich eins wird:

$$\mathbf{a}_{(\Gamma)}^* \mathbf{a}_{(\Gamma)} = 1. \quad (1.12.70)$$

Die beiden Ergebnisse (1.12.69) und (1.12.70) lassen sich mittels des Kronecker-Symbols in einer Formel zusammenfassen:

$$\mathbf{a}_{(\Sigma)}^* \mathbf{a}_{(\Gamma)} = \delta_{\Sigma\Gamma}. \quad (1.12.71)$$

Das Orthonormalsystem der Eigenvektoren identifizieren wir nun mit der durch Drehung aus der orthonormalen Basis  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  hervorgegangenen transformierten orthonormalen Basis  $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ :

$$\mathbf{i}' = \mathbf{a}_{(1)}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{a}_{(2)}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{a}_{(3)}, \quad (1.12.72)$$

wobei wir die Durchnummerierung so vornehmen müssen, daß die Rechtssystem-Eigenschaft bei der Drehung erhalten bleibt.

Aus der Definition der quadratischen Form (1.12.57) geht hervor, daß  $F$  eine Invariante ist:

$$F' = F. \quad (1.12.73)$$

Wir können deshalb auch

$$2F = \mathbf{a}'(T'\mathbf{a}') = b_{\mu'\nu'} a_{\mu'} a_{\nu'} \quad (1.12.74)$$

schreiben. Da der Vektor  $\mathbf{a}$  selbst eine Vektorinvariante ist, gilt (1.12.58)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' = \mathbf{a} &= \mathbf{i}' a_{x'} + \mathbf{j}' a_{y'} + \mathbf{k}' a_{z'} \\ &= \mathbf{a}_{(1)} a_{x'} + \mathbf{a}_{(2)} a_{y'} + \mathbf{a}_{(3)} a_{z'} . \end{aligned} \quad (1.12.75)$$

Mittels der Eigenwertgleichung (1.12.61a) resultiert daraus

$$T\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_{(1)} a_{x'} + \lambda_2 \mathbf{a}_{(2)} a_{y'} + \lambda_3 \mathbf{a}_{(3)} a_{z'} \quad (1.12.76)$$

und weiter aus (1.12.57)

$$2F = \mathbf{a}(T\mathbf{a}) = \lambda_1 a_{x'}^2 + \lambda_2 a_{y'}^2 + \lambda_3 a_{z'}^2 . \quad (1.12.77)$$

Durch Vergleich mit (1.12.74) lesen wir nun die Diagonalform

$$(T_{\mu'\nu'}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (1.12.78)$$

des transformierten Tensors ab, wobei in der Hauptdiagonale die Eigenwerte erscheinen. Wir haben durch diese Drehung der Basis (Dreibein) also die Hauptachsengestalt (1.12.77) der untersuchten quadratischen Form erreicht.

Aus (1.12.78) erhält man, wenn man sich der Invarianz von Spur und Determinante eines Tensors 2. Stufe, in Matrizenform in (1.4.52) festgehalten, erinnert:

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{spur } T &= T_{\mu\mu} = T_{\mu'\mu'} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 , \\ \text{b) } \tilde{T} &= \det(T_{\mu\nu}) = \det(T_{\mu'\nu'}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 . \end{aligned} \quad (1.12.79)$$

Das Vorzeichen der Eigenwerte bestimmt die konkrete Form der Fläche 2. Grades, deren Definitheitsbedingungen durch (1.4.70) gegeben sind. Bei geeigneter Reihenfolge der Eigenwerte resultiert für

$$\begin{aligned} \text{a) } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &> 0 && \text{ein Ellipsoid,} \\ \text{b) } \lambda_1, \lambda_2 &> 0; \lambda_3 < 0 && \text{ein einschaliges Hyperboloid,} \\ \text{c) } \lambda_1 &> 0; \lambda_2, \lambda_3 < 0 && \text{ein zweischaliges Hyperboloid.} \end{aligned} \quad (1.12.80)$$

Im folgenden beschränken wir uns auf positiv-definite quadratische Formen ( $F' > 0$ ). Das bedeutet nach (1.12.77) Positivität der Eigenwerte:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ , also Bezugnahme auf Ellipsoide. Da durch eine isotrope Streckung ( $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}\sqrt{2F'}$ ) die Ähnlichkeit der Flächen 2. Grades erhalten bleibt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zum normierten Tensorellipsoid ( $2F' = 1$ ) übergehen. Der Vektor  $\mathbf{a}$  übernimmt die Rolle eines Ortsvektors. Wir können dann statt (1.12.77)

$$\frac{a_{x'}^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{a_{y'}^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}\right)^2} + \frac{a_{z'}^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_3}}\right)^2} = 1 \quad (1.12.81)$$

schreiben. Daraus erkennt man den Zusammenhang der Eigenwerte mit den Hauptachsenabschnitten

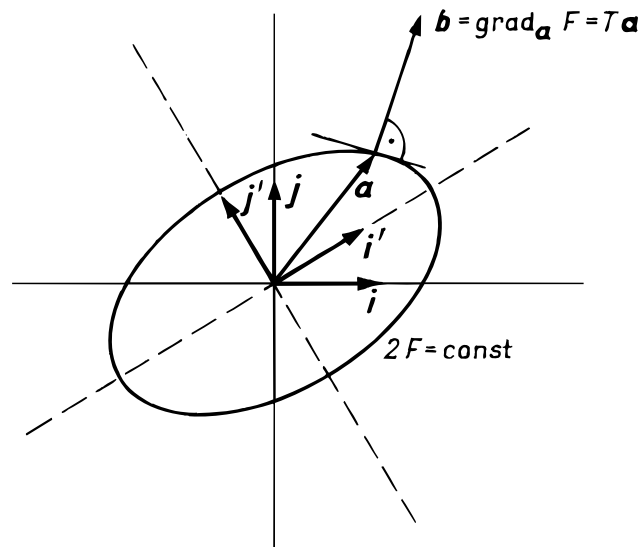
$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}, \quad \sqrt{\frac{1}{\lambda_3}} \quad (1.12.82)$$

des Ellipsoids.

In Abb. 1.11 haben wir die bisherigen Ergebnisse festgehalten, wobei wir zur besseren Veranschaulichung den 2-dimensionalen Fall einer Ellipse in der  $x$ - $y$ -Ebene (Hauptschnitt  $z = 0$  durch das Ellipsoid) ausgewählt.

Die obigen Überlegungen gingen von der Annahme aus, daß alle Eigenwerte voneinander verschieden sind. Fallen zwei oder sogar alle drei Eigenwerte zusammen, so liegt Entartung vor, die sich im Auftreten von Symmetrien äußert: Im Falle lauter positiver Eigenwerte bedeutet das Gleichwerden zweier Eigenwerte Übergang vom Ellipsoid zum Rotationsellipsoid und das Gleichwerden aller drei Eigenwerte Übergang vom Ellipsoid zur Kugelfläche.

Im Entartungsfall kann nicht mehr auf die Orthogonalität (1.12.69) geschlossen werden, da dieser Schluß die Verschiedenheit der Eigenwerte zur Voraussetzung hatte. Man muß dann von zugeordneten linear unabhängigen Vektoren ausgehen und daraus ein Orthonormalsystem aufbauen, ähnlich zu (1.4.57) im Matrizenkalkül.



**Abbildung 1.11:** Veranschaulichung der Hauptachsentransformation

Geometrisch ist diese Situation leicht verständlich zu machen, wenn wir z.B. an Abb. 1.11 denken: Entartet die Ellipse zum Kreis, so gibt es keine zwei ausgezeichneten Achsenrichtungen mehr. Man kann dann mit einem beliebigen Einheitsvektor beginnen und einen dazu senkrechten Einheitsvektor konstruieren. Diese beiden Einheitsvektoren bilden dann die orthonormale Basis (Zweibein).

### 1.12.5 Kovariante Ableitung und Christoffel-Symbol

Zu einem Kompendium der Mathematik für Physiker, Naturwissenschaftler und Technikwissenschaftler gehören in unserer Zeit auch die Elemente der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie, die bereits 1915 geschaffen wurde und in weiten Bereichen der Natur empirisch sehr gut verifiziert ist. Dieser Absicht dient die folgende Einführung einiger korrespondierender mathematischer Grundbegriffe. Wir knüpfen dabei an den im Abschnitt 1.6.2 behandelten allgemeinen Raumbegriff unter Verwendung krummliniger Koordinaten an. Außerdem ist dieser mathematische Apparat in der Theorie der Versetzungen der Festkörperphysik ein unentbehrliches Hilfsmittel.

Zur Abwicklung der Rechnungen ist es zweckmäßig, zur vereinfachten Schreibweise der partiellen Ableitung das Komma zu verwenden:

$$\frac{\partial T_{..}}{\partial x^i} = T_{..,i}. \quad (1.12.83)$$

Für eine Invariante (1.12.10) folgt dann nach der Kettenregel das tensorielle Transformationsgesetz für die Komponenten des Gradienten  $T_{,k}$

$$T'_{,i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} T_{,k} = A_{i'}^k T_{,k}. \quad (1.12.84)$$

Dagegen erhalten wir aus (1.12.11a) für die partielle Ableitung eines Tensors 1. Stufe das nichttensorielle Transformationsgesetz

$$T'_{i',j'} = A_{i'}^k A_{j'}^l T_{k,l} + A_{i',j'}^k T_k. \quad (1.12.85)$$

Da gemäß dem Allgemeinen Relativitätsprinzip die physikalischen Naturgesetze bei Koordinatentransformationen forminvariant (kovariant) sein müssen, benötigt man den Begriff einer Ableitung, die aus einem Tensor wieder einen Tensor macht. Das leistet die (Riemannsche) kovariante Ableitung

$$T_{i;j} = T_{i,j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} T_k, \quad (1.12.86)$$

die durch ein Semikolon symbolisiert wird, wobei die Größen  $\left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\}$  die Christoffel-Symbole sind, die aus dem metrischen Tensor  $g_{ij}$  (1.6.8) wie folgt aufgebaut sind:

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{li,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}). \quad (1.12.87)$$

Aus dem Transformationsgesetz für den metrischen Tensor folgt durch direkte Rechnung das ebenfalls nichttensorielle Transformationsgesetz für die Christoffel-Symbole

$$\left\{ \begin{matrix} k' \\ i' \ j' \end{matrix} \right\} = A_k^{k'} A_{i'}^i A_{j'}^j \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} + A_{i',j'}^k A_k^{k'}. \quad (1.12.88)$$

Die beiden Zusatzglieder in (1.12.85) und (1.12.88) sind nun gerade so beschaffen, daß für die kovariante Ableitung (1.12.86) das tensorielle Transformationsgesetz

$$T'_{i';j'} = A_{i'}^i A_{j'}^j T_{i;j} \quad (1.12.89)$$

resultiert.

