# 1. Unendliche Produkte holomorpher Funktionen

> Allgemeine Sätze über die Convergenz der unendlichen Producte sind zum großen Theile bekannt. (WEIERSTRASS 1854).

Unendliche Produkte traten erstmals 1579 bei F. VIETA auf, Opera, S. 400, Leyden 1646; er gab für die Kreiszahl $\pi$ die Formel

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

an, (vgl. [280], S. 104 u. S. 118). J. WALLIS fand 1655, *Arithmetica infinitorum*, Opera I, S. 468, das berühmte Produkt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \cdot \ldots,$$

(vgl.[280], S. 104 u. S. 119). Aber erst L. EULER hat systematisch mit unendlichen Produkten gearbeitet und wichtige Produktentwicklungen aufgestellt; vgl. Kapitel 9 seiner *Introductio*. Die ersten Konvergenzkriterien rühren von CAUCHY her, *Cours d'Analyse,* S. 562 ff. Ihren festen Platz in der Analysis fanden unendliche Produkte spätestens 1854 durch WEIERSTRASS, [275, S. 172 ff.][1]

Ein Ziel dieses Kapitels ist die Herleitung und Diskussion des EULERschen Produktes

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{\nu^2})$$

für die Sinusfunktion, wir geben im Paragraphen 3 1.3 zwei Beweise.

[1] Bereits 1847 hat EISENSTEIN in seiner lange vergessenen Arbeit [58] konsequent unendliche Produkte benutzt. Er operiert auch mit *bedingt konvergenten* Produkten (und Reihen) und diskutiert sorgfältig die damals nur wenig bekannte Problematik der bedingten und absoluten Konvergenz; er sagt aber nichts zu Fragen der kompakten Konvergenz. So werden unendliche Produkte bedenkenlos logarithmiert und unendliche Reihen ohne weiteres gliedweise differenziert; diese Sorglosigkeit mag vielleicht erklären, warum WEIERSTRASS die EISENSTEINsche Arbeit nirgends zitiert.

Da unendliche Produkte in der Lehrbuchliteratur zur Infinitesimalrechnung in geringerem Umfange behandelt werden, stellen wir im Paragraphen 1.1 zunächst grundlegende Fakten über unendliche Produkte von Zahlen und holomorphen Funktionen zusammen. Im Paragraphen 1.2 werden *normal konvergente* unendliche Produkte $\prod f_\nu$ von Funktionen untersucht, insbesondere wird der wichtige Satz über die *logarithmische Differentiation von Produkten* hergeleitet.

## 1.1 Unendliche Produkte

Wir betrachten vorab unendliche Produkte von Folgen komplexer Zahlen. Im zweiten Abschnitt wird das Nötigste zur Theorie der kompakt konvergenten Produkte von Funktionen gesagt. Eine detaillierte Diskussion unendlicher Produkte findet man bei [140].

**1.1.1 Unendliche Produkte von Zahlen.** Ist $(a_\nu)_{\nu\geq k}$ eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Folge $\left(\prod\limits_{\nu=k}^{n} a_\nu\right)_{n\geq k}$ der Partialprodukte ein (*unendliches*) *Produkt* mit den *Faktoren* $a_\nu$. Man schreibt $\prod\limits_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$ oder $\prod\limits_{\nu\geq k} a_\nu$ oder einfach $\prod a_\nu$; im allgemeinen ist $k=0$ oder $k=1$.

Würde man nun – analog wie bei Reihen – ein Produkt $\prod a_\nu$ konvergent nennen, wenn die Folge der Partialprodukte einen Limes $a$ hat, so ergäben sich unerwünschte Pathologien: zum einen wäre ein Produkt bereits konvergent mit Wert 0, wenn nur ein einziges Folgenglied $a_\nu$ Null wäre; zum anderen könnte $\prod a_\nu$ Null werden auch dann, wenn kein einziger Faktor Null ist (z.B. wenn stets $|a_\nu| \leq q < 1$). Man wird also Vorsichtsmaßnahmen gegen Nullfaktoren und Nullkonvergenz treffen. Man führt die Partialprodukte

$$p_{m,n} := a_m a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{\nu=m}^{n} a_\nu, \quad k \leq m \leq n,$$

ein und nennt das Produkt $\prod a_\nu$ *konvergent*, wenn es einen Index $m$ gibt, so daß die Folge $(p_{m,n})_{n\geq m}$ einen Limes $\widehat{a}_m \neq 0$ hat. Man nennt dann $a := a_k a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_{m-1}\widehat{a}_m$ den Wert des Produktes und schreibt suggestiv:

$$\prod a_\nu := a_k a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_{m-1}\widehat{a}_m = a.$$

Die Zahl $a$ ist unabhängig vom Index $m$: wegen $\widehat{a}_m \neq 0$ gilt $a_n \neq 0$ für alle $n \geq m$, daher hat auch für jedes feste $l > m$ die Folge $(p_{l,n})_{n\geq l}$ einen Limes $\widehat{a}_l \neq 0$, und es gilt $a = a_k a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_{l-1}\widehat{a}_l$. – Nicht konvergente Produkte heißen *divergent*. Man zeigt sofort:

*Ein Produkt* $\prod a_\nu$ *ist genau dann konvergent, wenn nur endlich viele Faktoren Null sind, und wenn die mit allen von Null verschiedenen Gliedern gebildete Partialproduktfolge einen Limes* $\neq 0$ *hat.*

Durch die getroffenen Einschränkungen wird die Sonderrolle der Null optimal berücksichtigt. Wie für endliche Produkte gilt (per definitionem):

*Ein konvergentes Produkt* $\prod a_\nu$ *ist Null genau dann, wenn wenigstens ein Faktor* $a_\nu$ *Null ist.*

Wir notieren weiter:

*Falls* $\prod\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *konvergiert, so existiert* $\widehat{a}_n := \prod\limits_{\nu=n}^{\infty} a_\nu$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Es gilt* $\lim \widehat{a}_n = 1$ *und* $\lim a_n = 1$.

*Beweis.* Wir dürfen $a := \prod a_\nu \neq 0$ annehmen. Dann gilt $\widehat{a}_n = a/p_{0,n-1}$. Wegen $\lim p_{0,n-1} = a$ folgt $\lim \widehat{a}_n = 1$. Die Gleichung $\lim a_n = 1$ gilt, da stets $\widehat{a}_n \neq 0$ und $a_n = \widehat{a}_n / \widehat{a}_{n+1}$. $\square$

*Beispiele.*

a) Sei $a_0 := 0, a_\nu := 1$ für $\nu \geq 1$. Es gilt $\prod a_\nu = 0$.

b) Sei $a_\nu := 1 - 1/\nu^2, \nu \geq 2$. Es gilt $p_{2,n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})$, also $\prod\limits_{\nu \geq 2} a_\nu = \frac{1}{2}$.

c) Sei $a_\nu := 1 - 1/\nu, \nu \geq 2$. Es gilt $p_{2,n} = 1/n$, also $\lim p_{2,n} = 0$. Das Produkt $\prod\limits_{\nu \geq 2} a_\nu$ ist divergent (da kein Faktor verschwindet), wenngleich $\lim a_n = 1$.

In 4.3.2 benötigen wir folgende Verallgemeinerung von c):

d) Es sei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *eine Folge reeller Zahlen mit* $a_n \geq 0$ *und* $\sum(1 - a_\nu) = +\infty$. *Dann gilt* $\lim \prod\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu = 0$.

*Beweis.* Es gilt $0 \leq p_{0,n} = \prod\limits_0^n a_\nu \leq \exp[-\sum\limits_0^n (1 - a_\nu)], n \in \mathbb{N}$ da $t \leq e^{t-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen $\sum(1 - a_\nu) = +\infty$ folgt $\lim p_{0,n} = 0$. $\square$

Es ist *nicht* sinnvoll, in Analogie zu Reihen den Begriff der absoluten Konvergenz einzuführen. Würde man ein Produkt $\prod a_\nu$ absolut konvergent nennen, wenn $\prod |a_\nu|$ konvergiert, so würde Konvergenz stets absolute Konvergenz implizieren, hingegen wäre $\prod(-1)^\nu$ absolut konvergent, aber nicht konvergent! – Die erste umfassende Darstellung der Konvergenztheorie unendlicher Produkte gab 1889 A. Pringsheim, vgl. [218].

**Aufgabe.**

a) $\prod\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu^3-1}{\nu^3+1} = \frac{2}{3}$, $\quad \prod\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu+(-1)^{\nu+1}}{\nu} = 1$,

b) $\prod\limits_{\nu=2}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^\nu} = \frac{2}{\pi}$ $\quad$ (VIETA-Produkt).

