

4 Lineare Bruchmechanik

4.1 Allgemeines

Wir wenden uns nun der Beschreibung des Verhaltens eines Risses zu. Aus makroskopischer, kontinuumsmechanischer Sicht fassen wir diesen als einen Schnitt in einem Körper auf. Seine einander gegenüberliegenden Berandungen sind die *Rißoberflächen*; man nennt sie auch *Rißflanken* oder *Rißufer* (Bild 4.1). Sie sind in der Regel belastungsfrei. Der Riß endet an der *Rißfront* bzw. an der *Rißspitze*.

Hinsichtlich der Deformation eines Risses unterscheidet man drei verschiedene *Rißöffnungsarten*, die in Bild 4.2 dargestellt sind. *Modus I* kennzeichnet eine zur x, z -Ebene symmetrische Rißöffnung. Bei *Modus II* tritt eine antisymmetrische Separation der Rißoberflächen durch Relativverschiebungen in x -Richtung (normal zur Rißfront) auf. Schließlich beschreibt *Modus III* eine Separation infolge Relativverschiebungen in z -Richtung (tangential zur Rißfront). Die mit den verschiedenen Rißöffnungsarten zusammenhängenden Symmetrien sind zunächst nur lokal, d.h. für die Umgebung der Rißspitze, definiert. In bestimmten Fällen können sie jedoch auch für einen gesamten Körper zutreffen.

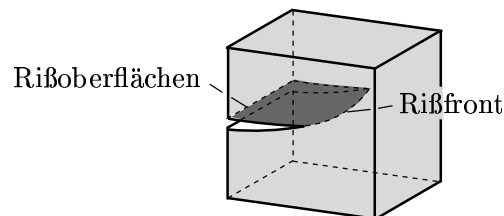


Bild 4.1 Bezeichnungen

Eine wichtige Rolle für die kontinuumsmechanische Beschreibung spielt die Größe der *Prozeßzone*. Hierunter versteht man die Region in der Umgebung einer Rißfront (Rißspitze), in welcher der mikroskopisch recht komplexe Prozeß der Bindungslösung stattfindet, der mit den Mitteln der klassischen Kontinuumsmechanik in der Regel nicht beschrieben werden kann. Soll die Kontinuumsmechanik auf den gesamten rißbehafteten Körper angewendet werden, muß demnach vorausgesetzt werden, daß die Ausdehnung der Prozeßzone vernachlässigbar klein ist im Vergleich zu allen charakteristischen makroskopischen Abmes-

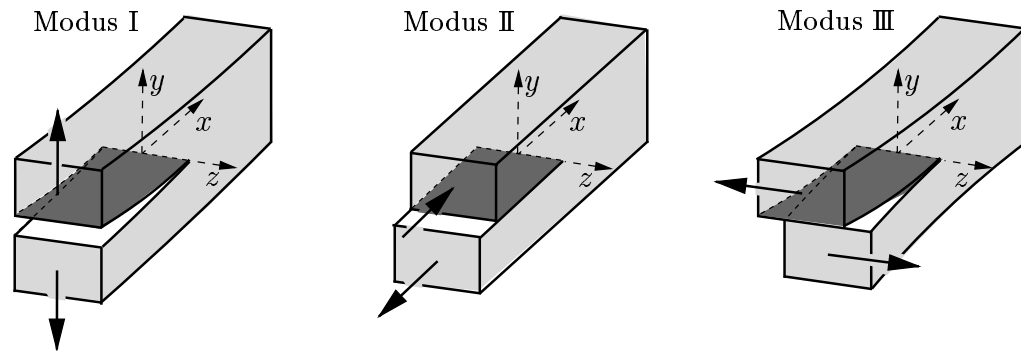


Bild 4.2 Rißöffnungsarten

sungen des Körpers. Eine solche Lokalisierung des Bruchprozesses ist in sehr vielen Fällen gegeben. Sie ist zum Beispiel typisch für metallische Werkstoffe und die meisten spröden Materialien. Allerdings tritt sie nicht in allen Fällen ein. So kann die Prozeßzone bei Beton oder bei granularen Materialien eine erhebliche Größe haben und unter Umständen sogar den gesamten Körper umfassen.

In der *linearen Bruchmechanik* wird ein rißbehafteter Körper im gesamten Gebiet als linear elastisch angesehen. Etwaige inelastische Vorgänge innerhalb oder außerhalb der Prozeßzone um die Rißspitze müssen deshalb auf eine kleine Region beschränkt sein, die aus makroskopischer Sicht vernachlässigt werden kann. Dementsprechend ist die lineare Bruchmechanik in erster Linie zur Beschreibung des Sprödbruchs geeignet (vgl. Abschnitt 3.2.2).

Eine fundamentale Bedeutung kommt dem *Rißspitzenfeld*, d.h. den Spannungen und Deformationen in der Umgebung einer Rißspitze zu. Obwohl dieses Feld, wie schon erwähnt, nicht direkt den Zustand in der Prozeßzone beschreibt, bestimmt es doch indirekt die Vorgänge, welche in ihr ablaufen. Im nachfolgenden wird das Rißspitzenfeld für den Fall eines isotropen linear elastischen Materials unter statischer Belastung näher untersucht.

4.2 Das Rißspitzenfeld

4.2.1 Zweidimensionale Rißspitzenfelder

Wir betrachten das zweidimensionale Problem eines Körpers, der einen geraden Riß enthält. Dabei interessieren wir uns nur für das Feld innerhalb einer kleinen Umgebung vom Radius R um eine Rißspitze (Bild 4.3). Es ist zweckmäßig, hierzu die dargestellten Koordinaten mit dem Ursprung in der Rißspitze einzuführen.