Die kovariante Ableitung (1.12.86) läßt sich auf Tensoren höherer Stufe verallgemeinern. Es treten dann so viele Glieder mit Christoffel-Symbolen auf, wie die Stufenzahl des Tensors ist.

Es zeigt sich, daß die kovariante Ableitung des metrischen Tensors identisch verschwindet:

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - \left\{ \begin{matrix} m \\ i \ k \end{matrix} \right\} g_{mj} - \left\{ \begin{matrix} m \\ j \ k \end{matrix} \right\} g_{im} = 0 \quad (1.12.90)$$

(Lemma von RICCI als Kennzeichen für die Metrizität der Geometrie).

## 1.13 Variationsrechnung

### 1.13.1 Problemstellung

Die Variationsrechnung mit ihrem großen Anwendungsgebiet insbesondere in der Mechanik und Feldtheorie ist in Weiterführung der im Abschnitt 1.7.1 behandelten Extremwertaufgabe entstanden. Statt die Extremwerte einer Funktion bei Variation der unabhängigen Variablen zu suchen, geht es hier im einfachsten Fall darum, die Extremwerte eines als Integral geschriebenen Funktionals bei Variation der Struktur der unter dem Integral stehenden unabhängigen Funktionen zu ermitteln.

Unter einem Funktional versteht man ganz allgemein eine Zahlengröße, der nach einer wohldefinierten Vorschrift Funktionen zugeordnet werden.

Hier sollen konkret die Funktionen  $Y_K(x_i) = Y_K(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $K = 1, 2, \dots, p$ ), die man Vergleichsfunktionen (Testfunktionen) nennt, dem nachfolgenden Integral zugeordnet werden. Dabei sind diese Funktionen  $Y_K$  so zu bestimmen, daß das Integral

$$I[Y_K] = \int_{V_n} F(Y_K(x_i), Y_{K,j}(x_i), Y_{K,j,l}(x_i), \dots, x_i) d^{(n)}x \quad (1.13.1)$$

( $d^{(n)}x = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ;  $Y_{K,j}, Y_{K,j,l}$  partielle Ableitungen mit Kommasymbolik) zu einem Extremum wird, wobei die zu variierenden Funktionen  $Y_K$  und deren partielle Ableitungen auf der Berandung des festen Integrationsbereiches  $V_n$  ( $V_n$  Oberfläche von  $V_n$ ) bestimmten Forderungen genügen müssen. Die auf diese Weise aus den Vergleichsfunktionen  $Y_K$  hervorgehenden Funktionen  $y_K$  nennt man Extremalfunktionen.

Man spricht von einem Variationsproblem  $k$ -ter Ordnung, wenn die vorgegebene und unverändert gelassene Grundfunktion  $F$ , die von den Funktionen  $Y_K(x_i)$ , deren partiellen Ableitungen  $Y_{K,j,\dots}(x_i)$  und explizit noch von den Koordinaten  $x_i$  abhängen kann, Ableitungen bis zur  $k$ -ten Ordnung enthält. In der Regel postuliert man als Randbedingungen bei einem Variationsproblem  $k$ -ter Ordnung, daß die gesuchten Funktionen und deren Ableitungen bis zur  $(k-1)$ -ten Ordnung auf der Berandung festgehalten werden. Bei einem Variationsproblem



1. Ordnung heißt das:

$$\begin{aligned} \text{a) } Y_K \Big|_{(V_n)} &= y_K \Big|_{(V_n)} = \text{const} && \text{bzw.} \\ \text{b) } \delta y_K \Big|_{(V_n)} &= 0 && \text{(Randbedingungen),} \end{aligned} \quad (1.13.2)$$

wobei die  $\delta y_K$  die Variationen 1. Ordnung der Funktionen  $y_K(x_i)$  sind, d. h.  $\delta y_K = Y_K - y_K$ .

In der Regel wird die Variationsaufgabe durch Zurückführung auf Differentialgleichungen gelöst. Im folgenden beschränken wir uns auf Variationsaufgaben 1. Ordnung.

### 1.13.2 1-dimensionales Variationsproblem für eine gesuchte Funktion

Zum besseren Verständnis der Grundaufgabe der Variationsrechnung wählen wir zunächst den 1-dimensionalen Fall mit nur einer gesuchten Funktion. Wir haben die Situation in Abb. 1.12 veranschaulicht. Die gestrichelten Kurven bedeuten die an den Endpunkten festgehaltenen Testfunktionen, die ausgezogene Kurve ist die gesuchte Extremalfunktion. Das Integral (1.13.1) schreibt sich in diesem Fall als

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(Y(x), Y'(x), x) dx \quad \left( Y' = \frac{dY}{dx} \right), \quad (1.13.3)$$

während die Randbedingungen (1.13.2) die Gestalt

$$\begin{aligned} \text{a) } Y(x_1) &= y(x_1) = \text{const}, && Y(x_0) = y(x_0) = \text{const} && \text{bzw.} \\ \text{b) } \delta y \Big|_{x_1} &= 0, && \delta y \Big|_{x_0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.13.4)$$

bekommen.

Die der Extremalfunktion  $y(x)$  benachbarte Vergleichsfunktion sei

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon \zeta(x) \quad (\varepsilon \text{ infinitesimaler Parameter}), \quad (1.13.5)$$

wobei wegen (1.13.4a)

$$\zeta(x_1) = \zeta(x_0) = 0 \quad (1.13.6)$$

gelten muß. Die Größe

$$\delta y(x) = Y(x) - y(x) = \varepsilon \zeta(x) \quad (1.13.7)$$

ist die Variation 1. Ordnung von  $y(x)$ . Gehen wir mit (1.13.5) in (1.13.3) ein, so erhalten wir ein Parameterintegral in  $\varepsilon$ , nämlich

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_{x_0}^{x_1} F(y + \varepsilon \zeta, y' + \varepsilon \zeta', x) dx \\ &\quad \left( y' = \frac{dy}{dx}, \zeta' = \frac{d\zeta}{dx} \right). \end{aligned} \quad (1.13.8)$$

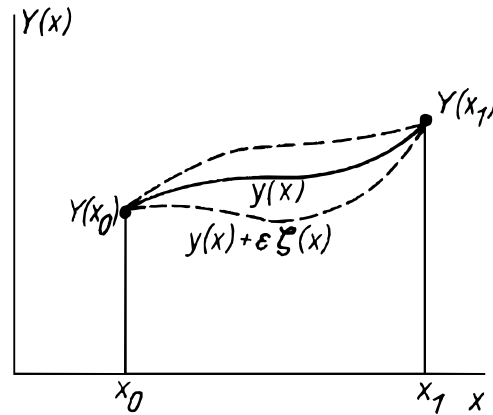


Abbildung 1.12: Veranschaulichung des Variationsproblems

Nach Voraussetzung wird die Vergleichsfunktion  $Y(x)$  für  $\varepsilon = 0$  zur Extremalfunktion  $y(x)$ . Die dargelegte Variationsaufgabe wird damit auf eine gewöhnliche Extremalaufgabe für  $I = I(\varepsilon)$  zurückgeführt. Notwendige Bedingung für das Extremalwerden von  $I(\varepsilon)$  ist

$$\left( \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0. \quad (1.13.9)$$

Durch Ableitung mit nachfolgender partieller Integration resultiert aus Gleichung (1.13.8)

$$\begin{aligned} \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial Y} \zeta + \frac{\partial F}{\partial Y'} \zeta' \right] dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial Y'} \right] \zeta dx + \left( \frac{\partial F}{\partial Y'} \zeta \right) \Big|_{x_0}^{x_1}. \end{aligned}$$

Wegen (1.13.6) verschwindet das letzte Glied, so daß bei Anwendung von (1.13.9) wegen der willkürlichen Wählbarkeit von  $\zeta(x)$  als notwendige Extremalbedingung das Verschwinden des eckigen Klammersausdrucks folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

denn für  $\varepsilon = 0$  ist  $Y = y$ .

Diese Gleichung, die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung heißt, ist in der Regel eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung in  $y(x)$ .

In der Feldtheorie bewährt sich die Benutzung der Variationsableitung

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}. \quad (1.13.10)$$

Dann entspricht der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung das Verschwinden der Variationsableitung:

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (1.13.11)$$

Die Größe

$$\delta I = \left( \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \varepsilon \quad (1.13.12)$$

heißt Variation 1. Ordnung des Integrals  $I(\varepsilon)$ . Sie stellt das lineare Glied der Taylor-Entwicklung von  $I(\varepsilon)$  nach  $\varepsilon$  dar.

Um nähere Aussagen über die Art des Extremums (Maximum oder Minimum) machen zu können, muß man die Ableitung 2. Ordnung von  $I(\varepsilon)$  bilden und die Formel (1.7.17) anwenden. Das führt zur Variation 2. Ordnung von  $I$ , die man durch

$$\delta^2 I = \left( \frac{d^2 I(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right)_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 \quad (1.13.13)$$

definiert. Es gilt als hinreichende Bedingung

$$\left( \frac{d^2 I(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right)_{\varepsilon=0} = \begin{cases} > 0 & \text{für ein Minimum,} \\ < 0 & \text{für ein Maximum.} \end{cases} \quad (1.13.14)$$

Aus der obigen Definition (1.13.7) der Variation folgt

$$d(\delta y) = \varepsilon d\zeta. \quad (1.13.15)$$

Weiter resultiert aus (1.13.5)

$$dY = dy + \varepsilon d\zeta. \quad (1.13.16)$$

Im Sinne der Definition (1.13.7) der Variation haben wir

$$\delta(dy) = dY - dy = \varepsilon d\zeta \quad (1.13.17)$$

zu schreiben, wobei wir (1.13.16) benutzen. Durch Vergleich mit (1.13.15) ergibt sich

$$d(\delta y) = \delta(dy). \quad (1.13.18)$$

Die Variation und Differentialbildung sind also vertauschbar.

Da die Koordinate  $x$  beim Variieren der Funktion unbeeinflusst bleibt, erhalten wir aus der letzten Gleichung auch

$$\text{a) } \frac{d}{dx}(\delta y) = \delta \left( \frac{dy}{dx} \right) \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } (\delta y)' = \delta y', \quad (1.13.19)$$

also die Vertauschbarkeit von Variation und Differentiation.