**1.1.2 Unendliche Produkte von Funktionen.** Es bezeichnet $X$ einen *lokal-kompakten metrischen* Raum. Bekanntlich stimmen für solche Räume die Begriffe der *kompakten Konvergenz* und der *lokal gleichmäßigen Konvergenz* überein, vgl. I.3.1.3. Für eine Folge $f_\nu \in \mathcal{C}(X)$ von in $X$ stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ heißt das (unendliche) Produkt $\prod f_\nu$ *kompakt konvergent* in $X$, wenn es zu jedem Kompaktum $K$ in $X$ einen Index $m = m(K)$ gibt, so dass die Folge $p_{m,n} := f_m f_{m+1} \cdot \ldots \cdot f_n, n \geq m$, in $K$ *gleichmäßig* gegen eine in $K$ *nullstellenfreie* Funktion $\widehat{f}_m$ konvergiert. Für jeden Punkt $x \in X$ existiert dann

$$f(x) := \prod f_\nu(x) \in \mathbb{C} \quad \text{im Sinne von Abschnitt 1;}$$

wir nennen die Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ den *Limes des Produktes* und schreiben

$$f = \prod f_\nu; \quad \text{auf} \quad K \quad \text{gilt dann} \quad f|K = (f_0|K) \cdot \ldots \cdot (f_{m-1}|K) \cdot \widehat{f}_m.$$

Es folgt unmittelbar (mit dem Stetigkeitssatz I.3.1.2):

a) *Konvergiert $\prod f_\nu$ in $X$ kompakt gegen $f$, so ist $f$ stetig in $X$, und die Folge $f_\nu$ konvergiert in $X$ kompakt gegen* 1.

b) *Mit $\prod f_\nu$ und $\prod g_\nu$ konvergiert auch $\prod f_\nu g_\nu$ kompakt in $X$:*

$$\prod f_\nu g_\nu = \left(\prod f_\nu\right)\left(\prod g_\nu\right).$$

Vorrangig interessiert uns der Fall, dass $X$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist, und dass alle Funktionen $f_\nu$ holomorph sind. Dann ist klar auf Grund des WEIERSTRASSschen Konvergenzsatzes (vgl. I.8.4.1):

c) *Jedes in einem Gebiet $G$ in $\mathbb{C}$ kompakt konvergente Produkt $\prod f_\nu$ von in $G$ holomorphen Funktionen $f_\nu$ hat einen in $G$ holomorphen Limes $f$.*

*Beispiele.*

a) Die Funktionen $f_\nu := \left(1 + \dfrac{2z}{2\nu - 1}\right) \Big/ \left(1 + \dfrac{2z}{2\nu+1}\right)$, $\nu \geq 1$, sind holomorph im Einheitskreis $\mathbb{E}$. Es gilt

$$p_{2,n} = \left(1 + \frac{2}{3}z\right) \Big/ \left(1 + \frac{2z}{2n+1}\right)^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{E}), \quad \text{also} \quad \lim p_{2,n} = 1 + \frac{2}{3}z,$$

das Produkt $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ konvergiert daher in $\mathbb{E}$ kompakt gegen $1 + 2z$.

b) Sei $f_\nu(z) \equiv z$ für alle $\nu \geq 0$. Im Einheitskreis $E$ konvergiert das Produkt $\prod\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ nicht (nicht einmal punktweise), denn $p_{m,n} = z^{n-m+1}$ ist für jedes $m$ eine Nullfolge.

Wir notieren ein wichtiges hinreichendes

**Konvergenzkriterium 1.1.** *Es sei $f_\nu \in \mathscr{C}(X)$, $\nu \geq 0$. Es gebe ein $m \in \mathbb{N}$, so dass jede Funktion $f_\nu$, $\nu \geq m$, einen Logarithmus $\log f_\nu \in \mathscr{C}(X)$ hat. Konvergiert dann $\sum_{\nu \geq m} \log f_\nu$ in $X$ kompakt gegen $s \in \mathcal{C}(X)$, so konvergiert $\prod f_\nu$ in $X$ kompakt gegen $f_0 f_1 \cdot \ldots \cdot f_{m-1} \exp s$.*

*Beweis.* Da die Folge $s_n := \sum_{\nu=m}^{n} \log f_\nu$ in $X$ kompakt gegen $s$ konvergiert, so konvergiert die Folge $p_{m,n} = \prod_{\nu=m}^{n} f_\nu = \exp s_n$ in $X$ kompakt gegen $\exp s$. Da $\exp s$ nullstellenfrei ist, folgt die Behauptung.[2] □

## 1.2 Normale Konvergenz

Für Anwendungen ist das Konvergenzkriterium 1.1 kaum geeignet, weil aus Logarithmen gebildete Reihen i.a. schwierig zu handhaben sind. Überdies benötigt man – in Analogie zu unendlichen Reihen – ein Kriterium, das die kompakte Konvergenz *aller Teilprodukte* und *aller umgeordneten Produkte* garantiert. Hier erweist sich wiederum wie bei Reihen die „normale Konvergenz" der „kompakten Konvergenz" überlegen. Wir erinnern an diesen Konvergenzbegriff für Reihen, wobei wir den Raum $X$ wieder als lokal-kompakt annehmen: dann ist $\sum f_\nu$, $f_\nu \in \mathscr{C}$, normal konvergent in $X$ genau dann, wenn $\sum |f_\nu|_K < \infty$ für jedes Kompaktum $K \subset X$ (vgl. Abschnitt I.3.3.2). Normal konvergente Reihen sind kompakt konvergent; normale Konvergenz bleibt erhalten bei Übergang zu Teilreihen und bei beliebiger Gliederumordnung (vgl. Satz I.3.3.1).

Wir schreiben die Faktoren eines Produktes $\prod f_\nu$ oft in der Form $f_\nu = 1 + g_\nu$; nach 1.2.1 a) ist dann $g_\nu$ eine kompakt konvergente Nullfolge, falls $\prod f_\nu$ kompakt konvergiert.

**1.2.1 Normale Konvergenz.** Ein Produkt $\prod f_\nu$ mit $f_\nu = 1 + g_\nu \in \mathcal{C}(X)$ heißt *normal konvergent in* $X$, wenn die Reihe $\sum g_\nu$ in $X$ normal konvergiert. Man überlegt sich sofort:
Ist $\prod\limits_{\nu \geq 0} f_\nu$ normal konvergent in $X$, so konvergiert

– für jede Bijektion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ das Produkt $\prod\limits_{\nu \geq 0} f_{\tau(\nu)}$ normal in $X$,

– jedes Teilprodukt $\prod\limits_{j \geq 0} f_{\nu_j}$ normal in $X$,

[2] Den einfachen Beweis dafür, daß kompakte Konvergenz von $s_n$ gegen $s$ kompakte Konvergenz von $\exp s_n$ gegen $\exp s$ impliziert, findet man in I.5.4.3 (F).

– das Produkt $\prod f_\nu$ kompakt in $X$.

Wir werden sehen, dass der Begriff der normalen Konvergenz ein guter Konvergenzbegriff ist. Zunächst ist nicht einmal klar, dass normal konvergente Produkte überhaupt einen Limes haben. Wir zeigen sofort darüber hinaus:

**Umordnungssatz 1.2.** *Es sei $\prod_{\nu\ge 0} f_\nu$ normal konvergent in $X$. Dann gibt es eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, so dass für jede Bijektion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ das umgeordnete Produkt $\prod\limits_{\nu\ge 0} f_{\tau(\nu)}$ in $X$ kompakt gegen $f$ konvergiert.*

*Beweis.* Für $w \in \mathbb{E}$ gilt: $\log(1+w) = \sum\limits_{\nu\ge 1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} w^\nu$. Es folgt:

$$|\log(1+w)| \le |w|(1+|w|+|w|^2+\dots), \text{ also } |\log(1+w)| \le 2|w|, \text{ falls } |w| \le \frac{1}{2}.$$

Sei nun $K \subset X$ irgendein Kompaktum und $g_n = f_n - 1$. Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für $n \ge m$ gilt: $|g_n|_K \le \frac{1}{2}$. Für alle diese $n$ folgt:

$$\log f_n = \sum_{\nu\ge 1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} g_n^\nu \in \mathscr{C}(K), \quad |\log f_n|_K \le 2|g_n|_K.$$

Wir sehen $\sum\limits_{\nu\ge m} |\log f_\nu|_K \le 2 \sum\limits_{\nu\ge m} |g_\nu|_K < \infty$. Nach dem Umordnungssatz für Reihen (vgl. I.0.4.3) konvergiert daher für jede Bijektion $\sigma$ von $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N} : n \ge m\}$ die Reihe $\sum\limits_{\nu\ge m} \log f_{\sigma(\nu)}$ in $K$ gleichmäßig gegen $\sum\limits_{\nu\ge m} \log f_\nu$, daher konvergieren nach (1.1.2) für solche $\sigma$ die Produkte $\prod\limits_{\nu\ge m} f_{\sigma(\nu)}$ und $\prod\limits_{\nu\ge m} f_\nu$ in $K$ gleichmäßig gegen dieselbe Grenzfunktion. Da sich eine beliebige Bijektion $\tau$ von $\mathbb{N}$ (= Permutation von $\mathbb{N}$) nur um endlich viele Transpositionen (welche nichts an der Konvergenz ändern) von einer Permutation $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sigma'(\mathbb{N}_m) = \mathbb{N}_m$ unterscheidet, folgt die Existenz einer Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, so dass jedes Produkt $\prod\limits_{\nu\ge 0} f_{\sigma(\nu)}$ in $X$ kompakt gegen $f$ konvergiert. □

**Korollar 1.3.** *Sei $f = \prod\limits_{\nu\ge 0} f_\nu$ normal konvergent in $X$. Dann folgt:*

1) *Jedes Produkt $\widehat{f}_n := \prod\limits_{\nu\ge 0} f_\nu$ konvergiert normal in $X$, es gilt:*

$$f = f_0 f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \widehat{f}_n$$

2) *Ist $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{1}^{\infty} N_\kappa$ eine (endliche oder unendliche) Zerlegung von $\mathbb{N}$ paarweise disjunkte Teilmengen $N_1, \dots, N_\kappa, \dots$ so konvergiert jedes Produkt $\prod\limits_{\nu\in N_\kappa} f_\nu$ normal in $X$, es gilt:*

$$f = \prod_{\kappa=1}^{\infty} \left( \prod_{\nu\in N_\kappa} f_\nu \right).$$

Produkte können kompakt konvergieren, ohne normal konvergent zu sein, wie z.B. $\prod\limits_{\nu\geq 1}(1+g_\nu)$, $g_\nu := (-1)^{\nu-1}/\nu$, zeigt: Es gilt stets $(1+g_{2\nu-1})(1+g_{2\nu}) = 1$, also $p_{1,n} = 1$ für gerades und $p_{1,n} = 1+1/n$ für ungerades $n$. Das Produkt $\prod\limits_{\nu\geq 1}(1+g_\nu)$ konvergiert daher kompakt in $\mathbb{C}$ gegen 1. In diesem Beispiel ist das Teilprodukt $\prod\limits_{\nu\geq 1}(1+g_{2\nu-1})$ nicht mehr konvergent!