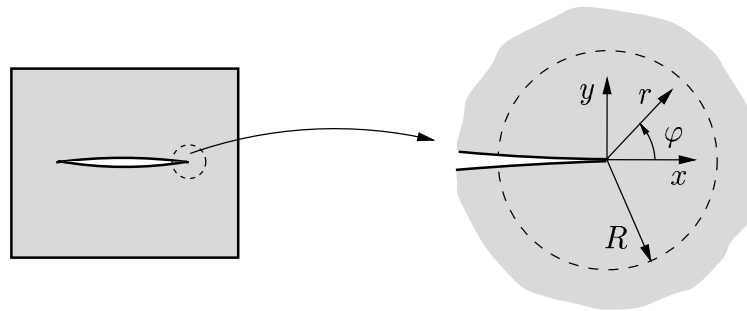


Bild 4.3 Umgebung der Rißspitze

Longitudinaler Schub, Modus III

Das einfachste ebene Problem ist das des longitudinalen (nichtebenen) Schubspannungszustandes. Hierbei treten nur Verschiebungen w senkrecht zur x, y -Ebene auf, was zu einer Modus III Rißöffnung führen kann. Das Rißspitzenfeld läßt sich in diesem Fall unter Verwendung einer komplexen Funktion $\Omega(z)$ ermitteln (vgl. Abschnitt 1.5.2). Als Ansatz für die Lösung wählen wir

$$\Omega(z) = Az^\lambda, \tag{4.1}$$

worin A eine noch freie, im allgemeinen komplexe Konstante ist. Den ebenfalls unbekanntem Exponenten λ nehmen wir als reell an. Damit die Verschiebung an der Rißspitze nichtsingulär ist, wird außerdem $\lambda > 0$ vorausgesetzt; hiermit ist dann auch die Formänderungsenergie beschränkt. Den Sonderfall $\lambda = 0$ klammern wir zunächst aus; er entspricht nach (1.122) einer spannungsfreien Starrkörperverschiebung.

Aus (4.1) errechnet sich nach (1.122) mit $z = re^{i\varphi}$

$$2i\tau_{yz} = \overline{\Omega'(z)} - \Omega'(z) = \overline{A}\lambda r^{\lambda-1}e^{-i(\lambda-1)\varphi} - A\lambda r^{\lambda-1}e^{i(\lambda-1)\varphi}.$$

Die Randbedingungen verlangen, daß die Rißufer ($\varphi = \pm\pi$) belastungsfrei sind: $\tau_{yz}(\pm\pi) = 0$. Dies führt auf das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \overline{A}e^{-i\lambda\pi} - Ae^{i\lambda\pi} &= 0, \\ \overline{A}e^{i\lambda\pi} - Ae^{-i\lambda\pi} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Eine nichttriviale Lösung existiert, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet. Die "Eigenwerte" λ ergeben sich danach wie folgt:

$$\sin 2\lambda\pi = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = n/2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4.3}$$

Einsetzen dieses Resultats in eine Gleichung aus (4.2) liefert schließlich $\overline{A} = (-1)^n A$.

Zu jedem der unendlich vielen Eigenwerte λ gehört eine Eigenfunktion vom Typ (4.1), welche die Randbedingungen erfüllt. Die Eigenfunktionen können beliebig

superponiert werden:

$$\Omega = A_1 z^{1/2} + A_2 z + A_3 z^{3/2} + \dots \quad (4.4)$$

Dementsprechend lassen sich die Spannungen $\tau_{\alpha z}$ mit $\alpha = x, y$ und die Verschiebung w in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha z} &= r^{-1/2} \hat{\tau}_{\alpha z}^{(1)}(\varphi) + \hat{\tau}_{\alpha z}^{(2)}(\varphi) + r^{1/2} \hat{\tau}_{\alpha z}^{(3)}(\varphi) + \dots, \\ w - w_0 &= r^{1/2} \hat{w}^{(1)}(\varphi) + r \hat{w}^{(2)}(\varphi) + r^{3/2} \hat{w}^{(3)}(\varphi) + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hierin sind $\hat{\tau}_{\alpha z}^{(1)}(\varphi)$, $\hat{w}^{(1)}(\varphi)$, ... Funktionen vom Winkel φ , die bis auf jeweils einen Faktor festgelegt sind. Durch w_0 soll eine mögliche Starrkörperverschiebung erfaßt werden.

Nähert man sich der Rißspitze ($r \rightarrow 0$), dann kann das Feld alleine durch den dominierenden ersten Term in (4.4) bzw. in (4.5) beschrieben werden; er gehört zum kleinsten Eigenwert $\lambda = 1/2$. Die zugeordneten Spannungen und Verschiebungen sind durch

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi/2) \\ \cos(\varphi/2) \end{Bmatrix}, \quad w = \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\varphi/2) \quad (4.6)$$

gegeben. Danach haben die Spannungen an der Rißspitze eine Singularität vom Typ $r^{-1/2}$.

Das singuläre Rißspitzenfeld ist durch (4.6) bis auf den Faktor K_{III} festgelegt. Dieser wird als *Spannungsintensitätsfaktor* oder kurz als *K-Faktor* bezeichnet, wobei der Index auf die Modus III Rißöffnung hindeutet. Man kann K_{III} als Maß für die "Stärke" des Rißspitzenfeldes ansehen, welches letztlich durch ihn vollständig charakterisiert wird. Umgekehrt läßt sich K_{III} aus (4.6) bestimmen, wenn in der Umgebung der Rißspitze die Spannungen oder Verschiebungen bekannt sind. Nach (4.6) gilt zum Beispiel

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}(\varphi = 0). \quad (4.7)$$

Wie die Spannungen und Verschiebungen hängt die Größe des *K-Faktors* von der geometrischen Form des Körpers und von seiner Belastung ab.

EVZ und ESZ, Modus I und Modus II

Für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) und den ebenen Spannungszustand (ESZ) bestimmen wir das Rißspitzenfeld unter Verwendung der zwei komplexen Funktionen $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ (vgl. Abschnitt 1.5.2). Die Vorgehensweise ist dabei analog zum longitudinalen Schub. Als Lösungsansatz findet

$$\Phi(z) = Az^\lambda, \quad \Psi(z) = Bz^\lambda \quad (4.8)$$

Verwendung, wobei der Exponent λ wieder als reell und positiv angenommen

wird. Aus (4.8) bestimmen wir nach (1.120) zunächst

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi} &= \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z\Phi''(z) + \Psi'(z)z/\bar{z} \\ &= A\lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\varphi} + \bar{A}\lambda r^{\lambda-1} e^{-i(\lambda-1)\varphi} \\ &\quad + A\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\varphi} + B\lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda+1)\varphi} .\end{aligned}\quad (4.9)$$

Entlang der Reißufer $\varphi = \pm\pi$ müssen die Randbedingungen $\sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi} = 0$ erfüllt sein. Sie liefern unter Beachtung von $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$ das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A\lambda e^{-i\lambda\pi} + \bar{A}e^{i\lambda\pi} + Be^{i\lambda\pi} &= 0 , \\ A\lambda e^{i\lambda\pi} + \bar{A}e^{-i\lambda\pi} + Be^{-i\lambda\pi} &= 0 , \\ Ae^{-i\lambda\pi} + \bar{A}\lambda e^{i\lambda\pi} + \bar{B}e^{-i\lambda\pi} &= 0 , \\ Ae^{i\lambda\pi} + \bar{A}\lambda e^{-i\lambda\pi} + \bar{B}e^{i\lambda\pi} &= 0 .\end{aligned}\quad (4.10)$$

Die letzten beiden Gleichungen sind dabei das konjugiert Komplexe der ersten beiden. Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante erhält man eine Eigenwertgleichung, die auf die gleichen Eigenwerte wie beim longitudinalen Schubspannungszustand führt:

$$\cos 4\lambda\pi = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda = n/2 \quad n = 1, 2, 3, \dots .\quad (4.11)$$

Setzt man dies in eine Gleichung aus (4.10) ein, dann ergibt sich noch $B = -(-1)^n nA/2 - \bar{A}$.