In Abb. 1.13 haben wir das Resultat (1.13.18) veranschaulicht. Daraus entnehmen wir die Gleichung

$$\delta y + d(y + \delta y) = dy + \delta(dy). \quad (1.13.20)$$

Da die Variation gemäß ihrer Definition (1.13.7) eine lineare Operation ist, also

$$\delta(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \delta y_1 + \beta \delta y_2 \quad (\alpha, \beta \text{ Konstanten}) \quad (1.13.21)$$

gilt, so erhalten wir aus (1.13.20)

$$\delta y + dy + d(\delta y) = dy + \delta y + \delta(dy),$$

d. h. auch auf diesem Weg (1.13.18).

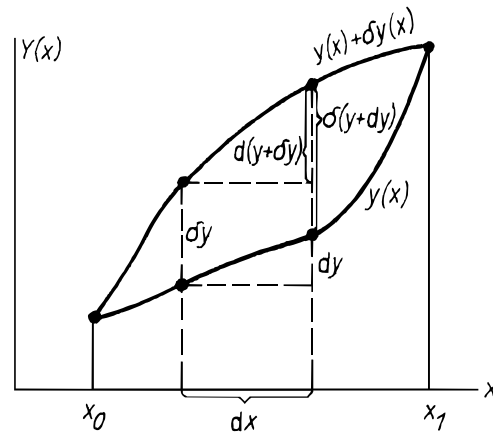


Abbildung 1.13: Veranschaulichung der Vertauschbarkeit von Differentiation und Variation

### 1.13.3 1-dimensionales Variationsproblem für mehrere gesuchte Funktionen

Dieser Fall ist insbesondere in der Punktmechanik realisiert, wo die gesuchten Funktionen die Massenpunkt-Koordinaten in Abhängigkeit von der Zeit sind ( $y_K(x) \rightarrow q_K(t)$ ).

Ohne Schwierigkeiten läßt sich der eben für eine gesuchte Funktion von einer Variablen durchgeführte Rechnungsgang auf mehrere gesuchte Funktionen  $\{y_K(x)\} = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)\}$  verallgemeinern. In einer etwas eleganteren Schreibweise ohne Benutzung des infinitesimalen Parameters  $\varepsilon$  wiederholen wir kurz die Ableitung der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung.

Statt von (1.13.3) haben wir also hier von

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(y_K(x), y'_K(x), x) dx \quad \left( y'_K = \frac{dy_K}{dx} \right) \quad (1.13.22)$$

auszugehen, wobei wir gleich die gesuchten Extremalfunktionen  $y_K$  in der Grundfunktion  $F$  geschrieben haben. Die Randbedingungen (1.13.4b) sind folgendermaßen zu verallgemeinern:

$$\delta y_K \Big|_{x_1} = \delta y_K \Big|_{x_0} = 0. \quad (1.13.23)$$

Die Variation einer Funktion  $G(y_1, y_2, \dots, y_p)$  von mehreren Variablen wird in Übertragung der Taylor-Entwicklung für Funktionen von mehreren Variablen wie folgt gebildet:

$$\delta G(y_1, y_2, \dots, y_p) = \sum_{K=1}^p \frac{\partial G}{\partial y_K} \delta y_K. \quad (1.13.24)$$

Da wegen der Linearität der Variation diese Operation mit der Integration (als Grenzfall einer Summierung) vertauscht werden kann, erhält man bei Beachtung von (1.13.19) aus (1.13.22)

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_0}^{x_1} \sum_{K=1}^p \left[ \frac{\partial F}{\partial y_K} \delta y_K + \frac{\partial F}{\partial y'_K} \delta y'_K \right] dx \\ &= \sum_{K=1}^p \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial y_K} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_K} \right) \delta y_K + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'_K} \delta y_K \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (1.13.25)$$

Die Integration über das letzte Glied kann ausgeführt werden. Wegen der Randbedingungen (1.13.23) verschwindet es.

Äquivalent zur Extremalbedingung (1.13.9) ist wegen (1.13.12) die Bedingung

$$\delta I = 0. \quad (1.13.26)$$

Es ist zweckmäßig, in Analogie zu (1.13.10) als Abkürzung die Variationsableitungen

$$\frac{\delta F}{\delta y_K} = \frac{\partial F}{\partial y_K} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_K} \quad (1.13.27)$$

einzuführen. Damit bekommt man dann aus (1.13.25) und (1.13.26)

$$\delta I = \sum_{K=1}^p \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta F}{\delta y_K} \delta y_K dx = 0. \quad (1.13.28)$$

Wegen der freien Wählbarkeit der voneinander unabhängigen Variationen  $\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_p$  kann man zunächst alle bis auf eine null setzen, so daß von der Summe in (1.13.28) nur ein einziges Glied übrig bleibt. Da diese nicht null gesetzte Variation im Integrationsgebiet beliebig gewählt werden kann, resultiert als notwendige Bedingung aus der Forderung des Verschwindens des Integrals das Verschwinden des Integranden, also das folgende System der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta y_K} = \frac{\partial F}{\partial y_K} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'_K} \right) &= 0 \\ (K = 1, 2, \dots, p), \end{aligned} \quad (1.13.29)$$

die in der Mechanik die Bedeutung von Bewegungsgleichungen erhalten.

### 1.13.4 Variationsproblem mit Nebenbedingungen

Wir knüpfen an das im vorigen Abschnitt behandelte Variationsproblem an:

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta I &= \delta \int_{x_0}^{x_1} F(y_K(x), y'_K(x), x) \, dx = 0 \quad \text{mit} \\ \text{b) } \delta y_K \Big|_{x_1} &= \delta y_K \Big|_{x_0} = 0, \end{aligned} \quad (1.13.30)$$

fordern dabei aber die Erfüllung der  $l$  Nebenbedingungen:

$$G_m(y_K(x), x) = G_m(y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x), x) = 0, \quad (m = 1, 2, \dots, l), \quad (1.13.31)$$

wobei die Zahl der Freiheitsgrade  $f = p - 1 > 0$  sein muß, damit die Freiheit der Variation gesichert ist.

Man löst diese Aufgabe am zweckmäßigsten, indem man die im Abschnitt 1.7.1 bei Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen besprochene Lagrangesche Multiplikatorenmethode sinngemäß überträgt: Die Nebenbedingungen (1.13.31) werden mit Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_m$  multipliziert und zur Grundfunktion  $F$  addiert:

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{x_0}^{x_1} \left[ F(y_K(x), y'_K(x), x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^l \lambda_m G_m(y_K(x), x) \right] dx = 0. \end{aligned} \quad (1.13.32)$$

Das dadurch entstehende Variationsproblem, bei dem die  $l$  Lagrange-Multiplikatoren gewissermaßen für die Wiederherstellung der früheren Zahl  $p$  der Freiheitsgrade sorgen, wird nun entsprechend Abschnitt 1.13.3 behandelt. Es folgt

$$\delta I = \sum_{K=1}^p \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\delta F}{\delta y_K} + \sum_{m=1}^l \lambda_m \frac{\partial G_m}{\partial y_K} \right] \delta y_K \, dx = 0 \quad (1.13.33)$$

und als notwendige Bedingung daraus weiter

$$\frac{\delta F}{\delta y_K} + \sum_{m=1}^l \lambda_m \frac{\partial G_m}{\partial y_K} = 0 \quad (K = 1, 2, \dots, p). \quad (1.13.34)$$

Die Schlußweise ist im einzelnen so: Man hat  $l$  Multiplikatoren  $\lambda_m$ , die man gerade so wählt, daß  $l$  Gleichungen von (1.13.34) gelten. Auf die Gültigkeit der übrigen  $f = p - 1$  Gleichungen kann man wegen der freien Wählbarkeit der  $f$  Variationen  $\delta y_K$  wie oben schließen.

### 1.13.5 $n$ -dimensionales Variationsproblem für mehrere gesuchte Funktionen

Dieser Typ von Variationsproblem tritt in der Feldtheorie auf, wo die gesuchten Funktionen die Feldfunktionen  $U_K(x^i)$  in Abhängigkeit von den Raum-Zeit-Koordinaten  $x^i$  sind ( $y_K(x_i) \rightarrow U_K(x^i)$ ).

In sinngemäßer Anknüpfung an (1.13.26) und (1.13.23) können wir die gestellte Variationsaufgabe wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta I &= \delta \int_{V_n} F(y_K(x_i), y_{K,j}(x_i), x_i) d^{(n)}x = 0 \quad \text{mit} \\ \text{b) } \delta y_K \Big|_{(V_n)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.13.35)$$

Zunächst berechnen wir die Variation des Integrals

$$\delta I = \int_{V_n} \sum_{K=1}^p \left[ \frac{\partial F}{\partial y_K} \delta y_K + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_{K,j}} \delta y_{K,j} \right] d^{(n)}x. \quad (1.13.36)$$

Die Vertauschbarkeit von Variation und partieller Ableitung ist auf der Basis derselben Überlegungen, die zur Herleitung von (1.13.19) angestellt wurden, zu beweisen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta y_K) &= \delta \left( \frac{\partial y_K}{\partial x_i} \right) \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } (\delta y_K)_{,i} &= \delta y_{K,i}. \end{aligned} \quad (1.13.37)$$

Damit können wir statt (1.13.35)

$$\begin{aligned} \delta I &= \sum_{K=1}^p \int_{V_n} \left[ \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_K} - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y_{K,j}} \right)_{,j} \right\} \delta y_K \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y_{K,j}} \delta y_K \right)_{,j} \right] d^{(n)}x \end{aligned} \quad (1.13.38)$$

schreiben.

Wir setzen nun voraus, daß in den benutzten Koordinaten, ähnlich wie im Dreidimensionalen auch im  $n$ -Dimensionalen, der Gaußsche Satz zur Umwandlung eines Volumintegrals mit einem divergenzartigen Ausdruck im Integranden in ein Oberflächenintegral gelten möge:

$$\int_{V_n} \sum_{j=1}^n A_{,j}^j d^{(n)}x = \int_{(V_n)} \sum_{j=1}^n A^j d\sigma_j \quad (1.13.39)$$

( $d\sigma_j$  Flächenelement).

Diese Forderung greift tief in topologische und Kovarianzfragen ein und kann hier nicht weiter verfolgt werden.