In allen späteren Anwendungen (Sinusprodukt, JACOBIsches Tripel-Produkt, WEIERSTRASSsche Faktorielle, allgemeine WEIERSTRASS-Produkte) werden wir stets normal konvergente Produkte vorfinden.

**Aufgaben.**

1) Man beweise: Sind die Produkte $\prod f_\nu$ und $\prod g_\nu$ in $X$ normal konvergent, so konvergiert auch das Produkt $\prod(f_\nu g_\nu)$ normal in $X$.
2) Zeigen Sie, dass die folgenden Produkte im Einheitskreis $\mathbb{E}$ normal konvergieren, und beweisen Sie die Identitäten

$$\prod_{\nu\geq 0}(1+z^{2^\nu}) = \frac{1}{1-z}, \quad \prod_{\nu\geq 1}\Big((1+z^\nu)(1-z^{2\nu-1})\Big) = 1.$$

**1.2.2 Normal konvergente Produkte holomorpher Funktionen.** Die Nullstellenmenge $N(f)$ jeder in $G$ holomorphen Funktion $f \neq 0$ ist lokal endlich in $G$ und somit eine höchstens abzählbare unendliche Menge (vgl. I.8.1.3). Für *endlich* viele Funktionen $f_0, f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \in \mathcal{O}(G)$, $f_\nu \neq 0$, gilt

$$N(f_0 \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_n) = \bigcup_0^n N(f_\nu) \quad \text{und} \quad o_c(f_0 \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_n) = \sum_0^n o_c(f_\nu), \ c \in G,$$

wobei $o_c(f)$ die Nullstellenordnung von $f$ in $c$ bezeichnet (I.8.1.4). Für unendliche Produkte folgt

**Satz 1.4.** *Es sei $f = \prod f_\nu$, $f_\nu \neq 0$, ein in $G$ normal konvergentes Produkt von in $G$ holomorphen Funktionen. Dann gilt*

$$f \neq 0, \quad N(f) = \bigcup N(f_\nu), \quad o_c(f) = \sum o_c(f_\nu) \ \textit{ für alle } \ c \in G.$$

*Beweis.* Sei $c \in G$ fixiert. Da $f(c) = \prod f_\nu(c)$ konvergiert, gibt es einen Index $n$, so dass $f_\nu(c) \neq 0$ für alle $\nu \geq n$. Nach Korollar 1.3 gilt $f = f_0 \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot \widehat{f_n}$, wobei $\widehat{f_n} := \prod\limits_{\nu\geq n} f_\nu \in \mathcal{O}(G)$ nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzsatz. Es folgt

$$o_c(f) = \sum_0^{n-1} o_c(f_\nu) + o_c(\widehat{f_n}) \ \text{ mit } \ o_c(\widehat{f_n}) = 0 \ \ (\text{da } \ (\widehat{f_n})(c) \neq 0).$$

Damit ist die Summenregel für unendliche Produkte bewiesen. Speziell gilt $N(f) = \bigcup N(f_\nu)$. Wegen $f_\nu \neq 0$ ist jede Menge $N(f_\nu)$ und daher auch ihre abzählbare Vereinigung $N(f)$ abzählbar, womit auch $f \neq 0$ folgt. $\square$

*Bemerkung.* Der Satz gilt bereits, falls die Konvergenz des Produktes in $G$ nur kompakt ist. Der Beweis bleibt wörtlich richtig, denn es ist leicht einzusehen, dass jedes „Restprodukt“ $\widehat{f}_n = \prod\limits_{\nu \geq n} f_\nu$ in $G$ kompakt konvergiert.

Im nächsten Abschnitt benötigen wir:

*Ist $f = \prod f_\nu$, $f_\nu \in \mathcal{O}(G)$, normal konvergent in $G$, so konvergiert die Folge $\widehat{f}_n = \prod\limits_{\nu \geq n} f_\nu \in \mathcal{O}(G)$ in $G$ kompakt gegen* 1.

*Beweis.* Es sei $\widehat{f}_m \neq 0$. Dann ist $A := N(\widehat{f}_m)$ lokal endlich in $G$. Alle Partialprodukte $P_{m,n-1} \in \mathcal{O}(G), n > m$, sind nullstellenfrei in $G \backslash A$, es gilt

$$\widehat{f}_n(z) = \widehat{f}_m(z) \cdot (1/p_{m,n-1}(z)) \quad \text{für alle} \quad z \in G \backslash A.$$

Nun konvergiert die Folge $1/p_{m,n-1}$ in $G \backslash A$ kompakt gegen $1/\widehat{f}_m$. Daher konvergiert die Folge $\widehat{f}_n \in G \backslash A$ kompakt gegen 1. Nach dem verschärften Konvergenzsatz von Weierstrass (vgl. I.8.5.4) konvergiert diese Folge dann auch in $G$ kompakt gegen 1. □

**Aufgabe.** Zeigen Sie, dass $= \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \cos \frac{z}{2\nu}$ in $\mathbb{C}$ normal konvergiert. Bestimmen Sie $N(f)$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ eine Nullstelle $k$-ter Ordnung von $f$ gibt, und unter Benutzung des Sinusproduktes aus (1.2) dass gilt:

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \cos \frac{z}{2\nu} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{2\nu - 1}{z} \sin \frac{z}{2\nu - 1} \right).$$

**1.2.3 Logarithmische Differentiation.** Die *logarithmische Ableitung* einer meromorphen Funktion $h \in \mathcal{M}(G), h \neq 0$, ist per definitionem die Funktion $h'/h \in \mathcal{M}(G)$ (vgl. hierzu I.9.3.1), wo der Fall von nullstellenfreien holomorphen Funktionen diskutiert wird). Für endliche Produkte $h = h_1 h_2 \cdot \ldots \cdot h_m, h_\mu \in \mathcal{M}(G)$ gilt:

*Summenformel:* $h'/h = h_1'/h_1 + h_2'/h_2 + \cdots + h_m'/h_m$.

Diese Formel überträgt sich auf unendliche Produkte holomorpher Funktionen.

**Differentiationssatz 1.5.** *Es sei $f = \prod f_\nu$ ein in $G$ normal konvergentes Produkt holomorpher Funktionen. Dann ist $\sum f_\nu'/f_\nu$ eine in $G$ normal konvergente Reihe meromorpher Funktionen, und es gilt:*

$$f'/f = \sum f_\nu'/f_\nu \in \mathcal{M}(G).$$

*Beweis.* 1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (Korollar 1.3 ):

$$f = f_0 f_1 \dots f_{n-1} \widehat{f_n} \quad \text{mit} \quad \widehat{f_n} := \prod_{\nu \geq n} f_\nu, \quad \text{also} \quad f'/f = \sum_{\nu=1}^{n-1} f'_\nu / f_\nu + \widehat{f}'_n / \widehat{f_n}.$$

Da die Folge $\widehat{f_n}$ in $G$ kompakt gegen 1 konvergiert vgl. 1.2, so konvergieren die Ableitungen $\widehat{f'_n}$ nach WEIERSTRASS in $G$ kompakt gegen 0. Zu jeder Scheibe $B$ mit $\overline{B} \subset G$ gibt es daher ein $m \in \mathbb{N}$, sodass alle $f_n$, $n \geq m$, nullstellenfrei in $B$ sind und die Folge $\widehat{f'_n}/\widehat{f_n} \in \mathcal{O}(B)$, $n \geq m$, in $B$ kompakt gegen Null konvergiert. Damit ist gezeigt, dass $\sum f'_\nu / f_\nu$ in $G$ kompakt gegen $f'/f$ konvergiert.

2) Wir zeigen nun, dass $\sum f'_\nu / f_\nu$ in $G$ normal konvergiert. Sei $g_\nu := f_\nu - 1$. Wir müssen zu jedem Kompaktum $K$ in $G$ einen Index $m$ angeben, so dass jede Polstellenmenge $P(f'_\nu / f_\nu)$, $\nu \geq m$, punktfremd zu $K$ ist und dass gilt:

$$\sum_{\nu \geq m} |f'_\nu / f_\nu|_K = \sum_{\nu \geq m} |g'_\nu / f_\nu|_K < \infty \quad \text{vgl. I.11.1.1} \tag{1.1}$$

Wir wählen $m$ so groß, dass alle Mengen $N(f_\nu) \cap K$, $\nu \geq m$, leer sind und dass $\min\limits_{z \in K} |f_\nu(z)| \geq \frac{1}{2}$ für alle $\nu \geq m$ (dies ist möglich, da die Folge $f_\nu$ kompakt gegen 1 konvergiert). Nun gibt es nach den CAUCHYschen Abschätzungen für Ableitungen ein Kompaktum $L \supset K$ in $G$ und eine Konstante $M > 0$, so dass für alle $\nu$ gilt $|g'_\nu|_K \leq M |g_\nu|_L$ vgl. Korollar I.8.3.3. Damit gilt $|g'_\nu / f_\nu|_K \cdot (\min\limits_{z \in K} |f_\nu(z)|)^{-1} \leq 2M |g_\nu|_L$ für $\nu \geq m$. Da $\sum |g_\nu|_L < \infty$ nach Voraussetzung, so folgt (1.1). □

Der Differentiationssatz ist für konkrete Rechnungen ein wichtiges Hilfsmittel, wir werden ihn z.B. im nächsten Kapitel zur Herleitung des EULER-Produkts für den Sinus heranziehen, eine weitere Anwendung findet sich in 2.2.3. Der Satz gilt wörtlich, wenn man das Wort „normal" durch „kompakt" ersetzt (Beweis).