Die Spannungen σ_{ij} und Verschiebungen u_i mit $i, j = x, y$ können wieder als Summe der zu den Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= r^{-1/2} \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}(\varphi) + \hat{\sigma}_{ij}^{(2)}(\varphi) + r^{1/2} \hat{\sigma}_{ij}^{(3)}(\varphi) + \dots , \\ u_i - u_{i0} &= r^{1/2} \hat{u}_i^{(1)}(\varphi) + r \hat{u}_i^{(2)}(\varphi) + r^{3/2} \hat{u}_i^{(3)}(\varphi) + \dots .\end{aligned}\quad (4.12)$$

Darin beschreibt u_{i0} eine mögliche Starrkörperverschiebung. Für $r \rightarrow 0$ dominiert der erste, in den Spannungen singuläre Term. Es ist zweckmäßig das zugeordnete Feld in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Anteil bezüglich der x -Achse aufzuspalten. Das symmetrische singuläre Feld entspricht einer Modus I Reißöffnung, während das antisymmetrische Feld zu einer Modus II Reißöffnung führt. Die entsprechenden *Nahfelder* lassen sich in der folgenden Form darstellen:

Modus I:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\varphi/2) \begin{Bmatrix} 1 - \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2) \\ 1 + \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \cos(3\varphi/2) \end{Bmatrix} , \\ \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \varphi) \begin{Bmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \end{Bmatrix} ,\end{aligned}\quad (4.13)$$

Modus II:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi/2)[2 + \cos(\varphi/2)\cos(3\varphi/2)] \\ \sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)\cos(3\varphi/2) \\ \cos(\varphi/2)[1 - \sin(\varphi/2)\sin(3\varphi/2)] \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin(\varphi/2)[\kappa + 2 + \cos\varphi] \\ \cos(\varphi/2)[\kappa - 2 + \cos\varphi] \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \text{EVZ:} \quad \kappa &= 3 - 4\nu, & \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y), \\ \text{ESZ:} \quad \kappa &= (3 - \nu)/(1 + \nu), & \sigma_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Danach liegt die Verteilung der Spannungen und Deformationen in der Umgebung der Rißspitze eindeutig fest. Sie wird exemplarisch für den Modus I in Abschnitt 4.2.2 diskutiert. Die "Stärke" (Amplitude) des Rißspitzenfeldes wird durch die *Spannungsintensitätsfaktoren* K_I und K_{II} bestimmt. Diese hängen von der Geometrie des Körpers (einschließlich Riß) und von seiner Belastung ab. Sie lassen sich aus den Spannungen oder Deformationen ermitteln, sofern diese bekannt sind. Nach (4.13) und (4.14) gelten zum Beispiel die Beziehungen

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(\varphi = 0), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(\varphi = 0). \quad (4.16)$$

Das Feld in der Umgebung einer Rißspitze eines *geraden* Risses mit *lastfreien* Rißflanken wird nach (4.5) und (4.12) aus einer Summe von Eigenfunktionen gebildet. Von ihnen dominiert der singuläre erste Term (= Nahfeld), wenn man sich der Rißspitze nähert ($r \rightarrow 0$); für einen hinreichend großen Abstand r dürfen die höheren Terme allerdings nicht vernachlässigt werden. Es läßt sich zeigen, daß das Nahfeld von der gleichen Form (4.6), bzw. (4.13), (4.14) ist, wenn die Rißufer belastet sind (Bild 4.4a) oder wenn Volumenkräfte auftreten. Dies trifft auch auf einen Riß zu, der im Bereich der Rißspitze gekrümmt ist (Bild 4.4b).

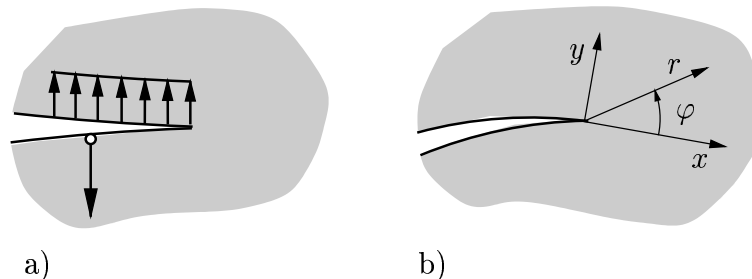


Bild 4.4 a) Rißuferbelastung, b) gekrümmter Riß

Die $r^{-1/2}$ -Singularität ist typisch für eine Rißspitze. Singuläre Spannungen mit einem eventuell anderem Typ der Singularität können aber auch bei vielen anderen Problemen der linearen Elastizität auftreten. Als Beispiel sei hier nur eine "rißähnliche" Spitzkerbe betrachtet, deren Flanken einen Winkel 2α bilden (Bild 4.5a). Der Ansatz (4.8) führt mit (4.9) und den Randbedingungen $(\sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi})_{\varphi=\pm\alpha} = 0$ wieder auf ein homogenes Gleichungssystem. Dieses unterscheidet sich von (4.10) nur dadurch, daß an Stelle des Winkels π nun der Winkel α auftritt. Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante erhält man die Eigenwertgleichung

$$\sin 2\lambda\alpha = \pm\lambda \sin 2\alpha . \tag{4.17}$$

In Bild 4.5b ist der daraus resultierende kleinste Eigenwert dargestellt. Im Fall $2\alpha \leq \pi$ ist $\lambda = 1$; aus (4.8) folgen dann keine Spannungssingularitäten. Für die "einspringende Ecke" $\pi < 2\alpha < 2\pi$ liegt λ im Bereich $1/2 < \lambda < 1$, und im Grenzfall $2\alpha = 2\pi$ (Riß) ergibt sich das schon bekannte Ergebnis $\lambda = 1/2$. Hierzu gehören dann entsprechend (4.8) Spannungssingularitäten vom Typ $\sigma_{ij} \sim r^{\lambda-1}$. Auf die Angabe höherer Eigenwerte und der Eigenfunktionen sei hier verzichtet.