Dann läßt sich das letzte Glied von (1.13.38) wegen der Randbedingung (1.13.35b) zum Verschwinden bringen:

$$\begin{aligned} \int_{V_n} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{K=1}^p \frac{\partial F}{\partial y_{K,j}} \delta y_K \right)_{,j} d^{(n)}x \\ = \int_{(V_n)} \sum_{j=1}^n \sum_{K=1}^p \frac{\partial F}{\partial y_{K,j}} \delta y_K d\sigma_j = 0, \end{aligned} \quad (1.13.40)$$

da die Variationen auf der Oberfläche ( $V_n$ ) verschwinden.

In Analogie zu (1.13.27) definiert man nun die Variationsableitung wie folgt:

$$\frac{\delta F}{\delta y_K} = \frac{\partial F}{\partial y_K} - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y_{K,j}} \right)_{,j}. \quad (1.13.41)$$

Damit resultiert aus (1.13.38)

$$\delta I = \sum_{K=1}^p \int_{V_n} \frac{\delta F}{\delta y_K} \delta y_K d^{(n)}x = 0. \quad (1.13.42)$$

Als notwendige Extremalbedingung ergeben sich die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{\delta F}{\delta y_K} = \frac{\partial F}{\partial y_K} - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y_{K,j}} \right)_{,j} = 0, \quad (1.13.43)$$

die in der Feldtheorie die Bedeutung von Feldgleichungen erhalten.

## 1.14 Analytische Geometrie, Trigonometrie und Differentialgeometrie

### 1.14.1 Flächen 2. Grades

Bei Verwendung der kartesischen Koordinaten  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  nennt man die durch die Gleichung ( $A, B, \dots$  Konstanten)

$$\begin{aligned} A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\xi\eta + 2E\eta\zeta + 2F\zeta\xi \\ + 2G\xi + 2H\eta + 2K\zeta + L = 0 \end{aligned} \quad (1.14.1)$$

beschriebenen, im 3-dimensionalen Raum eingebetteten flächenhaften Gebilde Flächen 2. Grades. Man teilt diese in echte (Ellipsoid, ein- und zweischaliges Hyperboloid, elliptisches



und hyperbolisches Paraboloid) und durch Entartung entstehende unechte (Kegelfläche, Zylinderfläche, Ebenenpaare) Flächen 2. Grades ein.

Durch Translationen und Drehungen, womit wir uns im Abschnitt 1.12.4 über die Hauptachsentransformationen beschäftigten, erreicht man folgende Hauptachsen-Normalformen ( $x, y, z$  kartesische Koordinaten):

Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.14.2)$$

( $a, b, c$  Halbachsenabschnitte).

Einschaliges Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.14.3)$$

Zweischaliges Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (1.14.4)$$

Elliptisches Paraboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (1.14.5)$$

Hyperbolisches Paraboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (1.14.6)$$

Kegelfläche:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (1.14.7)$$

Elliptische Zylinderfläche:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.14.8)$$

Wir verzichten auf die bildliche Wiedergabe der geometrischen Figuren, sondern verweisen darauf, daß man die Veranschaulichung durch die Schnittlegungen  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  erleichtern kann, wodurch man zu Kurven 2. Grades gelangt.

### 1.14.2 Kurven 2. Grades (Kegelschnitte)

Kurven 2. Grades (Kegelschnitte) werden bei Verwendung der kartesischen Koordinaten  $\{\xi, \eta\}$  durch die Gleichung ( $\alpha, \beta, \dots$  Konstanten)

$$\alpha\xi^2 + 2\beta\xi\eta + \gamma\eta^2 + 2\delta\xi + 2\varepsilon\eta + F = 0 \quad (1.14.9)$$

wiedergegeben. Auch hier erreicht man durch Translationen und Drehungen die bekannten einprägsamen Formen der Kegelschnittgleichungen. Da Kegelschnitte in den verschiedensten Gebieten der Physik eine besonders wichtige Rolle spielen, wollen wir diesen Gegenstand etwas genauer untersuchen.

Die Beseitigung des gemischten Gliedes gelingt durch die Drehung (1.8.18a) um den Winkel  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= \xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi, & \text{bzw. } \text{b) } \xi &= x \cos \Phi - y \sin \Phi, \\ y &= -\xi \sin \Phi + \eta \cos \Phi & \eta &= x \sin \Phi + y \cos \Phi, \end{aligned} \quad (1.14.10)$$

wobei

$$\tan 2\Phi = \frac{2\beta}{\alpha - \gamma} \quad (1.14.11)$$

zu wählen ist. Im Falle  $\alpha = \gamma$  nimmt  $\Phi$  den Wert  $\Phi = \frac{\pi}{4}$  an. Führt man diese Transformation aus, so geht (1.14.9) über in

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1.14.12)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \alpha \cos^2 \Phi + 2\beta \sin \Phi \cos \Phi + \gamma \sin^2 \Phi, \\ \text{b) } C &= \alpha \sin^2 \Phi - 2\beta \sin \Phi \cos \Phi + \gamma \cos^2 \Phi, \\ \text{c) } D &= \delta \cos \Phi + \varepsilon \sin \Phi, \\ \text{d) } E &= \varepsilon \cos \Phi - \delta \sin \Phi. \end{aligned} \quad (1.14.13)$$

Die Beseitigung der linearen Glieder erfolgt durch die Translationen

$$\text{a) } x = \bar{x} - \frac{D}{A}, \quad \text{b) } y = \bar{y} - \frac{E}{C}. \quad (1.14.14)$$

Man erhält dann

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{F} = 0 \quad (1.14.15)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{A} &= A, & \text{b) } \bar{C} &= C, \\ \text{c) } \bar{F} &= F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C}. \end{aligned} \quad (1.14.16)$$

Damit ist das Ziel der Hauptachsentransformation, die konkret an diesem Beispiel durchgerechnet wurde, erreicht. In den Koordinaten  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$  liegt der Kegelschnitt in Hauptachsenform vor.

Eine Übersicht über die Art der durch (1.14.12) beschriebenen Kegelschnitte vermittelt die nachfolgende Zusammenstellung:

<u><math>AC \neq 0</math></u>		
$\bar{F} < 0$ :	$A > 0, C > 0$	Ellipse
	$A < 0, C < 0$	keine reelle Kurve
	$AC < 0$	Hyperbel
$\bar{F} = 0$ :	$AC > 0$	Punkt
	$AC < 0$	Paar sich schneidender Geraden
$\bar{F} > 0$ :	$A > 0, C > 0$	keine reelle Kurve
	$A < 0, C < 0$	Ellipse
	$AC < 0$	Hyperbel
(1.14.17)		
<u><math>AC = 0</math></u>		
$A = 0, C \neq 0$ :	$D \neq 0$	Parabel
	$D = 0$	Paar paralleler Geraden, die für $E^2 - FC = 0$ zusammenfallen
$A \neq 0, C = 0$ :	$E \neq 0$	Parabel
	$E = 0$	Paar paralleler Geraden, die für $D^2 - FA = 0$ zusammenfallen
$A = 0, C = 0$ :	$D \neq 0, E \neq 0$	Gerade
	$D = E = 0$	(Trivialfall).

Im folgenden geben wir die bekanntesten Spezialisierungen an.

#### **Scheitelfgleichungen für Ellipse, Hyperbel und Parabel**

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \quad (\text{Ellipse}), \quad (1.14.18)$$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \quad (\text{Hyperbel}), \quad (1.14.19)$$

$$y^2 = 2px \quad (\text{Parabel}). \quad (1.14.20)$$

Dabei sind  $p$  ein Parameter sowie  $a$  und  $b = \sqrt{ap}$  die Halbachsenabschnitte. Für den Brennstrahl der Parabel (Abstand zwischen Brennpunkt und Parabelpunkt) gilt

$$r = \frac{p}{2} + x. \quad (1.14.21)$$

#### **Hauptachsengleichung für Ellipse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.14.22)$$

Die lineare Exzentrizität  $e$  ist durch

$$e^2 = a^2 - b^2 > 0 \quad (b < a) \quad (1.14.23)$$

definiert, während

$$\varepsilon = \frac{e}{a} < 1 \quad (1.14.24)$$

numerische Exzentrizität heißt. Für die Brennstrahlen  $r_1$  und  $r_2$  (Abstände zwischen den Ellipsen-Brennpunkten und Ellipsenpunkten) gilt

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (1.14.25)$$

### **Hauptachsengleichung für die Hyperbel**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.14.26)$$

Ist  $a = b$ , so entsteht daraus die gleichseitige Hyperbel. Die Gleichung für die zu (1.14.26) konjugierte Hyperbel lautet:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (1.14.27)$$

Die lineare Exzentrizität  $e$  wird durch

$$e^2 = a^2 + b^2 \quad (1.14.28)$$

definiert, so daß für die numerische Exzentrizität

$$\varepsilon = \frac{e}{a} > 1 \quad (1.14.29)$$

gilt. Für die Brennstrahlen besteht die Beziehung

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (1.14.30)$$

Die Gleichung der Asymptoten der Hyperbel lautet:

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \quad (1.14.31)$$

Unter der Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel (um  $\frac{\pi}{4}$  gedrehte Hyperbel) versteht man die Gleichung

$$xy = \text{const}. \quad (1.14.32)$$

Dabei fungieren die Asymptoten als Koordinatenachsen.

**Ellipse, Hyperbel und Parabel in ebenen Polarkoordinaten  $\{R, \Phi\}$** 

Ellipse:

$$R^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \Phi} \quad (\text{Pol ist der Mittelpunkt}), \quad (1.14.33)$$

$$R = \frac{p}{1 \pm \varepsilon \cos \Phi} \quad (\text{Pol ist der Brennpunkt}). \quad (1.14.34)$$

Hyperbel:

$$R^2 = -\frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \Phi} \quad (\text{Pol ist der Mittelpunkt}), \quad (1.14.35)$$

$$R = \frac{p}{1 \pm \varepsilon \cos \Phi} \quad (\text{Pol ist der Brennpunkt}). \quad (1.14.36)$$

Parabel:

$$R = \frac{p}{1 \pm \cos \Phi} \quad (\text{Pol ist der Brennpunkt}). \quad (1.14.37)$$

**Ellipse und Hyperbel in Parameterdarstellung ( $\lambda$  Parameter)**

Ellipse:

$$x = a \cos \lambda, \quad y = b \sin \lambda. \quad (1.14.38)$$

Hyperbel:

$$x = a \cosh \lambda, \quad y = b \sinh \lambda. \quad (1.14.39)$$

**1.14.3 Einige spezielle Kurven**

Zykloide (Rollkurve):

$$x = b\lambda - c \sin \lambda, \quad y = b - c \cos \lambda \quad (b, c \text{ Konstanten, } \lambda \text{ Parameter}). \quad (1.14.40)$$

Katenoid (Kettenlinie):

$$y = h \cosh \frac{x}{h} \quad (h \text{ Konstante}). \quad (1.14.41)$$

Traktrix (Schleppkurve):

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{arcosh} \frac{a}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \\ &= a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \end{aligned} \quad (1.14.42)$$

( $a$  Konstante).