Unter Benutzung des Differentiationssatzes kann man zeigen:

*Ist $f$ holomorph im Nullpunkt, so lässt sich $f$ in einer Kreisscheibe $B$ um* 0 *in eindeutiger Weise als ein Produkt*

$$f(z) = b z^k \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + b_\nu z^\nu), \quad b, b_\nu \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N},$$

darstellen, das in $B$ normal gegen $f$ konvergiert.

Dieser Satz wurde 1929 von J.F. RITT bewiesen [228]. Es wird nicht behauptet, dass das Produkt in der *größten* Kreisscheibe um 0, wo $f$ holomorph ist, konvergiert. Überzeugende Anwendungen dieser Produktentwicklung, die ein multiplikatives Analogon zur Taylorentwicklung ist, scheint es nicht zu geben.

## 1.3 Das Sinusprodukt $\sin \pi z = \pi z \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z^2/\nu^2)$

Das Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z^2/\nu^2)$ ist in $\mathbb{C}$ normal konvergent, da $\sum_{\nu=1}^{\infty} z^2/\nu^2$ in $\mathbb{C}$ normal konvergiert. EULER hat 1734 erkannt

$$\boxed{\sin \pi z = \pi z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.} \tag{1.2}$$

Wir geben für diese Formel zwei Beweise.

**1.3.1 Standardbeweis (mittels logarithmischer Differentiation und der Partialbruchreihe des Cotangens).** Mit $f_\nu := 1 - z^2/\nu^2$ und $f(z) := \pi z \prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ gilt

$$f'_\nu / f_\nu = \frac{2z}{z^2 - \nu^2}, \quad \text{also} \quad f'(z)/f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2}.$$

Hier steht rechts die Funktion $\pi \cot \pi z$ (vgl. Satz I.11.2.1). Da diese auch die logarithmische Ableitung von $\sin \pi z$ ist, so gilt [3]

$$f(z) = c \sin \pi z \text{ mit } c \in \mathbb{C}^\times. \text{ Wegen } \lim_{z \to 0} \tfrac{f(z)}{\pi z} = 1 = \lim_{z \to 0} \tfrac{\sin \pi z}{\pi z} \text{ folgt } c = 1.$$

Durch Einsetzen spezieller Werte für $z$ in (1.2) entstehen interessante (und uninteressante) Formeln. Für $z := \frac{1}{2}$ folgt die Produktformel

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu}{2\nu - 1} \cdot \frac{2\nu}{2\nu + 1} \quad \text{(WALLIS 1655).}$$

Für $z := 1$ erhält man die triviale Gleichung $\frac{1}{2} = \prod_{\nu=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)$, (vgl. Beispiel 1.1,b); hingegen entsteht für $z := i$ wegen $\sin \pi i = \frac{i}{2}(e^\pi - e^{-\pi})$ die bizarre Formel

---

[3] Sind $f \neq 0, g \neq 0$ zwei in einem Gebiet $G$ meromorphe Funktionen mit gleicher logarithmischer Ableitung, so gilt $f = cg$ mit $c \in \mathbb{C}^*$. – Zum Beweis bemerkt man, dass für $f/g \in \mathscr{M}(G)$ gilt: $(f/g)' \equiv 0$.

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}.$$

Mit Hilfe von $\sin z \cos z = \frac{1}{2}\sin 2z$ und Korollar 1.3 erhält man

$$\cos \pi z \sin \pi z = \pi z \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\left(\tfrac{2z}{\nu}\right)^2\right) = \pi z \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\left(\tfrac{2z}{2\nu}\right)^2\right)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\left(\tfrac{2z}{2\nu-1}\right)^2\right),$$

also die EULERsche Produktdarstellung das Cosinus:

$$\boxed{\cos \pi z = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2\nu-1)^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.} \tag{1.3}$$

Mittels seines Sinusproduktes konnte EULER 1734/35 grundsätzlich alle Zahlen $\zeta(2n) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2n}$ berechnen, $n = 1, 2, \ldots$ (vgl. hierzu auch I.11.3.2). So folgt z.B. sofort $\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$: Da $f_n(z) := \prod_{\nu=1}^{n}(1-z^2/\nu^2) = 1 - \left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-2}\right)z^2 + \ldots$ kompakt gegen $f(z) := (\sin \pi z)/(\pi z) = 1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + \ldots$ strebt, so konvergiert $\frac{1}{2}f_n''(0) = -\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-2}$ gegen $\frac{1}{2}f''(0) = -\frac{1}{6}\pi^2$. $\square$

Mit Hilfe der WALLISschen Formel lässt sich das GAUSSsche Fehlerintegral $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ elementar bestimmen. Für $I_n := \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2}dx$ gilt:

$$2I_n = (n-1)I_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad \text{(partielle Integration)}.$$

Hieraus entsteht durch Induktion, da $I_1 = \frac{1}{2}$:

$$2^k I_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)I_0, \quad 2I_{2k+1} = k!\,, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Da $I_{n+1} + 2tI_n + t^2 I_{n-1} = \int_0^{\infty} x^{n-1}(x+t)^2 e^{-x^2}dx$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt

$$I_n^2 < I_{n-1}I_{n+1}, \quad \text{also} \quad 2I_n^2 < nI_{n-1}^2.$$

Mit (1.4) erhält man nun

$$\frac{(k!)^2}{4k+2} = \frac{2}{2k+1}I_{2k+1}^2 < I_{2k}^2 < I_{2k-1}I_{2k+1} = \frac{(k!)^2}{4k}.$$

Dies lässt sich auch so schreiben:

$$I_{2k}^2 = \frac{(k!)^2}{4k+2}(1+\varepsilon_k) \quad \text{mit} \quad 0 < \varepsilon_k < \frac{1}{2k}.$$

Trägt man hier $I_0$ gemäß (1.4) ein, so entsteht

$$2I_0^2 = \frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)]^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)]^2 (2k+1)} (1 + \varepsilon_k).$$

Wegen $\lim \varepsilon_k = 0$ und der WALLISschen Formel folgt $2I_0^2 = \frac{1}{2}\pi$, also $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. □

Diese Herleitung gab 1890 T.-J. STIELTJES: *Note sur l'integral* $\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\, du$, Nouv. Ann. Math. 9, 3. Ser., 479 – 480 (1890); Œuvres Complètes 2, 263-264.

*Aufgaben.* Beweisen Sie:

1. $\lim \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} \sqrt{n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$,
2. $\dfrac{1}{4}\pi = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{(2\nu+1)^2}\right)$,
3. $e^{az} - e^{bz} = (a-b) z e^{\frac{1}{2}(a+b)z} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1 + (a-b)^2 z^2 / 4\nu^2\pi^2)$,
4. $\cos(\dfrac{1}{4}\pi z) - \sin(\dfrac{1}{4}\pi z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^n z}{2n-1}\right)$.

**1.3.2 Charakterisierung des Sinus durch die Verdopplungsformel.** Wir kennzeichnen die Sinusfunktion durch Eigenschaften, die für das Produkt $z \prod (1 - z^2/\nu^2)$ einfach zu verifizieren sind. Die Gleichung $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ ist eine

*Verdopplungsformel*: $\sin 2\pi z = 2 \sin \pi z \sin \pi(z + \frac{1}{2}), \quad z \in \mathbb{C}$.

Um mit ihrer Hilfe den Sinus zu charakterisieren, zeigen wir zunächst

**Lemma von Herglotz 1.6 (multiplikative Form).**[4] *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das ein Intervall $[0, r), r > 1$, umfasst. Es sei $g \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei in $[0, r)$, und es gelte eine multiplikative Verdopplungsformel*

$$g(2z) = cg(z)g(z + \frac{1}{2}), \quad \textit{falls} \quad z, z + \frac{1}{2}, 2z \in [0, r) \qquad (\textit{mit} \quad c \in \mathbb{C}^*). \tag{1.5}$$

*Dann folgt $g(z) = ae^{bz}$ mit $1 = ace^{\frac{1}{2}b}$.*

[4] Wir erinnern an das in (I.11.2.2) besprochene

**Lemma von Herglotz** (*additive Form*). *Es sei $[0, r) \subset G$ mit $r > 1$. Es sei $h \in \mathcal{O}(G)$, und es gelte die additive Verdopplungsformel $2h(2z) = h(z) + h(z + \frac{1}{2})$, falls $z, z + \frac{1}{2}, 2z \in [0, r)$. Dann ist $h$ konstant.*

*Beweis.* Sei $t \in (1, r)$ und $M := \max\{|h'(z)| : z \in [0, t]\}$. Da $4h'(2z) = h'(z) + h'(z + \frac{1}{2})$ und da mit $z$ auch immer $\frac{1}{2}z$ und $\frac{1}{2}(z+1)$ in $[0, t]$ liegen, so folgt $4M \leq 2M$, also $M = 0$. Der Identitätssatz gibt $h' = 0$, also $h = \text{const}$.