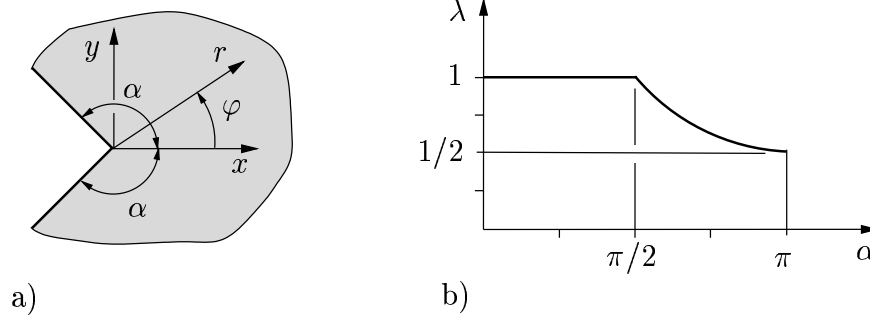


Bild 4.5 a) Spitzkerbe, b) kleinster Eigenwert

4.2.2 Modus I Rißspitzenfeld

Das Modus I Rißspitzenfeld kann durch die Beziehungen (4.13) beschrieben werden. Danach sind die Spannungen σ_{ij} (und entsprechend dem Hookeschen Gesetz auch die Verzerrungen ε_{ij}) singulär vom Typ $r^{-1/2}$, d.h. sie wachsen mit $r \rightarrow 0$ unbeschränkt an. Als Beispiel hierfür ist in Bild 4.6a der Verlauf von σ_y vor der Rißspitze ($\varphi = 0$) schematisch dargestellt. Die Verschiebungen zeigen ein $r^{1/2}$ -Verhalten. Dieses führt entlang der Rißflanken ($\varphi = \pm\pi$) für positives K_I zu einer parabelförmigen Rißöffnung (Bild 4.6a):

$$v^\pm = v(\pm\pi) = \pm \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) . \tag{4.18}$$

Ist K_I negativ, dann kommt es nach (4.13) formal zu einer "Überlappung" (Durchdringung) der Rißufer. Physikalisch ist dies nicht möglich. Vielmehr sind beim *Rißschließen* die beiden Rißufer in Kontakt und üben Kräfte aufeinander aus.

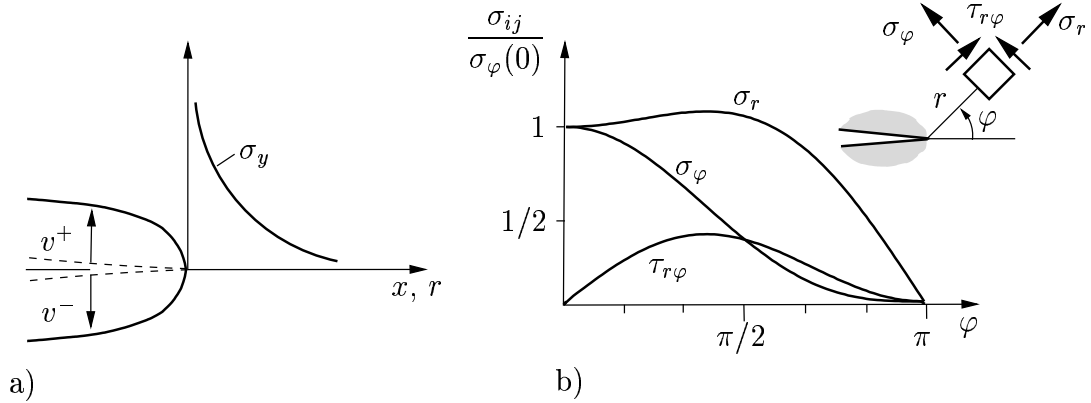


Bild 4.6 Modus I Rißspitzenfeld

Manchmal ist es zweckmäßig, das Nahfeld nicht durch seine kartesischen Komponenten (4.13) sondern durch äquivalente oder abgeleitete Größen zu beschreiben. So erhält man zum Beispiel durch Transformation (vgl. (1.114)) die Spannungskomponenten in Polarkoordinaten:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{r\varphi} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} 5 \cos(\varphi/2) - \cos(3\varphi/2) \\ 3 \cos(\varphi/2) + \cos(3\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) + \sin(3\varphi/2) \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

Ihre Winkelabhängigkeit ist in Bild 4.6b dargestellt.

Die Hauptspannungen in der x, y -Ebene und die Hauptrichtungen – hier mit α bezeichnet – errechnen sich aus (1.115) zu

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\varphi/2) \begin{Bmatrix} 1 + \sin(\varphi/2) \\ 1 - \sin(\varphi/2) \end{Bmatrix}, \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\varphi. \quad (4.20)$$

Die dritte Hauptspannung ist durch σ_z gegeben; sie ist nach (4.15) im EVZ und im ESZ unterschiedlich:

$$\sigma_3 = 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\varphi/2) \quad (\text{EVZ}), \quad \sigma_3 = 0 \quad (\text{ESZ}). \quad (4.21)$$

Danach ist σ_1 die größte Hauptspannung, die kleinste kann je nach Spannungszustand und Winkel φ entweder σ_3 oder σ_2 sein.

Mit den Hauptspannungen läßt sich unmittelbar die maximale Schubspannung bestimmen. Aus $\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{ESZ: } \tau_{\max} &= \sigma_1/2 \\ \text{EVZ: } \tau_{\max} &= \begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_2)/2 & \text{für } \sin(\varphi/2) \geq 1 - 2\nu, \\ (\sigma_1 - \sigma_3)/2 & \text{für } \sin(\varphi/2) \leq 1 - 2\nu. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.2.3 Dreidimensionales Reißspitzenfeld

In verschiedenen Fällen muß der dreidimensionale Charakter eines Reißproblems beachtet werden. Dies ist im allgemeinen der Fall, wenn die Reißfront gekrümmt ist. Beispiele hierfür sind ein pfennigförmiger Innenriß oder ein halb elliptischer Oberflächenriß (Bild 4.7a). Aber auch bei einem Riß mit gerader Reißfront in einer ebenen Scheibe mit endlicher Dicke hat man es genau genommen mit einem räumlichen Problem zu tun: der Spannungszustand ändert sich im Reißfrontbereich über die Dicke.