Archimedische Spirale:

$$R = a\Phi \quad (1.14.43)$$

( $a$  Konstante,  $R$  und  $\Phi$  ebene Polarkoordinaten).

Hyperbolische Spirale:

$$R = \frac{q}{\Phi}. \quad (1.14.44)$$

Logarithmische Spirale:

$$R = a e^{m\Phi} \quad (\text{Konstante } m > 0). \quad (1.14.45)$$

Bernoullische Lemniskate (Schleifenlinie):

$$\begin{aligned} \text{a) } (x^2 + y^2)^2 &= a^2(x^2 - y^2) \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } R^2 &= a^2 \cos(2\Phi). \end{aligned} \quad (1.14.46)$$

Kardioide (Herzlinie):

$$\begin{aligned} \text{a) } (x^2 + y^2 - 2ax)^2 &= 4a^2(x^2 + y^2) \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } R &= 2a(1 + \cos\Phi). \end{aligned} \quad (1.14.47)$$

Kartesisches Blatt:

$$\text{a) } x^3 + y^3 = 3axy \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } R = \frac{3a \sin\Phi \cos\Phi}{\sin^3\Phi + \cos^3\Phi}. \quad (1.14.48)$$

Astroide:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^{2/3} + y^{2/3} &= a^{2/3} \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } x &= a \cos^3\lambda, \quad y = a \sin^3\lambda. \end{aligned} \quad (1.14.49)$$

Cassinisches Oval:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4. \quad (1.14.50)$$

### 1.14.4 Sätze der ebenen Trigonometrie

Für ein ebenes Dreieck mit den Seiten  $a, b, c$  und den dazugehörigen gegenüberliegenden Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  gelten folgende Sätze:

Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \quad (1.14.51)$$

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha \quad \text{usw.} \quad (1.14.52)$$

Tangenssatz:

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{usw.} \quad (1.14.53)$$

Halbwinkelsatz:

$$\begin{aligned} \text{a) } \tan \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \text{usw. mit} \\ \text{b) } 2s &= a + b + c. \end{aligned} \quad (1.14.54)$$

### 1.14.5 Kurven mit Krümmung und Windung, Geodäte

#### a) Ebene Kurve

Die Krümmung  $\varkappa_E$  einer in der  $x$ - $y$ -Ebene gelegenen Kurve  $y = y(x)$  bzw. in Parameterdarstellung  $x = x(\lambda)$ ,  $y = y(\lambda)$  ( $\lambda$  Kurvenparameter) ist durch

$$\begin{aligned} \varkappa_E &= \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \\ &= \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{dx}{ds} - \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{dy}{ds} \end{aligned} \quad (1.14.55)$$

gegeben, wobei zur Abkürzung

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\lambda}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\lambda} \quad (1.14.56)$$

sowie

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (1.14.57)$$

verwendet wurde. Gemäß Definition kann die Krümmung positiv oder negativ sein oder verschwinden. Im Unterschied dazu soll der Krümmungsradius  $\varrho_E$  nur positiv-semidefinite Werte annehmen. Wir definieren ihn durch

$$\begin{aligned} \text{a) } \varrho_E &= \frac{1}{|\varkappa_E|}, \quad \text{d. h.} \\ \text{b) } |\varkappa_E| &= \frac{1}{\varrho_E} \quad (\text{Betrag der Krümmung}). \end{aligned} \quad (1.14.58)$$

Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte einer ebenen Kurve heißt Evolute.

#### b) Raumkurve im 3-dimensionalen Euklidischen Raum

Eine Raumkurve wird in Parameterform durch

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\lambda) \quad \text{bzw.} \\ \text{b) } x &= x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad z = z(\lambda) \end{aligned} \quad (1.14.59)$$

beschrieben. Der Einheitsvektor

$$\text{a) } \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \text{mit} \quad \text{b) } \mathbf{t}^2 = 1, \quad (1.14.60)$$

wobei im Dreidimensionalen

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (1.14.61)$$

gilt, heißt Tangentialvektor. In einem herausgegriffenen Punkt der Raumkurve zeigt er in Richtung der Tangente in diesem Punkt. Den Vektor

$$\boldsymbol{\varkappa} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \quad (1.14.62)$$

nennt man Krümmungsvektor. Sein Betrag ist durch

$$\begin{aligned} \varkappa = |\boldsymbol{\varkappa}| &= \frac{1}{\varrho} = \sqrt{\frac{d^2\mathbf{r} \cdot d^2\mathbf{r}}{ds^2 \cdot ds^2}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \end{aligned} \quad (1.14.63)$$

gegeben, wobei  $\varrho$  der Krümmungsradius ist. In Analogie zu (1.14.58b) nennen wir die Größe  $\varkappa$  Betrag der Krümmung der Raumkurve.

Der Hauptnormalenvektor wird nun durch

$$\mathbf{n} = \varrho \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \varrho \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \quad (1.14.64)$$

definiert. Er wird damit zu einem Einheitsvektor:

$$\mathbf{n}^2 = 1, \quad (1.14.65)$$

der auf dem Tangentialvektor senkrecht steht, denn aus (1.14.60b) folgt durch Differenzieren

$$\mathbf{t} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (1.14.66)$$

$$\mathbf{t}\mathbf{n} = 0. \quad (1.14.67)$$

Aus der Abb. 1.14 lesen wir

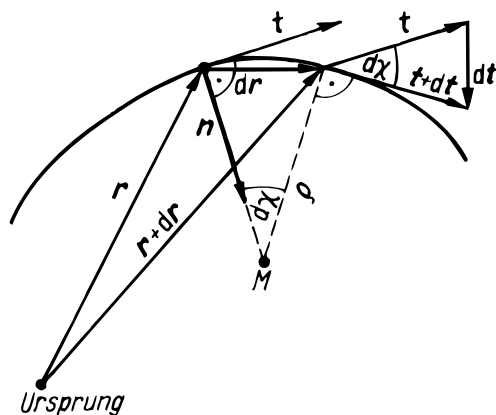
$$d\chi = \frac{ds}{\varrho} = \frac{|d\mathbf{r}|}{\varrho} > 0 \quad (1.14.68)$$

ab, wobei  $d\chi$  die Winkeländerung der Tangente beim Fortschreiten auf der Raumkurve ist. Damit ist auch hier  $\varrho$  anschaulich als Krümmungsradius interpretiert. Statt (1.14.64) können wir somit auch

$$\text{a) } \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{d\chi} \quad \text{mit} \quad \text{b) } (d\mathbf{t})^2 = (d\chi)^2 \quad (1.14.69)$$

schreiben.





**Abbildung 1.14:** Differentielle Änderungen des Ortsvektors und Tangentialvektors beim Fortschreiten auf einer Raumkurve

Multiplizieren wir nun (1.14.64) mit  $\mathbf{n}$  durch, so resultiert in kartesischen Koordinaten mit der Basis  $\{i, j, k\}$

$$|\kappa| = \sqrt{\mathbf{n} \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}} = \sqrt{(\mathbf{n}i) \frac{d^2 x}{ds^2} + (\mathbf{n}j) \frac{d^2 y}{ds^2} + (\mathbf{n}k) \frac{d^2 z}{ds^2}}. \quad (1.14.70)$$

Der Vergleich mit (1.14.63) führt auf

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{n}i &= \frac{d^2 x}{ds^2}, \\ \text{b) } \mathbf{n}j &= \frac{d^2 y}{ds^2}, \\ \text{c) } \mathbf{n}k &= \frac{d^2 z}{ds^2}. \end{aligned} \quad (1.14.71)$$

Der Binormalenvektor, der ebenfalls ein Einheitsvektor ist, wird definiert durch:

$$\text{a) } \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad \text{b) } \mathbf{b}^2 = 1. \quad (1.14.72)$$

Es bilden

- $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{b}$  die Normalebene,
- $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{n}$  die Schmiegebene,
- $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{b}$  die Rektifikationsebene.

Das die Kurve begleitende Dreibein wird durch die Vektoren  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  aufgespannt.

Aus (1.14.72a) folgt

$$\text{a) } \mathbf{b}\mathbf{t} = 0, \quad \text{b) } \mathbf{b}\mathbf{n} = 0, \quad (1.14.73)$$

während aus (1.14.72b)

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} \mathbf{b} = 0 \quad (1.14.74)$$

hervorgeht. Aus (1.14.73a) gewinnen wir durch Differenzieren sowie vermöge (1.4.64) und (1.4.73b)

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} \mathbf{t} = -\mathbf{b} \frac{dt}{ds} = -\frac{(\mathbf{b}\mathbf{n})}{\varrho} = 0. \quad (1.14.75)$$

Der Vektor  $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$  steht also auf  $\mathbf{b}$  und auf  $\mathbf{t}$  senkrecht. Er kann deshalb nur die Richtung von  $\mathbf{n}$  haben. Wir können deshalb

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (1.14.76)$$

setzen, wobei der Faktor  $\tau$  Windung (Torsion) heißt.

Für in einer Ebene gelegene Kurven ist gemäß (1.14.72a)  $\mathbf{b}$  jeweils ein konstanter Einheitsvektor, so daß wegen (1.14.76) die Windung ebener Kurven verschwindet.

Die Vektoren  $\mathbf{n}$  und damit auch  $\mathbf{b}$  ändern ihre Richtung, wenn die Krümmung der Kurve ihr Vorzeichen ändert. In kartesischen Koordinaten resultiert aus (1.14.72) mittels (1.14.64) und (1.14.60a)

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{b}}{\varrho} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{dy}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{dz}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \right) \\ &\quad + \mathbf{k} \left( \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right). \end{aligned} \quad (1.14.77)$$

Durch Betragsbildung folgt daraus vermöge (1.14.63)

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho} \quad (1.14.78)$$

$$= \sqrt{\left( \frac{dy}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2}.$$

Mittels (1.14.66), wofür man auch

$$\frac{d^2x}{ds^2} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} \frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{ds^2} \frac{dz}{ds} = 0 \quad (1.14.79)$$

schreiben kann, läßt sich dann die Gleichheit der in (1.14.63) und (1.14.78) auftretenden Wurzelausdrücke zeigen.