*Beweis.* Die Funktion $h := g'/g \in \mathcal{M}(G)$ ist überall in $[0, r)$ holomorph, es gilt $2h(2z) = 2g'(2z)/g(2z) = h(z) + h(z + \frac{1}{2})$, falls $z, z + \frac{1}{2}, 2z \in [0, r)$. Nach dem Lemma von HERGLOTZ (additive Form) ist $h$ konstant (1.5). Es folgt $g' = bg$ mit $b \in \mathbb{C}$, also $g(z) = ae^{bz}$. Mit (1.5) folgt noch $ace^{\frac{1}{2}b} = 1$. □

Es ergibt sich nun schnell:

**Satz 1.7.** *Es sei $f$ eine ungerade ganze Funktion, die in $[0, 1]$ nur in $0$ und $1$ verschwinde, und zwar von erster Ordnung. Es gelte eine*

$$\textit{Verdopplungsformel: } f(2z) = cf(z)f(z + \frac{1}{2}), \quad z \in \mathbb{C}, \qquad \textit{wobei } c \in \mathbb{C}^*. \tag{1.6}$$

*Dann folgt $f(z) = 2c^{-1} \sin \pi z$.*

*Beweis.* Die Funktion $g(z) := f(z)/\sin \pi z$ ist holomorph und nullstellenfrei in einem Gebiet $G \supset [0, r)$, $r > 1$; es gilt $g(2z) = \frac{1}{2}cg(z)g(z + \frac{1}{2})$. Nach HERGLOTZ folgt $f(z) = ae^{bz} \sin \pi z$ mit $ace^{\frac{1}{2}b} = 2$. Da $f(-z) = f(z)$, so folgt weiter $b = 0$. □

Wir benutzen die Verdopplungsformel des Sinus noch zur Herleitung eines Integrals, das im Anhang zu 4.3.5 zum Beweis der JENSENschen Formel benötigt wird.

$$\int_0^1 \log \sin \pi t \; dt = -\log 2 \tag{1.7}$$

*Beweis.* Man hat, wenn man zunächst die Existenz des Integrals unterstellt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin 2\pi t \; dt = \frac{1}{2} \log 2 + \int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin \pi t \; dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin \pi (t + \frac{1}{2}) \; dt. \tag{1.8}$$

Mit $\tau := 2t$ links und $\tau := t + \frac{1}{2}$ ganz rechts folgt (1.7) direkt. – Das zweite Integral rechts in (1.8) existiert, wenn das erste existiert (setze $t + \frac{1}{2} = 1 - \tau$). Das erste Integral existiert, da $g(t) := t^{-1} \sin \pi t$ stetig und nullstellenfrei in $[0, \frac{1}{2}]$ ist.[5] □

**1.3.3 Beweis der Eulerschen Formel mit Hilfe von Lemma 1.6.** Die Funktion

$$s(z) := z \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z^2/\nu^2)$$

[5] Sei $f(t) = t^{-n} g(t), n \in \mathbb{N}$, *wobei $g$ stetig und nullstellenfrei in $[0, r]$ ist, $r > 0$. Dann existiert* $\int_0^r \log f(t) \; dt$. Das ist klar, da $\int_0^r \log t \; dt$ existiert (denn $x \log x - x$ ist Stammfunktion, und es gilt $\lim_{\delta \searrow 0} \delta \log \delta = 0$).

ist *ganz* und *ungerade* und hat Nullstellen genau in den Punkten von $\mathbb{Z}$, und zwar von erster Ordnung. Da $s'(0) = \lim_{z\to 0} s(z)/z = 1$, so folgt $\sin \pi z = \pi s(z)$ aus Satz 1.7, falls $s$ einer Verdopplungsformel genügt. Dies wird direkt verifiziert. Da $s$ normal konvergiert, so gilt nach Korollar 1.3:

$$\begin{aligned} s(2z) &= 2z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{(2z)^2}{(2\nu)^2}\right) \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2\nu-1)^2}\right) \\ &= 2s(z)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2\nu-1)^2}\right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Man rechnet aus (!)

$$\left(1 - \frac{1}{4\nu^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{(2\nu-1)^2}\right) = \frac{1 + 2z/(2\nu-1)}{1+2z/(2\nu+1)}\left(1 - \frac{(2z+1)^2}{(4\nu^2)}\right), \quad \nu \geq 1.$$

Damit folgt, wenn man Beispiel a) aus (1.1.2) beachtet:

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(4\nu^2)}\right)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2\nu-1)^2}\right) &= (1+2z)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{(2z+1)^2}{(4\nu^2)}\right) \\ &= 2s(z + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Daher ist (1.9) eine Verdopplungsformel: $s(2z) = 4a^{-1}s(z)s(z+\frac{1}{2})$ mit $a := \prod\left(1 - \frac{1}{4\nu^2}\right) \neq 0$.

Dieser multiplikative Beweis geht auf den amerikanischen Mathematiker E.H. Moore zurück; in seiner 1894 erschienenen Arbeit [177] wird viel gerechnet. Der Leser bemerke die enge Verwandtschaft mit dem Schottkyschen Beweis der Gleichung $\pi \cot \pi z = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu}\right)$ aus Satz I.11.2.1; die 1892 erschienene Arbeit von Schottky dürfte Moore nicht gekannt haben.

**1.3.4 Beweis der Verdopplungsformel für das Euler-Produkt nach Eisenstein*.** Lange vor Moore hat bereits Eisenstein die Verdopplungsformel für $s(z)$ nebenbei bewiesen. Er betrachtet 1847 in ([58, S. 461 ff.]) das auf den ersten Blick kompliziert aussehende Produkt

$$E(w,z) := \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}{}_e \left(1 + \tfrac{z}{\nu+w}\right) = \left(1 + \tfrac{z}{w}\right)\lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=-n}^{n}{}' \left(1 + \tfrac{z}{\nu+w}\right)$$

von zwei Variablen $(w,z) \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$; hier bezeichnet $\prod_e = \lim_{n\to\infty}\prod_{-n}^{n}$ die Eisensteinmultiplikation (in Analogie zur Eisensteinsummation $\sum_e$, die wir in Abschnitt I.11.2 einführten), weiter signalisiert $\prod'$, dass der Faktor zum Index 0 fortgelassen wird. Das Eisensteinsche Produkt $E(w,z)$ ist im $(w,z)$-Raum

$(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ normal konvergent, da $\prod_{\nu=-n}^{n}{}' \left(1 + \frac{z}{(\nu+w)}\right) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2+2wz}{(\nu^2-w^2)}\right)$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w^2-\nu^2}$ in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ normal konvergieren (vgl. I.11.1.3 Beispiele). Die Funktion $E(w,z)$ ist also stetig in $(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ und für festes $w$ jeweils holomorph in $z \in \mathbb{C}$. Mit $E(w,z)$ lässt sich elegant rechnen, so folgt direkt die

**Verdopplungsformel** $E(2w, 2z) = E(w,z)E(w + \frac{1}{2}, z)$.

*Beweis.*

$$E(2w, 2z) = \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}{}_e \left(1 + \frac{2z}{2\nu + 2w}\right) \cdot \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}{}_e \left(1 + \frac{2z}{2\nu + 1 + 2w}\right) \tag{1.10}$$

$$= E(w,z)E(w + \frac{1}{2}, z)$$

□

EISENSTEIN benutzt die Umformung

$$1 + \frac{z}{\nu + w} = \left(1 + \frac{w+z}{\nu}\right) \Big/ \left(1 + \frac{w}{\nu}\right), \tag{1.11}$$

um sein „Doppelprodukt“ auf das EULER-Produkt zurückzuführen:

$$E(w,z) = \frac{s(w+z)}{s(w)}, \quad \text{wobei} \quad s(z) = z \prod_{\nu \geq 1} (1 - z^2/\nu^2).$$

*Beweis.* $E(w,z) = \frac{w+z}{w} \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=-n}^{n}{}' \left(1 + \frac{w+z}{\nu}\right) \Big/ \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=-n}^{n}{}' \left(1 + \frac{w}{\nu}\right)$

$$= (w+z) \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(w+z)^2}{\nu^2}\right) \Big/ \left(w \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{\nu^2}\right)\right) = \frac{s(w+z)}{s(w)}.$$ □

Die Verdopplungsformel für $s(z)$ ist nun in der Gleichung

$$\frac{s(2w + 2z)}{s(2w)} = E(2w, 2z) = E(w,z)E(w + \tfrac{1}{2}, z) = \frac{s(w+z)}{s(w)} \cdot \frac{s(w+\frac{1}{2}+z)}{s(w+\frac{1}{2})}$$

enthalten: Da $s$ stetig ist und da $\lim_{w\to 0} \frac{s(2w)}{s(w)} = 2$, so folgt

$$s(2z) = \lim_{w\to 0} \frac{s(2w)}{s(w)} s(w+z) \frac{s(w + \frac{1}{2} + z)}{s(w + \frac{1}{2})} = 2s(\frac{1}{2})^{-1} s(z) s(z + \frac{1}{2}).$$ □

Die Eleganz in diesen EISENSTEINschen Schlüssen wird durch die zweite Variable $w$ möglich. EISENSTEIN bemerkt auch (loc. cit.), dass $E$ in $w$ periodisch ist: $E(w+1, z) = E(w,z)$ (Beweis durch Änderung von $\nu$ in $\nu+1$); er verwendet $E$

und $s$ zu einem Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, die Verdopplungsformel findet sich auf S. 462 unten. Die Identität $E(w,z) = s(w+z)/s(w)$ heißt bei EISENSTEIN *Fundamentalformel*, er schreibt sie wie folgt (S. 402, der Leser interpretiere):

$$\prod_{m\in\mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{\alpha m + \beta}\right) = \frac{\sin \pi(\beta - z)/\alpha}{\sin \pi\beta/\alpha}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \beta/\alpha \notin \mathbb{Z}.$$

**1.3.5 Historisches zum Sinusprodukt.** EULER hat das *Cosinus-* und *Sinusprodukt* 1734/35 gefunden und 1740 in der berühmten Arbeit *De Summis Serierum Reciprocarum*, [62, I-14,73-86], publiziert: auf S. 84 findet man (mit $p := \pi$)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \quad & \text{etc.} \\ = \left(1 - \frac{s^2}{p^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4p^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{9p^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{16p^2}\right) \quad & \text{etc.} \end{aligned}$$

Zur Begründung sagt EULER, dass die Nullstellen in der Reihe die Zahlen $p, -p, 2p, -2p, 3p, -3p$ etc. seien und diese folglich (analog wie ein Polynom) durch $1 - \frac{s}{p}, 1 + \frac{s}{p}, 1 - \frac{s}{2p}, 1 + \frac{s}{2p}$ etc. teilbar sei!