Es läßt sich zeigen, daß im dreidimensionalen Fall das Reißspitzenfeld *lokal* vom gleichen Typ ist, wie bei ebenen Problem. Es setzt sich im allgemeinen aus den Nahfeldern der drei Moden zusammen, wobei hinsichtlich der Deformationen beim Modus I- und beim Modus II-Anteil vom EVZ auszugehen ist. Legt man in einen beliebigen Punkt P der Reißfront ein lokales Koordinatensystem nach Bild 4.7b, dann gilt für $r \rightarrow 0$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I \tilde{\sigma}_{ij}^I(\varphi) + K_{II} \tilde{\sigma}_{ij}^{II}(\varphi) + K_{III} \tilde{\sigma}_{ij}^{III}(\varphi)]. \quad (4.23)$$

Darin sind $\tilde{\sigma}_{ij}^I(\varphi), \dots$ Winkelfunktionen, die durch (4.13), (4.14) und (4.6) festgelegt sind. Das Feld in der Umgebung der Reißfront wird danach durch die Spannungsintensitätsfaktoren K_I, K_{II}, K_{III} vollständig charakterisiert. Letztere können sich entlang der Reißfront ändern: $K_I = K_I(s), \dots$

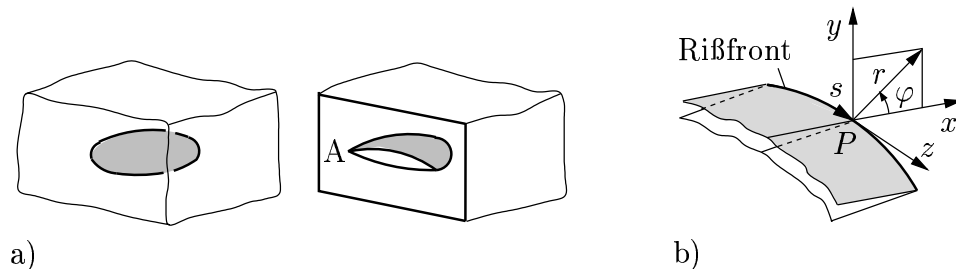


Bild 4.7 Zum dreidimensionalen Reißspitzenfeld

Die Darstellung (4.23) gilt entlang der Reißfront mit Ausnahme einiger besonderer (singulärer) Punkte. Zu ihnen zählen zum Beispiel ein Knickpunkt in der Reißfront oder ein Punkt, in dem eine Reißfront auf eine freie Oberfläche trifft (vgl. Punkt A in Bild 4.7a). Dort können dann Spannungssingularitäten auftreten, die *nicht* vom Typ $r^{-1/2}$ sind.

4.3 K-Konzept

Wir beschränken uns bei den folgenden Betrachtungen zunächst auf den für die Anwendungen wichtigsten Fall einer reinen Modus I Reißöffnung. Das zugehörige

Rißspitzenfeld ist, wie schon erwähnt, durch den Spannungsintensitätsfaktor K_I eindeutig charakterisiert. Dieses K_I -bestimmte Feld dominiert in einem nach außen begrenzten Bereich um die Rißspitze, der in Bild 4.8 schematisch durch den Radius R gekennzeichnet ist. Außerhalb von R können die höheren Terme nicht vernachlässigt werden.

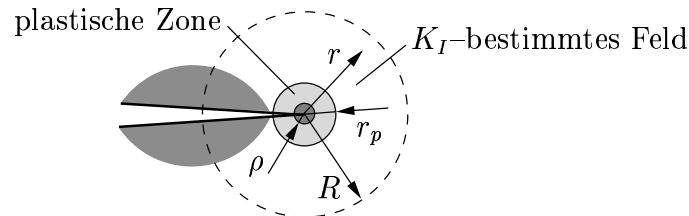


Bild 4.8 K-Konzept

Die Gültigkeit des K_I -bestimmten Feldes ist aber auch nach innen begrenzt, weil die lineare Elastizitätstheorie unterhalb einer bestimmten Schranke von r die tatsächlichen Gegebenheiten nicht mehr richtig beschreibt. Dies schon alleine deshalb, weil kein reales Material unbeschränkt große Spannungen erträgt. Die formal auftretenden singulären Verzerrungen widersprechen zudem den Voraussetzungen der linearen Elastizität (kleine Verzerrungen). Bei den meisten realen Materialien kommt es vielmehr aufgrund der zur Rißspitze hin stark ansteigenden Spannungen zu plastischem Fließen oder allgemeiner, zu inelastischen Deformationen. Außerdem befindet sich an der Rißspitze die kleine, aber immerhin endliche Prozeßzone. Ihre charakteristische Abmessung ist in Bild 4.8 mit ρ , diejenige der *plastischen Zone* mit r_p bezeichnet.

Wir setzen nun voraus, daß das K_I -bestimmte Gebiet groß ist im Vergleich zur eingeschlossenen Region (= black box), welche nicht durch das Nahfeld beschrieben wird ($\rho, r_p \ll R$). Dann kann man davon ausgehen, daß die in ihr ablaufenden Vorgänge alleine durch das umgebende K_I -bestimmte Feld gesteuert werden. Dies ist die Hypothese, die dem *K-Konzept* zugrunde liegt: der Zustand in der Prozeßzone bzw. an der Rißspitze kann indirekt durch K_I charakterisiert werden. Der Spannungsintensitätsfaktor wird, ähnlich wie die Spannungen selbst, als eine Zustandsgröße angesehen, die ein Maß für die "Belastung" im Rißspitzenbereich ist.

Mit dem Spannungsintensitätsfaktor steht damit eine Größe zur Verfügung, welche die Formulierung eines Bruchkriteriums erlaubt. Danach kommt es zum Einsetzen des Rißfortschrittes (Bruch), wenn der Spannungsintensitätsfaktor K_I eine materialspezifische kritische Größe K_{Ic} erreicht:

$$\boxed{K_I = K_{Ic}}. \quad (4.24)$$

Unter diesen Umständen liegt in der Prozeßzone ein kritischer Zustand vor,

welcher zur Separation führt. Dabei haben wir stillschweigend angenommen, daß der Prozeßzonenzustand allein durch die aktuelle Größe von K_I bestimmt ist und nicht etwa von der Belastungsgeschichte der Rißspitze abhängt.

Die Größe K_{Ic} auf der rechten Seite von (4.24) nennt man *Bruchzähigkeit*. Sie ist ein Materialkennwert, der in geeigneten Experimenten bestimmt wird (vgl. Abschnitt 4.5). Entsprechend (4.19) hat ein K-Faktor die Dimension $[Spannung] \cdot [Länge]^{1/2}$; er wird in Vielfachen der Einheit $Nmm^{-3/2}$ bzw. $MPa mm^{1/2}$ angegeben. Die Verwendung von Spannungsintensitätsfaktoren in einem Bruchkriterium geht auf G.R. Irwin zurück.

