1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht,
alles andere ist Menschenwerk.
(L. Kronecker)

Wir setzen das System $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ als bekannt voraus. Zu seinen Strukturmerkmalen gehört das Prinzip der vollständigen Induktion. Im Kern besagt dieses, daß man die Folge aller natürlichen Zahlen ohne Wiederkehr durchläuft, wenn man beginnend bei 1 stets von einer natürlichen Zahl zur nächsten weiterschreitet.

1.1 Vollständige Induktion

Zu jeder natürlichen Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Eine Strategie zu deren Beweis ist das

Beweisprinzip der vollständigen Induktion:
Alle Aussagen $A(n)$ sind richtig, wenn man (I) *und* (II) *beweisen kann:*

(I) *$A(1)$ ist richtig (Induktionsanfang).*

(II) *Für jedes n, für welches $A(n)$ richtig ist, ist auch $A(n+1)$ richtig (Induktionsschluß).*

Beispiel 1: Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\boxed{A(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}\, n(n+1).}$$

(I) Für $n = 1$ stimmt diese Formel offensichtlich.

(II) Schluß von $A(n)$ auf $A(n+1)$: Unter der Voraussetzung, daß die Formel $A(n)$ gilt, gilt auch die Formel $A(n+1)$; mittels $A(n)$ folgt nämlich

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{1}{2}\, n(n+1)+(n+1) = \frac{1}{2}\,(n+1)(n+2). \quad \square$$

Die Summenformel $A(n)$ läßt sich auch eleganter beweisen. So löste Gauß (1777–1855) als Kind die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, durch Bildung der 50 gleichen Summen $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98, \ldots,$ $50 + 51$.

Beispiel 2: Für jede Zahl $x \neq 1$ gilt die *geometrische Summenformel*

$$\boxed{1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.}$$

(I) Für $n = 1$ stimmt diese Formel offensichtlich.

(II) Schluß von n auf $n + 1$:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \quad \square$$

Manchmal ist zu jeder ganzen Zahl $n \geq n_1$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Vollständige Induktion kann sinngemäß auch in dieser Situation angewendet werden. Als Induktionsanfang hat man $A(n_1)$ zu beweisen und der Induktionsschluß $A(n) \to A(n + 1)$ ist für die $n \geq n_1$ zu erbringen.

Ebenso wichtig wie der Beweis durch vollständige Induktion ist die *Konstruktion durch vollständige Induktion*, auch *rekursive Definition* genannt. Es soll jeder natürlichen Zahl n ein Element $f(n)$ einer Menge X zugeordnet werden durch

(I) die Angabe von $f(1)$ und

(II) eine Vorschrift F, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Element $f(n + 1)$ aus den Elementen $f(1), \ldots, f(n)$ zu berechnen gestattet:

$$f(n + 1) = F\big(f(1), \ldots, f(n)\big).$$

Beispielsweise erklärt man die Potenzen einer Zahl x durch

(I) $x^1 := x$ und

(II) die Rekursionsformel $x^{n+1} := x^n \cdot x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Daß ein solches Verfahren sinnvoll ist, besagt der sog. *Rekursionssatz.*

Für den Rekursionssatz wie überhaupt für die Begründung der natürlichen Zahlen mittels der Peanoschen Axiome verweisen wir den Leser auf den Band „Zahlen“ der Reihe Grundwissen bei Springer [4].

1.2 Fakultät und Binomialkoeffizienten

Für jede natürliche Zahl n definiert man $n!$, sprich *n-Fakultät*, durch

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Für $n!$ gibt es keine ähnlich einfache Formel wie für $1 + 2 + \ldots + n$. Man sieht leicht, daß $n!$ mit n ungeheuer rasch anwächst; zum Beispiel ist $10! = 3\,628\,800$ und $1000! > 4 \cdot 10^{2568}$ (siehe die Stirlingsche Formel in Kapitel 11.10).