JOH. BERNOULLI betont in einem Brief an EULER vom 2. April 1737, dass dieses Vorgehen nur dann legitim sei, wenn man wisse, dass die Funktion $\sin z$ keine anderen Nullstellen in $\mathbb{C}$ habe als $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$: „demonstrandum esset nullam contineri radicem impossibilem“, [76, 2, S. 16]; weitere Kritik übten D. und J. BERNOULLI, vgl. [277, 264-265]. Die von EULER z.T. anerkannten Einwände gaben mit den Anstoß zur Entdeckung der Formel $e^{iz} = \cos z + i \sin z$; im Jahre 1743 leitet EULER hieraus seine Produktformeln her, die ihm dann nebenbei *alle* Nullstellen von $\cos z$ und $\sin z$ liefern ([62, I-14, 144-146] für $\cos z$).

EULER schließt wie folgt: wegen $\lim(1 + z/n)^n = e^z$ und $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ gilt:

$$\sin z = \frac{1}{2i} \lim p_n\left(\frac{iz}{n}\right), \quad \text{wobei} \;\; p_n(w) := (1+w)^n - (1-w)^n.$$

Für jeden geraden Index $n = 2m$ folgt

$$p_n(w) = 2nw(1 + w + \cdots + w^{n-2}). \tag{1.12}$$

Die Wurzeln $\omega$ von $p_n$ werden durch $(1 + \omega) = \zeta(1 - \omega)$ gegeben, wo $\zeta = \exp(2\nu\pi i/n)$ irgendeine $n$-te Einheitswurzel ist; daher hat $p_{2m}$ als ungerades Polynom vom Grad $n - 1$ die $n - 1$ verschiedenen Nullstellen $0, \pm\omega_1, \ldots, \pm\omega_{m-1}$, wobei

$$\omega_\nu = \frac{\exp(2\nu\pi i/n) - 1}{\exp(2\nu\pi i/n) + 1} = i \tan\frac{\nu\pi}{n}, \quad \nu = 1, \ldots, m-1.$$

Damit ergibt sich auf Grund von (1.12) die Faktorisierung

$$p_{2m}(w) = 2nw \prod_{\nu=1}^{m-1}\left(1 - \frac{w}{\omega_\nu}\right)\left(1 + \frac{w}{\omega_\nu}\right) = 2nw \prod_{\nu=1}^{m-1}\left(1 + w^2 \cot^2\frac{\nu\pi}{n}\right).$$

Hiermit ergibt sich

$$\sin z = z \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{\frac{1}{2}n-1}\left(1 - z^2\left(\frac{1}{n}\cot\frac{\nu\pi}{n}\right)^2\right).$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cot\frac{\nu\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi\nu}$ folgt nach *Limesvertauschung* die Produktformel. Natürlich lässt sich dieser letzte Schritt streng begründen (vgl. z.B. [263, S. 42 und 56]). – Eine noch einfachere Herleitung des Sinusproduktes, die auf der gleichen Grundidee beruht, findet man in [280, 5.4.3].

## 1.4 Eulersche Partitionsprodukte*

Neben dem Sinusprodukt hat EULER das Produkt

$$\mathcal{Q}(z,q) := \prod_{\nu=1}(1 + q^\nu z) = (1+qz)(1+q^2z)(1+q^3z)\cdot\ldots$$

intensiv studiert. Es ist für jedes $q \in \mathbb{E}$ wegen $\sum |q|^\nu < \infty$ normal konvergent in $\mathbb{C}$ und also eine ganze Funktion in $z$, die im Fall $q \neq 0$ genau in den Punkten $-q^{-1}, -q^{-2}, \ldots$ Nullstellen, und zwar von erster Ordnung, hat. Aus $\mathcal{Q}(z,q)$ entstehen für $z = 1$ bzw. $z = -1$ die im Einheitskreis holomorphen Produkte

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdot\ldots \quad \text{bzw.} \quad (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdot\ldots, \quad q \in \mathbb{E}.$$

Ihre Potenzreihen um 0 spielen, wie wir im Abschnitt (1.4.1) sehen werden, in der Theorie der Partitionen natürlicher Zahlen eine wichtige Rolle. Die Entwicklung von $\prod(1-q^\nu)$ enthält nur solche Monome $q^n$, bei denen $n$ eine *Pentagonalzahl* $\frac{1}{2}(3\nu^2 \pm \nu)$ ist: dieses ist im berühmten Pentagonal-Zahlen-Satz enthalten, den wir im Abschnitt (1.4.2) besprechen. Im Abschnitt (1.4.3) entwickeln wir $\mathcal{Q}(z,q)$ nach Potenzen von $z$.

**1.4.1 Partitionen natürlicher Zahlen und Eulersche Produkte.** Jede Darstellung einer natürlichen Zahl $n \geq 1$ als Summe von Zahlen aus $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ heißt eine *Partition* von $n$. Mit $p(n)$ wird die Anzahl der Partitionen von $n$ bezeichnet (dabei gelten zwei Partitionen als gleich, wenn sie sich höchstens in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden), z.B. gilt $p(4) = 5$, denn 4 hat die Darstellungen $4 = 4$, $4 = 3+1$, $4 = 2+2$, $4 = 2+1+1$, $4 = 1+1+1+1$. Man setzt noch $p(0) := 1$. Die Werte von $p(n)$ wachsen astronomisch:

| n | 7 | 10 | 30 | 50 | 100 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p(n) | 15 | 42 | 5604 | 204226 | 190569292 | 3972999029388 |

Um die Partitionsfunktion $p$ zu untersuchen, bildet EULER die Potenzreihe $\sum p(\nu)q^\nu$, er findet den überraschenden Satz [63, S. 267]:

*Für alle $q \in \mathbb{E}$ gilt*

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^\nu)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p(\nu)q^\nu. \tag{1.13}$$

*Beweisskizze.* Man betrachtet die geometrischen Reihen $(1-q^\nu)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^{\nu k}, q \in \mathbb{E}$, und macht sich klar, dass $\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1-q^\nu)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_n(k)q^k$, $q \in \mathbb{E}$, $n \geq 1$, wobei $p_n(0) := 1$ und $p_n(k)$ für $k \geq 1$ die Anzahl der Partitionen von $k$ bezeichnet, deren Summanden alle $\leq n$ sind. Da $p_n(k) = p(k)$ für $n \geq k$, so folgt die Behauptung durch Grenzübergang. – Einen detaillierten Beweis findet man in [104, S. 275]. □

Es gibt viele zu (1.13) analoge Formeln. So findet man bei Euler [63, S. 268/69]:

*Es bezeichne $u(n)$ bzw. $v(n)$ die Anzahl der Partitionen von $n \geq 1$ in ungerade bzw. in verschiedene Summanden. Dann folgt für jedes $q \in \mathbb{E}$:*

$$\prod_{\nu\geq 1}(1-q^{2\nu-1})^{-1} = 1 + \sum_{\nu\geq 1} u(v)q^\nu, \prod_{\nu\geq 1}(1+q^\nu) = 1 + \sum_{\nu \geq 1} v(\nu)q^\nu.$$

Hieraus erhält man wegen

$$\begin{aligned}(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots &= \frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^6}{1-q^3}\cdot\ldots\\ &= \frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^3}\cdot\frac{1}{1-q^5}\cdot\ldots\end{aligned}$$

die überraschende und keineswegs auf der Hand liegende Folgerung

$$u(n) = v(n),\ n \geq 1.$$ □

Seit EULER ordnet man jeder Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die formale Potenzreihe $F(z) = \sum f(\nu)z^\nu$ zu; diese Reihe konvergiert, wenn $f(\nu)$ nicht zu stark wächst. Man nennt $F$ *die erzeugende Funktion von* $f$; die Produkte $\prod(1-q^\nu)^{-1}, \prod(1-q^{2\nu-1})^{-1}, \prod(1+q^\nu)$ sind also die erzeugenden Funktionen der Partitionsfunktionen $p(n), u(n), v(n)$. Erzeugende Funktionen spielen eine große Rolle in der Zahlentheorie, vgl. etwa [104, S. 274ff.].