Im Kriterium (4.24) für reinen Modus I wird die Beanspruchung der Rißspitze alleine durch K_I charakterisiert. Entsprechende 1-parametrische Bruchkriterien lassen sich auch für reinen Modus II bzw. für reinen Modus III aufstellen:

$$K_{II} = K_{IIc} \quad (\text{Modus II}), \quad K_{III} = K_{IIIc} \quad (\text{Modus III}). \quad (4.25)$$

Im Fall einer gemischten Beanspruchung durch K_I , K_{II} und K_{III} muß dagegen von einem allgemeinen Bruchkriterium

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0 \quad (4.26)$$

ausgegangen werden.

4.4 K-Faktoren

Es gibt sehr viele Methoden zur Bestimmung von K-Faktoren. Da letztere direkt mit den Feldgrößen zusammenhängen, sind grundsätzlich alle Verfahren anwendbar, welche in der linearen Elastizität zur Bestimmung der Spannungen und Deformationen existieren. Manchmal ist es allerdings notwendig, sie auf die Besonderheit von Rißproblemen (Spannungssingularitäten) zuzuschneiden.

Analytische Methoden werden hauptsächlich verwendet, wenn man an Lösungen in geschlossener Form interessiert ist. Diese sind allerdings nur bei relativ einfachen Randwertproblemen zu erzielen. Bei komplizierteren Problemen ist man auf *numerische Methoden* angewiesen. Hierbei werden zum Beispiel Finite Elemente Verfahren, Randelementverfahren oder Differenzenverfahren verwendet. Daneben können auch *experimentelle Methoden*, wie Dehnungsmessungen im Rißspitzenbereich oder die Spannungsoptik herangezogen werden.

Eine sachgerechte Behandlung aller Verfahren würde den Rahmen dieses Buches sprengen. Diesbezüglich sei der Leser auf die Spezialliteratur verwiesen. Im folgenden werden nur einige Lösungen für ausgewählte Rißkonfigurationen und Belastungen diskutiert. Anschließend wird beispielhaft auf eine Integralgleichungsformulierung von Rißproblemen, auf die Methode der Gewichtsfunktionen sowie auf ein Verfahren zur Untersuchung von vielen Rissen eingegangen.

4.4.1 Beispiele

Als einfachsten Fall betrachten wir zuerst einen geraden Riß R der Länge $2a$ in einer unendlich ausgedehnten Ebene unter einachsigem Zug σ (Bild 4.9a). Hier und bei vielen anderen Rißproblemen ist es zweckmäßig, die Lösung durch Superposition zweier Teillösungen zu erzeugen. Teilproblem (1) betrifft die elastische Ebene *ohne* Riß unter der gegebenen Belastung σ . Entlang des gedachten Schnittes R tritt dabei die Spannung $\sigma_y^{(1)}|_R = \sigma$ auf. Beim Teilproblem (2) wird die elastische Ebene *mit* Riß alleine entlang der Rißufer durch genau diese Spannung, allerdings mit umgekehrten Vorzeichen, belastet: $\sigma_y^{(2)}|_R = -\sigma$. Die Randbedingung des Ausgangsproblems (belastungsfreie Rißufer) ist nach Superposition der Teillösungen erfüllt: $\sigma_y|_R = \sigma_y^{(1)}|_R + \sigma_y^{(2)}|_R = 0$. Beim Teilproblem (1) ist kein Riß und dementsprechend auch kein Spannungsintensitätsfaktor vorhanden. Dies bedeutet, daß die K-Faktoren des Ausgangsproblems und des Teilproblems (2) übereinstimmen.

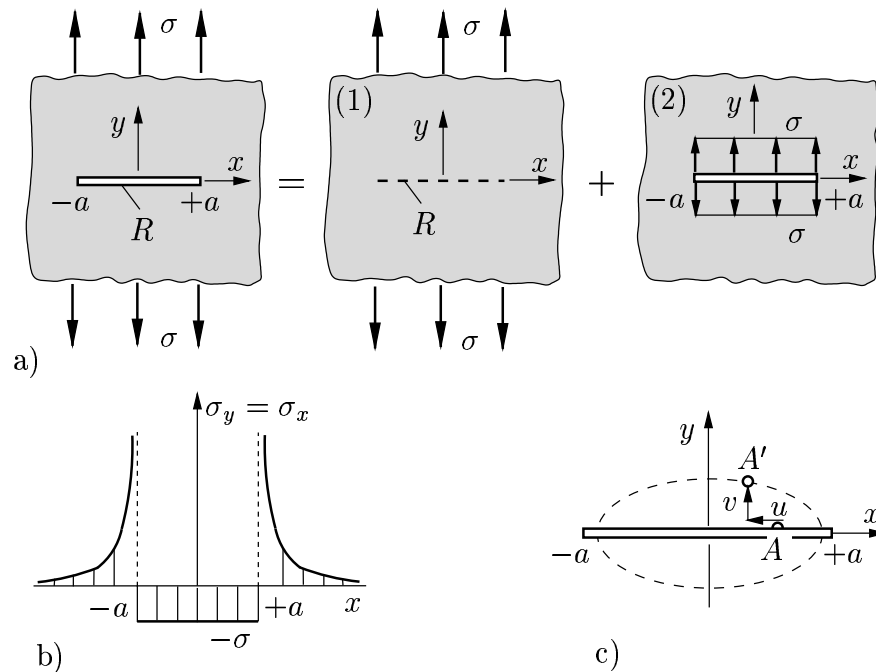


Bild 4.9 Einzelriß unter Belastung σ

Unter Verwendung der komplexen Methode lassen sich die Lösungen der Teilprobleme und des Ausgangsproblems folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}, & \Phi^{(1)}(z) &= \frac{1}{4}\sigma z, & \Phi^{(2)}(z) &= \frac{1}{2}\sigma[\sqrt{z^2 - a^2} - z], \\ \Psi &= \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}, & \Psi^{(1)}(z) &= \frac{1}{2}\sigma z, & \Psi^{(2)}(z) &= -\frac{1}{2}\sigma a^2/\sqrt{z^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Für das Teilproblem (2) erhält man daraus zum Beispiel für die Spannungen

entlang der x -Achse (Bild 4.9b)

$$\tau_{xy}^{(2)} = 0, \quad \sigma_y^{(2)} = \sigma_x^{(2)} = \sigma \begin{cases} -1 & |x| < a \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 & |x| > a \end{cases} \quad (4.28)$$