Die Form (1.14.78) besitzt den Vorteil, daß sie für ebene Kurven ( $z = 0$ ) mit (1.14.55) korrespondiert:  $|\varkappa_E| = \varkappa$ .

Weiter ist in diesem Fall einer ebenen Kurve

$$\mathbf{n} = \pm \mathbf{k} \times \mathbf{t}, \quad (1.14.80)$$

wobei das obere bzw. untere Vorzeichen positiver bzw. negativer Krümmung entspricht. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{n}i &= \mp \mathbf{t}j = \mp \frac{dy}{ds}, \\ \text{b) } \mathbf{n}j &= \pm \mathbf{t}i = \pm \frac{dx}{ds}, \\ \text{c) } \mathbf{n}k &= 0, \end{aligned} \quad (1.14.81)$$

so daß bei Verwendung von (1.14.71)

$$\text{a) } \varrho \frac{d^2x}{ds^2} = \mp \frac{dy}{ds}, \quad \text{b) } \varrho \frac{d^2y}{ds^2} = \pm \frac{dx}{ds} \quad (1.14.82)$$

zu stehen kommt.

Zur Raumkurve zurückkehrend, halten wir fest: Die Ableitung des Tangentialvektors und des Binormalenvektors ist den Formeln (1.14.64) und (1.14.76) zu entnehmen. Ähnlich läßt sich durch noch weiter ausholende Überlegungen eine Formel für die Ableitung des Normalenvektors gewinnen.

Zusammengefaßt schreiben sich diese Ableitungsformeln, die Frenet-Formeln heißen, folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \frac{1}{\varrho} \mathbf{n}, \\ \text{b) } \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\frac{1}{\varrho} \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \\ \text{c) } \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.14.83)$$

Es gilt das Theorem, daß Krümmung und Windung eine Raumkurve bis auf starre Bewegungen eindeutig bestimmen.

### c) Raumkurve im $n$ -dimensionalen Raum

In Analogie zu (1.14.60) und (1.14.62) definiert man im  $n$ -dimensionalen Raum den Tangentialvektor durch

$$\text{a) } \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{s}}{ds} = \mathbf{e}_i \frac{dx^i}{ds} \quad \text{mit} \quad \text{b) } \mathbf{t}^2 = 1 \quad (1.14.84)$$

und den Krümmungsvektor durch

$$\varkappa = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{s}}{ds^2}. \quad (1.14.85)$$

Aus (1.14.84) folgt

$$t\kappa = 0, \quad (1.14.86)$$

d. h., der Krümmungsvektor steht auf dem Tangentialvektor senkrecht. Der Betrag der Krümmung der Raumkurve ist in Analogie zu (1.14.63) durch

$$\kappa = |\kappa| = \frac{1}{\varrho} = \sqrt{\frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds}} \quad (\varrho \text{ Krümmungsradius}) \quad (1.14.87)$$

gegeben.

Die weiteren Zusammenhänge wollen wir nicht verfolgen. Vielmehr wenden wir uns jetzt der Behandlung der Geodäten zu.

#### d) Geodäte

Im Euklidischen Raum verläuft die kürzeste Verbindung zwischen zwei festen Punkten längs einer durch diese Punkte gehenden Geraden. Im Riemannschen Raum existieren wegen der vorliegenden Krümmung keine Geraden (man denke zur Veranschaulichung dieser Situation etwa an eine gekrümmte 2-dimensionale Fläche, z. B. eine Kugelfläche). Deshalb ist im Riemannschen Raum auch die Einführung geradliniger Koordinaten nicht möglich. Die Frage nach der kürzesten Linie zwischen zwei festen Punkten  $P_0$  und  $P_1$  im Riemannschen Raum wird mittels folgender Variationsaufgabe für die Bogenlänge behandelt (1.6.26):

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} ds = 0. \quad (1.14.88)$$

Dabei werden alle zwischen den festen Punkten  $P_0$  und  $P_1$  verlaufenden Kurven im Sinne einer Extremalaufgabe zur Konkurrenz zugelassen, d. h., die Kurven werden variiert:  $x^i \rightarrow x^i + \delta x^i$ . In den festen Punkten selbst werden keine Variationen der Kurven vorgenommen:

$$\delta x^i \Big|_{P_1} = \delta x^i \Big|_{P_0} = 0. \quad (1.14.89)$$

Die Durchführung dieser Variationsaufgabe führt auf die Geodäten-Gleichung als notwendige Bedingung für die Extremalaufgabe (1.14.88):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (1.14.90)$$

die eine Differentialgleichung zur Ermittlung der gesuchten Kürzesten ist. Dabei sind die Größen  $\left\{ \begin{matrix} i \\ j k \end{matrix} \right\}$  die in (1.12.87) eingeführten Christoffel-Symbole.

Der Begriff der Geodäten ist allgemeiner als der der Kürzesten. Zum Beispiel ist auf einer Kugel die durch zwei herausgegriffene Punkte gehende Geodäte durch den Großkreis bestimmt, der in einen kürzesten und einen längsten Großkreisbogen zerfällt.

### 1.14.6 Gekrümmte 2-dimensionale Flächen

Im folgenden knüpfen wir an die Darlegungen im Abschnitt 1.7.2 an. Eine 2-dimensionale Fläche wird durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x, y, z) &= 0 && \text{(implizite Form) bzw.} \\ \text{b) } z &= z(x, y) && \text{(explizite Form)} \end{aligned} \quad (1.14.91)$$

oder durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) && \text{bzw.} \\ \text{b) } \mathbf{r} &= \mathbf{r}(u, v) \end{aligned} \quad (1.14.92)$$

definiert. Dabei sind  $u$  und  $v$  die Gaußschen Parameter. Auf der Fläche liegen die Kurvenscharen  $u = \text{const}$  ( $v$ -Kurven) und  $v = \text{const}$  ( $u$ -Kurven). Die Tangentenvektoren dieser Kurven sind durch

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_u &= \frac{d\mathbf{r}}{du} = \mathbf{e}_u, & \mathbf{t}_v &= \frac{d\mathbf{r}}{dv} = \mathbf{e}_v \\ & (\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v \text{ Basisvektoren}) \end{aligned} \quad (1.14.93)$$

gegeben. Daraus wird der Flächennormalenvektor

$$\text{a) } \mathbf{n}_\sigma = \frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v|} \quad \text{mit} \quad \text{b) } n_\sigma^2 = 1 \quad (1.14.94)$$

definiert, der auf der Fläche senkrecht steht.

Als Erste Grundform der Fläche, bezogen auf eine in der Fläche gelegene Kurve  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(\lambda), v(\lambda))$  erhielten wir früher (1.7.40)

$$(ds)^2 = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 \quad (1.14.95)$$

mit

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = (\mathbf{e}_u)^2 = (\mathbf{t}_u)^2, \\ F &= g_{12} = \mathbf{e}_u \mathbf{e}_v = \mathbf{t}_u \mathbf{t}_v, \\ G &= g_{22} = (\mathbf{e}_v)^2 = (\mathbf{t}_v)^2. \end{aligned} \quad (1.14.96)$$

Das Skalarprodukt aus dem Krümmungsvektor (1.14.62) der Kurve und dem Flächennormalenvektor liefert die Normalkrümmung  $\varkappa_n$ , die die Zweite Grundform der Fläche darstellt:

$$\begin{aligned} \varkappa_n &= \mathbf{n}_\sigma \varkappa = \mathbf{n}_\sigma \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \\ &= L \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left( \frac{dv}{ds} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.14.97)$$

Dabei bedeuten

$$L = \mathbf{n}_\sigma \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \quad M = \mathbf{n}_\sigma \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}, \quad N = \mathbf{n}_\sigma \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} \quad (1.14.98)$$

die Gaußschen Fundamentalgrößen 2. Ordnung.

Bezeichnet man den Winkel zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{n}_\sigma$  mit  $\Theta$  so kann man mittels (1.14.62) und (1.14.83a) auch

$$\varkappa_n = \frac{\cos \Theta}{\varrho} \quad (1.14.99)$$

schreiben.

Unter der Gaußschen Krümmung einer Fläche versteht man die Größe

$$\varkappa_G = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (1.14.100)$$

Da bei definiter Metrik ( $(ds)^2 > 0$ )  $EG - F^2 > 0$  ist, wird in lokaler Betrachtungsweise für

- a)  $LN - M^2 > 0$   
(elliptische Fläche)  $\varkappa_G > 0$ ,
  - b)  $LN - M^2 = 0$   
(parabolische Fläche)  $\varkappa_G = 0$ ,
  - c)  $LN - M^2 < 0$   
(hyperbolische Fläche)  $\varkappa_G < 0$ .
- (1.14.101)

Das Theorema egregium von GAUSS sagt aus, daß die Gaußsche Krümmung bei isometrischen (längentreuen) Abbildungen (Verbiegungen) unverändert bleibt.

Fragt man nun nach Flächenkurven, für die die Normalkrümmung (1.14.97) extremal wird, so gelangt man zu zwei aufeinander senkrecht stehenden Hauptkrümmungskurven mit den beiden Hauptkrümmungen  $\varkappa_I$  und  $\varkappa_{II}$  denen die beiden Hauptkrümmungsradien  $\varrho_I = \frac{1}{\varkappa_I}$  und  $\varrho_{II} = \frac{1}{\varkappa_{II}}$  zugeordnet sind. Es gilt für die Gaußsche Krümmung

$$\varkappa_G = \varkappa_I \varkappa_{II}. \quad (1.14.102)$$

Die Größe

$$\bar{\varkappa} = \frac{1}{2}(\varkappa_I + \varkappa_{II}) = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \quad (1.14.103)$$

heißt mittlere Gaußsche Krümmung.

### 1.14.7 Gekrümmter $n$ -dimensionaler Raum

Die weitere Behandlung des  $n$ -dimensionalen Raumes, der unter Hinzunahme des Abstandsbegriffes (1.6.26) zu einem metrischen Raum wird, erfolgt in Verallgemeinerung der Theorie 2-dimensionaler Flächen unter Benutzung des Tensorkalküls. Dadurch wird von vornherein die Invarianzsituation hinsichtlich Koordinatentransformationen bzw. Abbildungen durchsichtig. Wir können hier nur die unter dem Aspekt der Allgemeinen Relativitätstheorie wichtigsten Erkenntnisse wiedergeben.