Die Fakultät spielt eine große Rolle in der Kombinatorik. Es gilt:

Satz 1: *Die Anzahl aller Anordnungen n verschiedener Elemente ist $n!$.*

Beweis: Wir bezeichnen die Elemente mit $1, 2, \ldots, n$. Für $1, 2$ gibt es die zwei Anordnungen $1\,2$ und $2\,1$, für $1, 2, 3$ die sechs Anordnungen

$$\begin{array}{lll} 1\,2\,3, & 2\,1\,3, & 3\,1\,2, \\ 1\,3\,2, & 2\,3\,1, & 3\,2\,1. \end{array}$$

Für $n = 2$ und $n = 3$ ist die Behauptung damit bewiesen.

Schluß von n auf $n + 1$: Die Klasse derjenigen Anordnungen der Elemente $1, \ldots, n + 1$, die das Element k auf Platz eins haben bei beliebiger Anordnung der übrigen n Elemente, enthält nach Induktionsannahme $n!$ Anordnungen. Es gibt $n + 1$ derartige Klassen. Die Anzahl aller Anordnungen der Elemente $1, \ldots, n + 1$ ist also $(n + 1)n! = (n + 1)!$. □

Unter einer *Permutation* einer Menge M versteht man eine eineindeutige Abbildung der Menge auf sich. Ist $M = \{1, \ldots, n\}$, so bewirkt jede Permutation P eine Anordnung der Zahlen $1, \ldots, n$, nämlich $P(1), \ldots, P(n)$; umgekehrt wird jede Anordnung $k_1, \ldots, k_n$ dieser Zahlen durch eine Permutation von M bewirkt. Eine mit Satz 1 gleichwertige Aussage ist also

Satz 1′: *Die Anzahl der Permutationen n verschiedener Elemente ist $n!$.*

Es ist zweckmäßig, die Definition der Fakultät auf 0 auszudehnen. Dazu fordert man, daß die *Rekursionsformel*

$$\text{(F)} \qquad (n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$$

auch für $n = 0$ weiter gelte: $1! = 1 \cdot 0!$. Daher definiert man

$$0! := 1.$$

In Kapitel 17 wird die Fakultät unter sinngemäßer Beibehaltung der Formel (F) sogar auf alle reellen Zahlen $\neq -1, -2, -3, \ldots$ ausgedehnt.

Binomialkoeffizienten

Satz 2 und Definition: *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer nicht leeren Menge mit n Elementen ist im Fall $0 < k \leq n$*

$$\text{(1)} \qquad \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} =: \binom{n}{k}$$

und im Fall $k = 0$

$$1 =: \binom{n}{0}.$$

Beweis: Es sei zunächst $k \neq 0$. Zur Bildung k-elementiger Teilmengen stehen für ein erstes Element einer Teilmenge alle n Elemente der gegebenen Menge zur Auswahl; für ein zweites Element bleiben dann noch $n-1$ Elemente zur Auswahl usw. Insgesamt hat man $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ Möglichkeiten, k-elementige Teilmengen herzustellen. Dabei ergeben solche Möglichkeiten dieselbe k-elementige Teilmenge, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten k Elemente unterscheiden. Nach Satz 1 ist also die vorhin errechnete Anzahl durch $k!$ zu dividieren. Für die gesuchte Anzahl erhält man damit obigen Ausdruck.
Der Fall $k = 0$: Die leere Menge ist die einzige 0-elementige Teilmenge. Die gesuchte Zahl ist also 1. □

Beispiel: „6 aus 49“. Eine Menge mit 49 Elementen enthält

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$$

6-elementige Teilmengen. Die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto „6 aus 49“ die richtigen sechs Zahlen zu erraten, ist also ungefähr $1 : 14$ Millionen.