Die Verschiebungen des oberen (+) und des unteren (-) Rißufers ($|x| \leq a$) ergeben sich zu (Bild 4.9c)

$$4Gu^\pm = -(1 + \kappa)\sigma x, \quad 4Gv^\pm = \pm(1 + \kappa)\sigma\sqrt{a^2 - x^2}. \quad (4.29)$$

Den Spannungsintensitätsfaktor kann man direkt aus dem komplexen Potential Φ ermitteln. Hierzu betrachten wir zunächst eine Rißspitze, die sich an einer beliebigen Stelle z_0 befindet. Nach den Kolosovschen Formeln und (4.13), (4.14) gilt allgemein für $r \rightarrow 0$ bzw. $z \rightarrow z_0$

$$\begin{aligned} 2\Phi'(z) + 2\overline{\Phi'(z)} &= \sigma_x + \sigma_y \\ &= 2(2\pi r)^{-1/2}[K_I \cos(\varphi/2) - K_{II} \sin(\varphi/2)] \\ &= (2\pi r)^{-1/2}[(K_I - iK_{II})e^{-i\varphi/2} + \overline{(K_I - iK_{II})e^{-i\varphi/2}}]. \end{aligned}$$

Mit $re^{i\varphi} = z - z_0$ ergibt sich hieraus die Darstellung

$$2\Phi'(z) = (K_I - iK_{II})[2\pi(z - z_0)]^{-1/2} \quad (z \rightarrow z_0),$$

oder umgekehrt

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_0} \sqrt{z - z_0} \Phi'(z). \quad (4.30)$$

Für das konkrete Beispiel tritt aufgrund der Symmetrie nur eine Modus I Belastung auf ($K_{II} = 0$), die an beiden Rißspitzen gleich ist. Einsetzen von (4.27) in (4.30) liefert den Spannungsintensitätsfaktor

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}. \quad (4.31)$$

In einem weiteren Beispiel werde nun der Riß nach Bild 4.10a an den Rißufern durch entgegengesetzte Einzelkräfte belastet. Wirkt nur P ($Q = 0$), dann lauten die komplexen Potentiale

$$\Phi'(z) = \frac{P}{2\pi(z - b)} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{z^2 - a^2}}, \quad \Psi'(z) = -z\Phi''(z). \quad (4.32)$$

Durch sie werden alle Randbedingungen erfüllt. Die zugehörigen K_I -Faktoren (K_{II} ist aus Symmetriegründen Null) an der rechten (+) und an der linken (-) Rißspitze ergeben sich aus (4.30) zu

$$K_I^\pm = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a \pm b}{a \mp b}}. \quad (4.33)$$

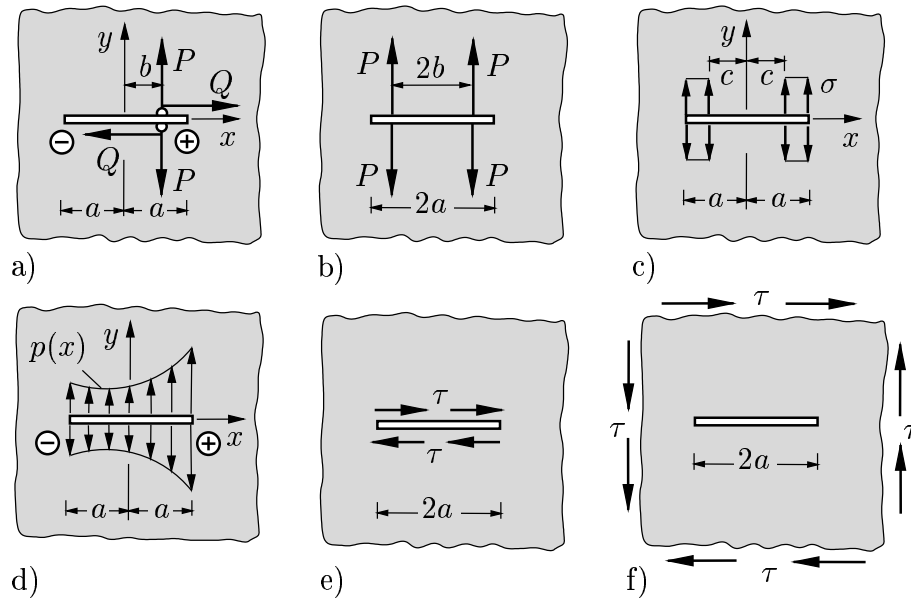


Bild 4.10 Rißbelastungen

Analog erhält man für eine Belastung nur durch Q (reiner Modus II)

$$K_I^\pm = 0, \quad K_{II}^\pm = \frac{Q}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a \pm b}{a \mp b}}. \quad (4.34)$$

Die Lösungen (4.33), (4.34) kann man als *Grundlösungen* verwenden, mit deren Hilfe man weitere Lösungen konstruieren kann. So folgt für eine Rißbelastung nach Bild 4.10b durch Superposition

$$K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \left[\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right] = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \frac{2a}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (4.35)$$

Unter Zuhilfenahme dieses Resultats errechnet sich für die Rißbelastung nach Bild 4.10c

$$K_I = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_c^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{c}{a} \right]. \quad (4.36)$$

Im Sonderfall $c = 0$ ergibt sich hieraus das schon bekannte Ergebnis (4.31). Auf ähnliche Art erhält man unter Verwendung von (4.33) die Lösung für einen Riß unter der beliebigen Belastung nach Bild 4.10d:

$$K_I^\pm = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} p(x) \sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}} dx. \quad (4.37)$$

Genauso kann man bei Schubbelastungen vorgehen. So ergibt sich mit (4.34) für einen Riß unter reiner Schubbelastung (Modus II) nach Bild 4.10e

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} . \quad (4.38)$$

Der K_{II} -Faktor hierfür und für den Fall nach Bild 4.10f stimmen überein.