Im Abschnitt 1.12.5 gewannen wir die Einsicht, daß die Christoffel-Symbole, die aus den ersten Ableitungen des metrischen Tensors aufgebaut sind, keine Tensoren sind. Es gelingt nun, mittels der zweiten Ableitungen des metrischen Tensors wieder einen Tensor zu konstruieren. Es handelt sich dabei um den Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor

$$R_{klm}^p = \left\{ \begin{matrix} p \\ k \ m \end{matrix} \right\}_{,i} - \left\{ \begin{matrix} p \\ k \ l \end{matrix} \right\}_{,m} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k \ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ i \ l \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ k \ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ i \ m \end{matrix} \right\}, \quad (1.14.104)$$

auf den man durch Antisymmetrisierung der zweiten kovarianten Ableitungen eines Tensors 1. Stufe stößt:

$$T_{k;m;l} - T_{k;l;m} = T_p R_{kml}^p. \quad (1.14.105)$$

Das Nichtverschwinden des Krümmungstensors (1.14.104) bedeutet, daß der betrachtete Raum Riemannsche Geometrie besitzt, also ein Raum mit Krümmung ist. In einem solchen Raum sind also die zweiten kovarianten Ableitungen nicht vertauschbar. Besonderheiten eines solchen Raumes mit Krümmung sind u. a., daß das Ergebnis der Parallelverschiebung eines Vektors über endliche Entfernungen vom Weg abhängig wird oder daß die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck nicht mehr gleich  $\pi$  ist.

Durch Verjüngung bekommt man aus dem Krümmungstensor den Ricci-Tensor.

$$R_{kl} = R_{klp}^p \quad (1.14.106)$$

und daraus durch nochmalige Verjüngung die Krümmungsinvariante

$$R = R_k^k. \quad (1.14.107)$$

Der Krümmungstensor besitzt die folgenden Symmetrieeigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{a) } R_{pklm} &= -R_{pkml}, \\ \text{b) } R_{pklm} &= -R_{kplm}, \\ \text{c) } R_{pklm} &= R_{lmpk}, \\ \text{d) } R_{p\langle klm \rangle} &= R_{pklm} + R_{pmkl} + R_{plmk} = 0. \end{aligned} \quad (1.14.108)$$

Dabei bedeutet das Zeichen  $\langle \rangle$  die in Formel (1.14.108d) ausgeführte Zyklusbildung. Außerdem befriedigt der Krümmungstensor die Bianchi-Identität

$$[R_{jmsp;i}]_{\langle sp i \rangle} = 0, \quad (1.14.109)$$

aus der durch Verjüngung die für die Begründung der Einsteinschen Feldgleichung der Gravitation wichtige Relation

$$\left( R^{mi} - \frac{1}{2} R g^{mi} \right)_{;i} = 0 \quad (1.14.110)$$

hervorgeht.

Denkt man sich diese  $n$ -dimensionale Theorie auf eine 2-dimensionale Fläche spezialisiert, so findet man für die einzige nichtverschwindende Komponente des Krümmungstensors mittels (1.14.100) den Zusammenhang ( $A, B = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} R_{1212} &= LN - M^2 = \varkappa_G (EG - F^2) \\ &= \varkappa_G \det(g_{AB}). \end{aligned} \quad (1.14.111)$$

## 1.15 Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 1.15.1 Kombinatorik

Die Statistik und Stochastik haben in der Physik laufend an Bedeutung gewonnen. Deshalb sollen im folgenden die wichtigsten mathematischen Grundbegriffe dargelegt werden.

#### a) Permutationen

##### *Permutationen ohne Wiederholung*

Die Zusammenstellung einer Anzahl von Elementen (z. B. durchnummerierte Baukastensteine) in einer beliebigen Reihenfolge nennt man eine Komplexion.  $N$  verschiedene Elemente lassen

$$P = N! \quad (1.15.1)$$

verschiedene Permutationen (Anordnungen) zu. Die Vertauschung zweier Elemente heißt Transposition. Eine Permutation heißt gerade bzw. ungerade, wenn man durch eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Transpositionen die Ausgangsreihenfolge (Normalkomplexion) erreicht. Zwei Elemente bilden eine Inversion, wenn sie gegenüber der Normalkomplexion in umgekehrter Reihenfolge stehen. Die Anzahl der Inversionen in einer Komplexion heißt Inversionszahl  $I$ . Die Transposition zweier Nebenelemente ändert die Inversionszahl einer Komplexion um  $\pm 1$ . In der inversen Komplexion sind alle Elemente invers angeordnet. Die Inversionszahl ist für sie  $I = \binom{N}{2}$ .

##### *Permutationen mit Wiederholung*

Wenn nun von den  $N$  Elementen jeweils  $N_1, N_2, \dots, N_m$  Elemente gleich gemacht werden, so daß dadurch die Sorte 1, Sorte 2,  $\dots$ , Sorte  $m$  von Elementen entsteht, so wird die Anzahl der verschiedenen Permutationen reduziert, da die Permutation der Elemente einer Sorte



untereinander keine neue Permutation ergibt. Aus (1.15.1) entsteht dann die Anzahl der Permutationen mit Wiederholung

$$P^{(W)} = \frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_m!} \quad (1.15.2)$$

$$(N = N_1 + N_2 + \dots + N_m).$$

## b) Variationen

### *Variationen ohne Wiederholung*

Eine Variation  $k$ -ter Klasse ist eine Zusammenstellung von  $k$  Elementen in bestimmter Reihenfolge, entnommen aus  $N$  vorgegebenen Elementen ( $k < N$ ). Es sind demnach  $k$  Plätze unter Verwendung von  $N$  Elementen zu besetzen.

Die Anzahl der Variationen resultiert aus folgender Überlegung: Zur Besetzung des 1. Platzes stehen  $N$  Elemente zur Verfügung, zur Besetzung des 2. Platzes nur noch  $(N - 1)$  Elemente, usw.; zur Besetzung des  $k$ -ten Platzes nur noch  $(N - k + 1)$  Elemente, so daß sich die Anzahl der Variationen zu

$$V_k(N) = N(N - 1) \dots (N - k + 1) = \frac{N!}{(N - k)!} \quad (1.15.3)$$

ergibt.

### *Variationen mit Wiederholung*

Bei dieser Art von Variationen kann jedes der  $N$  Elemente wiederholt, also bis zu  $k$ -mal benutzt werden, so daß für die Besetzung jedes Platzes  $N$  Elemente zur Verfügung stehen. Somit ergibt sich die Anzahl der Variationen mit Wiederholung zu

$$V_k^{(W)}(N) = N \cdot N \cdot \dots \cdot N = N^k. \quad (1.15.4)$$

## c) Kombinationen

### *Kombinationen ohne Wiederholung*

Die Kombinationen unterscheiden sich von den Variationen dadurch, daß keine Rücksicht auf die Reihenfolge der Elemente in der herausgegriffenen Zusammenstellung genommen wird. Deshalb bilden  $k!$  Variationen jeweils eine Kombination, so daß aus (1.15.3)

$$C_k(N) = \frac{1}{k!} V_k(N) = \frac{N!}{k!(N - k)!} = \binom{N}{k} \quad (1.15.5)$$

entsteht.

**Kombinationen mit Wiederholung**

Läßt man die wiederholte Benutzung der  $N$  Elemente zu, so gelangt man zur Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung

$$C_k^{(w)}(N) = \binom{N+k-1}{k}. \quad (1.15.6)$$

**1.15.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung****a) Wahrscheinlichkeiten**

B. PASCAL (1623–1662) und P. DE FERMAT (1601–1665) waren die ersten, die sich, ange-regt durch Glücksspiele, ernsthaft mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung befaßten. Sie erkann-ten, daß auch die zufälligen Erscheinungen, die selbst Glieder einer jeweiligen Kausalket-te sind, durchaus faßbaren Gesetzmäßigkeiten unterliegen. Durch die schnelle Entwicklung von Naturwissenschaft und Technik wurde später die Weiterentwicklung der Wahrscheinlich-keitsrechnung zur Wahrscheinlichkeitstheorie eine dringende Notwendigkeit. Die axiomati-sche Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie, worauf hier nicht näher eingegangen wer-den kann, verdankt man insbesondere A. N. KOLMOGOROV.

Unter bestimmten Bedingungen kann ein Ereignis sicher, unmöglich oder zufällig (Mög-lichkeit des Eintretens oder Nichteintretens) geschehen. Tritt bei einer unter gleichen Bedin-gungen durchgeführten Versuchsreihe von  $N$  Versuchen ein Ereignis  $E$   $\nu$ -mal ein, so nennt man

$$h(E) = \frac{\nu}{N} \leq 1 \quad (1.15.7)$$

die relative Häufigkeit des Ereignisses  $E$  (Verhältnis der Anzahl der günstigen zur Anzahl der möglichen Fälle).

Wird nun eine Serie von Versuchsreihen von jeweils  $N$  Versuchen durchgeführt, so schwanken die relativen Häufigkeiten um einen festen Wert. Diese Schwankungen werden immer kleiner, je größer die Anzahl  $N$  der Versuche ist. Für  $N \rightarrow \infty$  strebt die relative Häu-figkeit gegen einen festen Wert, der (statistische) Wahrscheinlichkeit  $p(E)$  des Ereignisses  $E$  heißt. Offensichtlich gilt  $0 \leq p(E) \leq 1$ .

Eine Wahrscheinlichkeit  $p(E)$ , die sich auf feste, reproduzierbare Bedingungen bezieht, nennt man eine unbedingte Wahrscheinlichkeit.

Dagegen hat man es mit einer bedingten Wahrscheinlichkeit  $p(E/F)$  zu tun, wenn hin-sichtlich des Eintretens eines Ereignisses  $E$  ein anderes (eventuell schon eingetretenes) Er-eynis  $F$  berücksichtigt werden muß, wenn sich also die Bedingungen durch das Ereignis  $F$  verändern können (z. B. Kopplung von ungeraden Zahlen und Primzahlen beim Wurf eines Würfels, Kopplung von Gewicht und Farbe von Gegenständen).

Ereignisse heißen disjunkt (unvereinbar, einander ausschließend), wenn bei einem Versuch nur eines von ihnen eintreten kann.