### 1.4.2 Pentagonal-Zahlen-Satz. Rekursionsformeln für $p(n)$ und $\sigma(n)$.

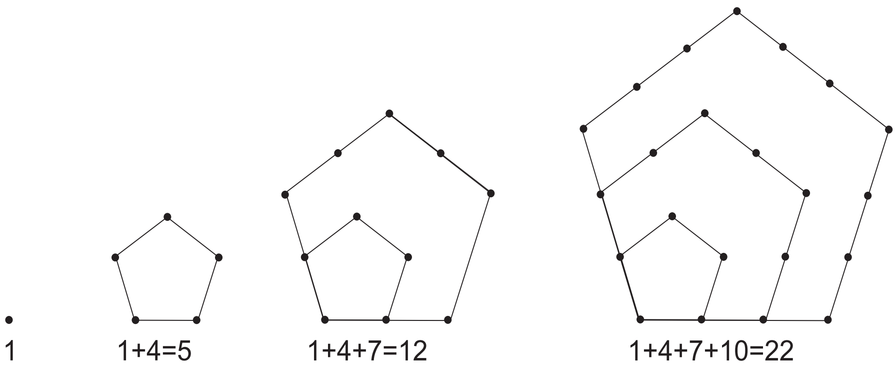
Die Suche nach der TAYLOR-Reihe von $\prod(1-q^\nu)$ um 0 hat EULER jahrelang beschäftigt. Die Antwort gibt sein berühmter Pentagonal-Zahlen-Satz.

**Pentagonal-Zahlen-Satz 1.8.** *Für alle $q \in \mathbb{E}$ gilt*

$$\begin{aligned}\prod_{\nu\geq 1}(1-q^\nu) &= 1+\sum_{\nu\geq 1}(-1)^\nu[q^{\frac{1}{2}(3\nu^2-\nu)}+q^{\frac{1}{2}(3\nu^2+\nu)}] \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^\nu q^{\frac{1}{2}(3\nu^2-\nu)} \\ &= 1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+q^{26} \\ &\quad -q^{35}-q^{40}+q^{51}+\dots\end{aligned} \tag{1.14}$$

Wir werden diesen Satz in Abschnitt 5.2 aus der JACOBIschen *Tripel-Produkt-Identität* herleiten.

Die Folge $\omega(\nu) := \frac{1}{2}(3\nu^2-\nu)$, die mit 1, 5, 12, 22, 35, 51 beginnt, war bereits bei den Griechen bekannt, vgl. [51, S. 1]. Angeblich bestimmte PYTHAGORAS $\omega(n)$, indem er regelmäßige Fünfecke, deren Kantenlänge jeweils um 1 zunimmt, ineinanderlegte und die Zahl aller Eckpunkte zählte:




Wegen dieses Konstruktionsprinzips nennt man alle Zahlen $\omega(\nu)$, $\nu \in \mathbb{Z}$, *Pentagonal-Zahlen*, diese Bezeichnung gab der Identität (1.14) den Namen.

Aus der wegen (1.13) und (1.14) klaren Identität

$$1 = \left(\sum_{n\geq 0} p(\nu)q^\nu\right)\left(1+\sum_{\nu\geq 1}(-1)^\nu[q^{\omega(\nu)}+q^{\omega(-\nu)}]\right)$$

lassen sich durch Koeffizientenvergleich Aussagen über die Partitionsfunktion $p$ gewinnen. Tatsächlich erhielt EULER so (vgl. hierzu auch [104, S. 286/86]): Rekursionsformel für $p(n)$.

Setzt man $p(n) := 0$ für $n < 0$, so gilt

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \dots \\ &= \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} [p(n - \omega(k)) + p(n - \omega(-k))] \end{aligned}$$

Es war eine große Überraschung für EULER, als er erkannte und mittels des Pentagonal-Zahlen-Satzes bewies, dass fast dieselbe Formel für Teilersummen besteht. Bezeichnet $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$ die Summe aller positiven Teiler der natürlichen Zahl $n \geq 1$, so gilt die

**Rekursionsformel für $\sigma(\mathbf{n})$.** *Setzt man* $\sigma(\nu) := 0$ *für* $\nu \leq 0$, *so gilt*

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \dots \\ &= \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} [\sigma(n - \omega(k)) + \sigma(n - \omega(-k))] \end{aligned}$$

für jede natürliche Zahl $n \geq 1$, die keine Pentagonzahl ist. Für jede Zahl $n = \frac{1}{2}(3\nu^2 \pm \nu)$, $\nu \geq 1$, gilt hingegen

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= (-1)^{\nu-1} n + \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \dots \\ &= (-1)^{\nu-1} n + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} [\sigma(n - \omega(k)) + \sigma(n - \omega(-k))]. \end{aligned}$$

In der Literatur findet man häufig nur die erste Formel für *alle* $n \geq 1$ mit der Maßgabe, dass der Summand $\sigma(n-n)$, falls er vorkommt, den Wert $n$ hat. So hat auch EULER die Formel angegeben. – Für $12 = \frac{1}{2}(3 \cdot 3^2 - 3)$ hat man

$$\sigma(12) = (-1)^2 12 + \sigma(11) + \sigma(10) - \sigma(7) - \sigma(5) + \sigma(0) = 12 + 12 + 18 - 8 - 6 = 28.$$

*Beweis der Rekursionsformel für $\sigma(n)$ nach* EULER. Man bildet die logarithmische Ableitung von (1.14). Eine einfache Umformung gibt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu q^\nu}{1 - q^\nu} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu q^{\omega(\nu)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \omega(n) q^{\omega(n)}. \tag{1.15}$$

Die Potenzreihe der ersten Reihe links[6] um 0 ist $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \sigma(\kappa) q^\kappa$. Multipliziert man die Reihen aus, so entsteht eine Doppelsumme mit dem allgemeinen Glied

[6] Reihen des Typs $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{q^\nu}{1-q^\nu}$ heißen LAMBERTsche Reihen. Da $q^\nu \cdot (1 - q^\nu)^{-1} = \sum_{\mu=1}^{\infty} q^{\mu\nu}$, so folgt sofort (vgl. hierzu auch [139, S. 466]):

*Ist die* LAMBERT*sche Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{q^\nu}{1-q^\nu}$ *normal konvergent in* $\mathbb{E}$, *so gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{q^\nu}{1 - q^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu q^\nu, \quad q \in \mathbb{E}, \quad \textit{wobei} \ \ A_\nu := \sum_{d|\nu} a_d.$$

$(-1)^\nu\sigma(\kappa)q^{\kappa+\omega(\nu)}$. Fasst man alle Terme mit gleichen Exponenten zusammen, so entsteht

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\sigma(n-\omega(k))\right)q^n.$$

Koeffizientenvergleich in (1.15) liefert die Behauptungen. □

Elementare Beweise der Rekursionsformel für $\sigma(n)$ scheinen nicht bekannt zu sein. – Die Funktion $\sigma(n)$ lässt sich rekursiv durch die Funktion $p(n)$ ausdrücken. Es gilt für alle $\nu \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= p(n-1)+2p(n-2)-5p(n-5)-7p(n-7)+12p(n-12)+15p(n-15)-\ldots\\ &= \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}[\omega(k)p(n-\omega(k))+\omega(-k)p(n-\omega(-k))].\end{aligned}$$

Dies wurde 1884 von Chr. ZELLER bemerkt, vgl. [281]. Wir notieren noch eine Formel, die sich ebenfalls mittels des Pentagonal-Zahlen-Satzes herleiten lässt:

$$p(n)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sigma(\nu)p(n-\nu).$$

**1.4.3 Potenzreihenentwicklung von $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+q^\nu z)$ nach $z$.** Während die Potenzreihenentwicklung dieser Funktion nach $q$ nur für spezielle Werte von $z$ bekannt ist (vgl. Abschnitte 1.4.1 und 1.4.2), lässt sich ihre Entwicklung nach $z$ leicht finden. Setzt man $\mathcal{Q}(z,q) := \prod_{\nu\geq 1}(1+q^{\nu}z)$, so folgt direkt:

$$(1+qz)\mathcal{Q}(qz,q)=\mathcal{Q}(z,q); \tag{1.16}$$

aus dieser Funktionalgleichung erhält man sofort:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^\nu z)=1+\sum_{\nu\geq 1}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^\nu)}z^\nu,\quad (q,z)\in\mathbb{E}\times\mathbb{C}. \tag{1.17}$$

*Beweis.* Für festes $q\in\mathbb{E}$ sei $\sum_{\nu\geq 0}a_\nu z^\nu$ die Taylorreihe von $\mathcal{Q}(z,q)$. Es gilt $a_0=1$, und (1.16) liefert die Rekursionsformel

$$a_\nu q^\nu + a_{\nu-1}q^\nu = a_\nu,\quad \text{d.h.}\quad a_\nu=\frac{q^\nu}{1-q^\nu}a_{\nu-1}\quad \text{für}\quad \nu\geq 1.$$

Es folgt (z.B. durch Induktion), dass $a_\nu = q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}[(1-q)\cdot\ldots\cdot(1-q^\nu)]^{-1}$. □

Für $z=1$ sehen wir

$$\begin{aligned}(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdot\ldots &= 1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}\\ &\quad+\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\ldots.\end{aligned}$$

Schreibt man $q^2$ statt $q$ in (1.17) und setzt man $z=q^{-1}$, so folgt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+q^{2\nu-1}) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{\nu^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdot\ldots\cdot(1-q^{2\nu})},$$

oder ausgeschrieben

$$(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdot\ldots = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots .$$

Diese Herleitung und mehr findet man in [63, S. 251 ff].