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen wegen ihres Auftretens in der Binomialentwicklung *Binomialkoeffizienten.*

Satz 3 (Binomialentwicklung): *Für jeden Exponenten $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\boxed{(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n.}$$

Beweis: Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Klammern aus den n Klammern $(1+x)$ der linken Seite auszuwählen und daraus dann x als Faktor zu nehmen. Beim Ausmultiplizieren des links stehenden Produktes entsteht also nach Satz 2 $\binom{n}{k}$-mal die Potenz x^k. □

Die Binomialkoeffizienten besitzen nach (1) auch die Darstellung

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Ferner gilt die *Rekursionsformel*:

$$\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.}$$

Für $k = 0$ ist diese Formel offensichtlich richtig; für $k > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k!\,(k+1)} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(k+1+n-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)\,n\cdots(n+1-k)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}. \qquad \square\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Rekursionsformel und der Randwerte $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ können alle Binomialkoeffizienten sukzessive berechnet werden. Besonders übersichtlich gestaltet sich die Rechnung im *Pascalschen Dreieck*:

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
. . .	. . . .

Die Ränder des Pascalschen Dreiecks bestehen aus lauter Einsen, und jede weitere Zahl ist die Summe der beiden schräg darüber stehenden.

Historisches. Das nach *Blaise Pascal* (1623–1662) benannte Dreieck findet sich bereits 1527 in einem Lehrbuch der Arithmetik. Pascal (Philosoph und Mathematiker, eine der großen Gestalten des 17. Jahrhunderts, Verfasser der *Pensées*) hat Beziehungen dieses *triangle arithmétique* zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie hergestellt.

1.3 Aufgaben

1. Man beweise:
   a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1);$
   b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{1}{2}\,n(n+1)\right)^2;$
   c) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \quad (x \neq 1).$

2. Für die *Potenzsummen*

$$S_n^p := 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$$

beweise man die von Pascal stammende Identität

$$(p+1)S_n^p + \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \binom{p+1}{3} S_n^{p-2} + \ldots + S_n^0 = (n+1)^{p+1} - 1.$$

Man berechne damit S_n^4; siehe auch 14.3 (17).

3. Man beweise und deute im Pascalschen Dreieck

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

4. Eine Menge mit n Elementen besitzt genau 2^n Teilmengen.

5. Grundaufgabe der *klassischen* Statistik: Auf n Zellen sollen k unterscheidbare Teilchen so verteilt werden, daß in der Zelle i genau k_i Teilchen liegen, $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$. Eine Anordnung innerhalb jeder Zelle werde nicht berücksichtigt.

   Man zeige: Es gibt genau $\dfrac{k!}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!}$ verschiedene Verteilungen.

6. Grundaufgabe der *Fermi*-Statistik: Auf n Zellen sollen k nicht unterscheidbare Teilchen so verteilt werden, daß jede Zelle höchstens ein Teilchen enthält.

   Man zeige: Es gibt genau $\dbinom{n}{k}$ verschiedene Verteilungen.

7. Grundaufgabe der *Bose-Einstein*-Statistik: Auf n Zellen sollen k nicht unterscheidbare Teilchen verteilt werden, wobei jede Zelle beliebig viele Teilchen aufnehmen kann.

   Man zeige: Es gibt genau $\dbinom{n+k-1}{k}$ verschiedene Verteilungen.

   Hinweis: Bezeichnet man die Teilchen mit $\bullet$ und die Trennwände mit $|$, so entspricht jeder Verteilung ein Muster $\bullet | \bullet \bullet || \ldots \bullet | \bullet$; zum Beispiel im Fall $n = 6$, $k = 7$ der Verteilung $|\bullet\bullet|\bullet\bullet|\ |\ |\bullet\bullet\bullet|\ |$ das Muster $\bullet\bullet | \bullet\bullet ||| \bullet\bullet\bullet |$.

8. Das *Schubfachprinzip:* Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$. Man zeige, daß es für jede Abbildung $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$ mit $n > m$ zwei verschiedene Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_n$ gibt so, daß $f(n_1) = f(n_2)$.

9. Es sei $a_1, \ldots, a_n$ irgendeine Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und n sei ungerade. Mit Hilfe des Schubfachprinzips zeige man, daß das Produkt $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ gerade ist.