Ereignisse nennt man unabhängig, wenn das Eintreten oder Nichteintreten des einen Er-eynisses das Eintreten oder Nichteintreten der anderen Ereignisse nicht beeinflußt.

**Additionsgesetz**

Liegen zwei disjunkte Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $p(E_1)$  und  $p(E_2)$  vor, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von  $E_1$  oder  $E_2$  (entweder  $E_1$  oder  $E_2$ ) durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten  $p(E_1)$  und  $p(E_2)$  gegeben:

$$p(E_1 \text{ oder } E_2) = p(E_1) + p(E_2). \quad (1.15.8)$$

Verallgemeinernd auf  $k$  unvereinbare Ereignisse, kann man

$$\begin{aligned} p(E_1 \text{ oder } E_2 \text{ oder } \dots \text{ oder } E_k) \\ = p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_k) \end{aligned} \quad (1.15.9)$$

schreiben.

Die disjunkten Ereignisse  $E_1, E_2, \dots, E_k$  bilden ein vollständiges System von Ereignissen, wenn

$$\begin{aligned} p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_k) = 1 \\ \text{(Eins-Normierung)} \end{aligned} \quad (1.15.10)$$

ist.

**Multiplikationsgesetz**

Liegen zwei unabhängige Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $p(E_1)$  und  $p(E_2)$  vor, so ist die Wahrscheinlichkeit für das simultane Eintreten von  $E_1$  und  $E_2$  (sowohl  $E_1$  als auch  $E_2$ ) durch das Produkt der Wahrscheinlichkeiten  $p(E_1)$  und  $p(E_2)$  gegeben:

$$p(E_1 \text{ und } E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2). \quad (1.15.11)$$

Bei Verallgemeinerung auf  $k$  unabhängige Ereignisse entsteht

$$\begin{aligned} p(E_1 \text{ und } E_2 \text{ und } \dots \text{ und } E_k) \\ = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot \dots \cdot p(E_k). \end{aligned} \quad (1.15.12)$$

**Wahrscheinlichkeitsverteilung**

Eine Größe  $X$  heißt Zufallsgröße, wenn sie bei verschiedenen, unter gleichen Bedingungen ablaufenden Versuchen verschiedene Merkmalswerte  $x$  annehmen kann, die diskret (diskrete Zufallsgröße) oder kontinuierlich (kontinuierliche Zufallsgröße) sein können, und wenn die Wahrscheinlichkeiten  $p_x$  für das Auftreten dieser Werte bekannt sind.

Das Verteilungsgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen den Merkmalswerten und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Dabei werden in einer Diagrammdarstellung im Falle diskreter Zufallsgrößen die diskreten Merkmalswerte  $x_i$  auf der Abszisse und die zugehörigen diskreten Wahrscheinlichkeiten  $p_{x_i}$  auf der Ordinate aufgetragen.

Im Falle kontinuierlicher Zufallsgrößen liegt eine kontinuierliche Verteilung der Merkmalswerte  $x$  auf der Abszisse vor. Deshalb muß auf der Ordinate die Wahrscheinlichkeitsdichte (Gewichtsfunktion)  $f(x) \geq 0$  aufgetragen werden, da jedem der dicht liegenden Merkmalswerte  $x$  die Wahrscheinlichkeit null zugeordnet ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

die Zufallsgröße  $X$  einen Merkmalswert im Intervall  $(x, x + dx)$  annimmt, ist dann  $f(x) dx$ , wobei im Sinne von (1.15.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{Eins-Normierung}) \quad (1.15.13)$$

gelten muß.

Das unbestimmte Integral

$$\text{a) } F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \quad \text{mit} \quad (1.15.14)$$

$$\text{b) } F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$$

heißt Verteilungsfunktion für die kontinuierliche Zufallsgröße  $X$ .

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Merkmalswert  $x$  der Zufallsgröße  $X$  im Intervall  $(x_1, x_2)$  liegt, ist somit

$$p_{(x_1, x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} f(\xi) d\xi. \quad (1.15.15)$$

## b) Mittelwert, Schwankung, Varianz und Streuung

### *Mittelwert und Schwankung*

In den Formeln (1.1.7) lernten wir bereits verschiedene Möglichkeiten der Mittelwertbildung kennen. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird vorwiegend auf das arithmetische Mittel (1.1.7a) Bezug genommen. Wir gehen dabei von dem Fall aus, daß die Werte  $a_i$   $\nu_i$ -mal ( $\nu_i = 1, 2, \dots, N$ ) auftreten können ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Dann schreibt sich (1.1.7a) als

$$\text{a) } A(a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{i=1}^k \frac{\nu_i}{N} a_i \quad \text{mit} \quad (1.15.16)$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^k \nu_i = N.$$

Da für  $N \rightarrow \infty$  die Größe  $\frac{\nu_i}{N} \rightarrow p_i$  (Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Wertes  $a_i$ ) geht, lautet die Umsetzung von (1.15.16) in die Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$\text{a) } A = \sum_{i=1}^k p_i a_i \quad \text{mit} \quad \text{b) } \sum_{i=1}^k p_i = 1. \quad (1.15.17)$$

Die Anwendung dieser Formel auf eine diskrete Zufallsgröße  $x_i$  führt zur Definition des Mittelwertes (Erwartungswert bei einer Reihe von Messungen in der Quantentheorie)

$$\text{a) } \mu = \bar{x} = \sum_{i=1}^k p_i x_i \quad \text{mit} \quad \text{b) } \sum_{i=1}^k p_i = 1, \quad (1.15.18)$$

während für eine kontinuierliche Zufallsgröße  $x$  sinngemäß

$$\text{a) } \mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x \, dx \quad \text{mit} \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1 \quad (1.15.19)$$

zu stehen kommt ( $A \rightarrow \mu$ ). Aus diesen Definitionen liest man ab, daß der Mittelwert der Summe zweier unabhängiger Zufallsgrößen gleich der Summe der Mittelwerte der beiden Zufallsgrößen ist. Die Abweichungsgrößen

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta x_i &= x_i - \bar{x} && \text{bzw.} \\ \text{b) } \Delta x &= x - \bar{x} && \text{mit} \\ \text{c) } \overline{\Delta x_i} &= 0 && \text{bzw.} \quad \overline{\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad (1.15.20)$$

heißen Schwankungen.

### Varianz und Streuung

Neben dem Mittelwert ist die Varianz (mittlere quadratische Schwankung oder mittleres Schwankungsquadrat), die ein gewisses Maß für die Größe der Abweichung vom Mittelwert ist, ein weiterer wichtiger Begriff. Man versteht unter der Varianz einer diskreten bzw. kontinuierlichen Zufallsgröße den Ausdruck

$$\begin{aligned} \text{a) } \sigma^2 &= \sum_{i=1}^k p_i (x_i - \bar{x})^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \geq 0 && \text{bzw.} \\ \text{b) } \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - \bar{x})^2 \, dx = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.15.21)$$

Die Wurzel aus der Varianz, nämlich  $\sigma = \sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2}}$  heißt Streuung (mittlere Abweichung, Standardabweichung). Die Begriffsbildung ist in der Literatur nicht einheitlich.

### Tschebyschewsche Ungleichung

Diese Ungleichung gilt für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Betrag  $|x - \bar{x}|$  größer oder gleich einer beliebigen Zahl  $x_0 > 0$  ist:

$$p \{ |x - \bar{x}| \geq x_0 \} \leq \frac{\sigma^2}{x_0^2}.$$

### c) Einige spezielle Verteilungen

#### Binomialverteilung (Bernoulli-Verteilung, Newton-Verteilung)

Diese Verteilung tritt bei diskreten Zufallsgrößen auf. Bekannte Anwendungsbeispiele sind beim Fallen von Kugeln auf dem Galtonbrett oder beim Entnehmen von Kugeln aus einem Gefäß, in dem sich schwarze und weiße Kugeln befinden, realisiert.

Handelt es sich um  $n$  Versuche, wobei die einzelnen Versuche unabhängige Ereignisse mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  darstellen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein solches Ereignis  $k$ -mal eintritt und  $(n - k)$ -mal nicht eintritt, durch

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (1.15.22)$$

gegeben. Es gilt die Rekursionsformel

$$p_n(k+1) = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p} p_n(k). \quad (1.15.23)$$

Für den Mittelwert und die Varianz folgt

$$\text{a) } \mu = np, \quad \text{b) } \sigma^2 = np(1-p). \quad (1.15.24)$$

### **Poisson-Verteilung**

Diese Verteilung, die oft dann Anwendung findet, wenn ein Ereignis ziemlich unwahrscheinlich ist, entsteht aus der Binomialverteilung für den Grenzprozeß  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  mit  $np = a = \text{const}$ :

$$\pi(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}. \quad (1.15.25)$$

Die Rekursionsformel (1.15.23) geht in

$$\pi(k+1) = \frac{a}{k+1} \pi(k) \quad (1.15.26)$$

über, während für Mittelwert und Varianz

$$\text{a) } \mu = a, \quad \text{b) } \sigma^2 = a \quad (1.15.27)$$

zu stehen kommt.

### **Gauß-Verteilung (Normalverteilung)**

Zu dieser Verteilung gelangt man von der Binomialverteilung durch den Grenzprozeß  $n \rightarrow \infty$  unter der Annahme  $p = \frac{1}{2}$ , wobei die Merkmalswerte ( $k \rightarrow x$ ) kontinuierlich werden. Es resultiert die Wahrscheinlichkeitsdichte der Gauß-Verteilung

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} \quad (\text{Glockenkurve}). \quad (1.15.28)$$

Dabei erhalten die Konstanten  $a$  und  $b$  ihre Deutung durch ihre Verknüpfung mit dem Mittelwert und der Varianz:

$$\text{a) } \mu = b, \quad \text{b) } \sigma^2 = a^2. \quad (1.15.29)$$

Die zur Gauß-Verteilung gehörige Verteilungsfunktion (1.15.14a)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\xi-b)^2}{2a^2}} d\xi \quad (1.15.30)$$

heißt Gaußsches Fehlerintegral.

Für praktische Zwecke ist es aus Tabellierungsgründen sinnvoll, die Substitution  $\xi = \frac{x - \mu}{\sigma}$  und  $g(\xi) = \sigma f(x)$  vorzunehmen, was zur normierten Gauß-Verteilung führt:

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \quad (1.15.31)$$

Dem entspricht die Setzung  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$  in (1.15.28).

In der Literatur findet man

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} g(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta \quad (1.15.32)$$

tabelliert.