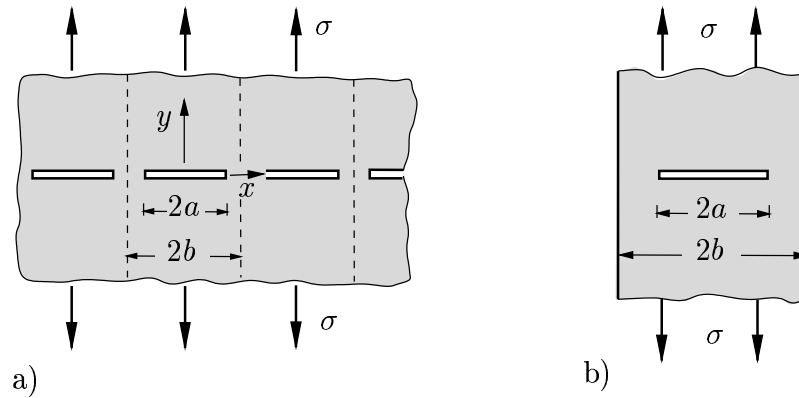


Bild 4.11 a) Kollineare Rireihe, b) Scheibenstreifen mit Innenri

Bild 4.11a zeigt eine periodische Reihe von kollinearen Rissen gleicher Länge $2a$ im unendlichen Gebiet unter einer Zugspannung σ . Hierfür lautet die Lösung in komplexen Potentialen

$$\Phi'(z) = \frac{\sigma}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{\sin(\pi a/2b)}{\sin(\pi z/2b)} \right]^2}}, \quad \Psi'(z) = -z\Phi''(z) . \quad (4.39)$$

Der Spannungsintensitätsfaktor K_I folgt hieraus mit (4.30) zu

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}} . \quad (4.40)$$

Hiernach steigt K_I stark an, wenn sich die Rispitzen einander nähern. Dies ist auf die gegenseitige Wechselwirkung der Risse zurückzuführen (vgl. Abschnitt 4.4.4). Kommen sich die Rispitzen sehr nahe ($a \rightarrow b$), so ergibt sich mit der Bezeichnung $c = b - a$ aus (4.40) das Ergebnis

$$K_I = \sigma \sqrt{\frac{4b}{\pi}} \sqrt{\frac{b}{c}} \quad \text{für} \quad c \ll b . \quad (4.41)$$

Man kann (4.40) auch als eine Näherung für die Konfiguration in Bild 4.11b verwenden, wenn die Ränder hinreichend weit von den Rispitzen entfernt sind.

In der Tabelle 4.1 sind K-Faktoren für einige Fälle zusammengestellt. Lösungen für viele weitere Konfigurationen sind in den einschlägigen Handbüchern für Spannungsintensitätsfaktoren zu finden. Angaben hierüber finden sich im Literaturverzeichnis.

Tabelle 4.1 K-Faktoren

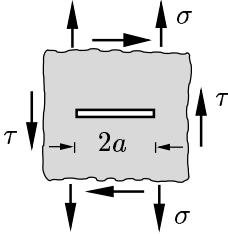
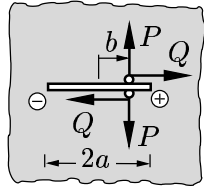
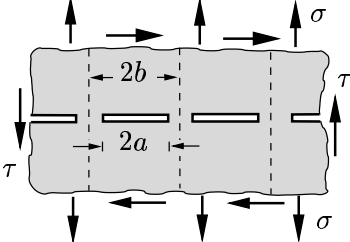
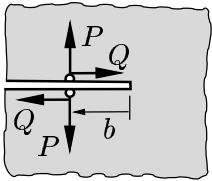
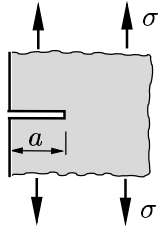
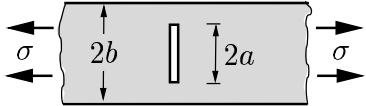
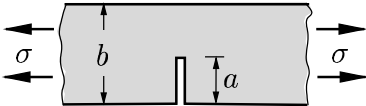
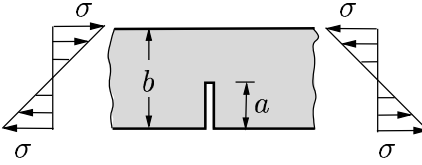
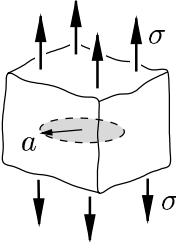
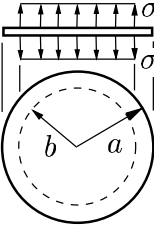
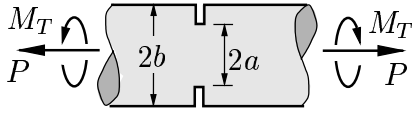
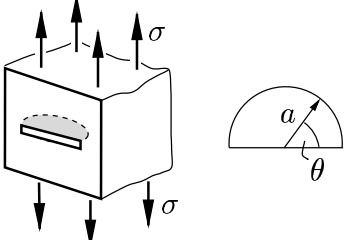
1		$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} \sqrt{\pi a}$
2		$\begin{Bmatrix} K_I^\pm \\ K_{II}^\pm \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a \pm b}{a \mp b}}$
3		$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} \sqrt{2b \tan \frac{\pi a}{2b}}$
4		$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2\pi b}}$
5		$K_I = 1,1215 \sigma \sqrt{\pi a}$
6		$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F_I(a/b)$ $F_I = \frac{1 - 0,025(a/b)^2 + 0,06(a/b)^4}{\sqrt{\cos(\pi a/2b)}}$

Tabelle 4.1 K-Faktoren (Fortsetzung)

7		$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}} G_I(a/b)$ $G_I = \frac{0,752 + 2,02 \frac{a}{b} + 0,37(1 - \sin \frac{\pi a}{2b})^3}{\cos \frac{\pi a}{2b}}$
8		$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}} G_I(a/b)$ $G_I = \frac{0,923 + 0,199(1 - \sin \frac{\pi a}{2b})^4}{\cos \frac{\pi a}{2b}}$
9		$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi a}$
10		$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi a} \left[1 - \sqrt{1 - (b/a)^2} \right]$
11		$K_I = \frac{P}{\pi a^2} \sqrt{\pi a} \sqrt{1 - a/b} G_I(a/b)$ $K_{III} = \frac{2M_T}{\pi a^3} \sqrt{\pi a} \sqrt{1 - a/b} G_{III}(a/b)$ $G_I = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8} \varepsilon^2 - 0,363 \varepsilon^3 + 0,731 \varepsilon^4 \right)$ $G_{III} = \frac{3}{8} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8} \varepsilon^2 + \frac{5}{16} \varepsilon^3 + \frac{35}{128} \varepsilon^4 + 0,208 \varepsilon^5 \right), \quad \varepsilon = a/b$
12		$K_I(\theta) = \sigma \sqrt{\pi a} F_I(\theta)$ $F_I = \frac{2}{\pi} (1,211 - 0,186 \sqrt{\sin \theta})$ $10^\circ < \theta < 170^\circ$