Das Produkt $\mathcal{Q}(z,q)$ ist einfacher als das Sinusprodukt. Nicht nur, dass sich die normale Konvergenz bereits mittels der geometrischen Reihe ergibt, auch die Funktionalgleichung (1.16), die an die Stelle der Verdopplungsformel für $s(z)$ tritt, folgt mühelos und ist überdies ergiebiger.

**Aufgabe.** Man zeige, dass für alle $(q,z) \in \mathbb{E} \times \mathbb{C}$ gilt:

a) $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^\nu z} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{(1-q)\cdot(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^\nu)} z^\nu,$

b) $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^\nu z} =$

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{\nu^2}}{(1-q)\cdot(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^\nu)\cdot(1-qz)\cdot(1-q^2z)\cdot\ldots\cdot(1-q^\nu z)} z^\nu.$$

Man vergleiche die Ergebnisse für $z=1$.

*Hinweis.* Im Falle a) betrachte man zunächst $\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1-q^\nu z}$, $1 \le n < \infty$. Man verschaffe sich jeweils Funktionalgleichungen und simuliere den Beweis von (1.17); im Falle a) führe man abschließend den Grenzübergang $n \to \infty$ aus. – Die Gleichung b) findet sich z.B. in den *Fundamenta*, [130, 232–233].

### 1.4.4 Historisches zu Partitionen und zum Pentagonal-Zahlen-Satz.

Schon G.W. Leibniz fragte Joh. Bernoulli 1699 in einem Brief, ob er die Funktion $p(n)$ studiert habe; er bemerkte, dass dieses Problem nicht leicht, aber wichtig sei (*Math. Schriften*, ed. Gerhardt, Bd. III/2, S. 601). Euler wurde 1740 von Ph. Naudé (Berliner Mathematiker franz. Herkunft) gefragt, auf wie viele Weisen sich eine gegebene natürliche Zahl $n$ als Summe von $s$ verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen lasse. Euler hat diese und verwandte Fragen mehrfach behandelt, er wurde so zum Vater eines neuen Gebietes der Analysis, das er „Partitio Numerorum“ nannte. Bereits im April 1741, kurz vor seiner Abreise nach Berlin, legte er erste Resultate der Petersburger Akademie vor, [62, I-2, 163–193]. Am Ende dieser Arbeit spricht er den Pentagonal-Zahlen-Satz aus, nachdem er durch Ausmultiplizieren der ersten 51 Faktoren von $\prod(1-q^\nu)$ die Anfangsglieder der Pentagonal-Zahlen-Reihe bis zum Summanden $q^{51}$ bestimmt hatte, loc. cit. S. 191/192. Es dauerte dann allerdings fast noch 10 Jahre, bis er den Satz beweisen konnte (Brief an Goldbach vom

9. Juni 1750, [54, 1, 522-524]). In der Introductio handelt das Kapital 16 ausführlich „von der Zerlegung der Zahlen in Teile“, der Pentagonal-Zahlen-Satz wird erwähnt und angewendet, S. 269.

Die Rekursionsformel für die Funktion $p(n)$ findet sich erstmals 1750 in der Abhandlung *De Partitione Numerorum*, [62, I-2, S. 281]; sie wurde 1918 von P.A. MacMahon bemüht, um $p(n)$ bis zu $n = 200$ zu berechnen, er fand $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$ (Proc. London Math. Soc. (2) 17, (1918), insb. 114–115).

Die Rekursionsformel für $\sigma(n)$ hatte Euler schon 1741 numerisch für alle $n < 300$ verifiziert (Brief an Goldbach vom 1. April 1741, [76, 1, 407–410]). Er nennt dort seine Entdeckung „*eine sehr wunderbare Ordnung in den Zahlen*“ und schreibt, dass er keine „*demonstrationen rigorosam hätte. Wenn ich aber auch gar keine hätte, so würde man an der Wahrheit doch nicht zweifeln können, weil bis über* 300 *diese Regel immer eingetroffen.*“ Er teilt Goldbach dann die Herleitung der Rekursionsformel aus dem (damals noch unbewiesenen) Pentagonal-Zahlen-Satz mit. Eine ausführliche Darstellung mit Beweis gibt er 1751 in *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs,* [62, I-2, 241–253]. - Weitere historische Angaben und Erläuterungen findet der Leser in [277, 276–281]. Es mussten noch nahezu weitere 80 Jahre vergehen, bis Jacobi 1829 die volle Erklärung für die Eulerschen Identitäten mit seiner Theorie der Thetafunktionen geben konnte. Wir gehen hierauf im nächsten Paragraphen etwas näher ein.

## 1.5 Jacobis Produktdarstellung* der Reihe $J(z,q) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} z^\nu$

Die Laurent-Reihe $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} z^\nu = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2}(z^\nu + z^{-\nu})$ ist für jedes $q \in \mathbb{E}$ in $\mathbb{C}^*$ konvergent, daher gilt $J(z,q) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ für alle $q \in \mathbb{E}$. Wer die Thetafunktion kennt, bemerkt sofort

$$\vartheta(z,\tau) = J(e^{2\pi i z}, e^{-\pi\tau}) \quad \text{(vgl. hierzu Paragraph I.12.4)}\,,$$

diese Beziehung spielt indessen im folgenden keine Rolle. Man zeigt direkt

$$J(i,q) = J(-1,q^4), \quad q \in \mathbb{E}. \tag{1.18}$$

Jacobi sah 1829, dass seine Reihe $J(z,q)$ mit dem von Abel studierten Produkt

$$A(z,q) := \prod_{\nu=1}^{\infty}[(1-q^{2\nu})(1+q^{2\nu-1}z)(1+q^{2\nu-1}z^{-1})]$$

übereinstimmt. Es gilt $A(z,q) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ für jedes $q \in \mathbb{E}$, da das Produkt jeweils in $\mathbb{C}^\times$ normal konvergiert. Zwischen dem Eulerprodukt $\mathcal{Q}(z,q)$ aus 1.4.3 und $A(z,q)$ besteht folgender Zusammenhang

$$A(z,q) = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu}) \cdot \mathcal{Q}(q^{-1}z, q^2) \cdot \mathcal{Q}(q^{-1}z^{-1}, q^2).$$

Die Identität $J(z,q) = A(z,q)$ ist eine der vielen tiefen Formeln, die sich in JACOBIS *Fundamenta Nova* finden. Wir gewinnen diese JACOBIsche Tripel-Produkt-Identität im Abschnitt 1.5.2 mit Hilfe der Funktionalgleichungen

$$A(q^2 z, q) = (qz)^{-1} A(z,q), \quad A(z^{-1}, q) = A(z,q), \quad (z,q) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{E}^\times, \tag{1.19}$$

$$A(i,q) = A(-1, q^4), \quad q \in \mathbb{E}, \tag{1.20}$$

die man alle leicht der Definition von $A$ entnimmt, wobei man beim Beweis von (1.20) beachte, dass

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^{\nu^2}) = \prod_{\nu=1}^{\infty} [(1 - q^{4\nu})(1 - q^{4\nu-2})], \quad (1 + q^{2\nu-1} i)(1 - q^{2\nu-1} i) = 1 + q^{4\nu-2}.$$

Aus der Gleichung $J(z,q) = A(z,q)$ entstehen durch Spezialisierung faszinierende Identitäten, die z.T. auf EULER zurückgehen; wir geben Kostproben im Abschnitt 1.5.2.

### 1.5.1 Theorem von Jacobi.

**Satz 1.9 (Jacobi).** *Für alle* $(q,z) \in \mathbb{E} \times \mathbb{C}^\times$ *gilt*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} z^\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} [(1 - q^{2\nu})(1 + q^{2\nu-1} z)(1 + q^{2\nu-1} z^{-1})]. \tag{1.21}$$

*Beweis.* (vgl. [104, S. 282/83]). Das Produkt $A(z,q)$ hat für jedes $q \in \mathbb{E}$ eine LAURENT-Entwicklung $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu$ in $\mathbb{C}^\times$ um 0 mit Koeffizienten $a_\nu$, die von $q$ abhängen. Die Gleichungen (1.19) der Einleitung implizieren $a_{-\nu} = a_\nu$ und $a_\nu = q^{2\nu-1} a_{\nu-1}$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$. Damit ist bereits klar, wenn wir $a(q)$ für $a_0$ schreiben, dass

$$A(z,q) = a(q) J(z,q) \quad \text{mit} \quad a(0) = 1.$$

Da $A(1,q)$ und $J(1,q)$ als Funktionen in $q$ holomorph in $\mathbb{E}$ sind und da $J(1,0) = 1$, so ist $a(q)$ holomorph in einer Umgebung des Nullpunktes. Aus den Gleichungen (1.18) und (1.20) der Einleitung folgt, da $J(i,q) \not\equiv 0$,

$$a(q) = a(q^4) \quad \text{und mithin} \quad a(q) = a(q^{4n}), \quad n \geq 1 \quad \text{für alle} \quad q \in \mathbb{E}.$$

Die Stetigkeit von $a(q)$ in 0 erzwingt $a(q) = \lim_{n\to\infty} a(q^{4n}) = a(0) = 1$ für alle $q \in \mathbb{E}$. □

Die Idee zu diesem eleganten Beweis soll auf JACOBI zurückgehen (vgl. [104, S. 296]). Es sei empfohlen, den Beweis bei KRONECKER anzuschauen, [151, 182–186]. Mit $z := e^{2iw}$ schreibt sich (1.21) in der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} e^{2i\nu w} = \prod_{\nu=1}^{\infty} [(1 - q^{2\nu})(1 + 2q^{2\nu-1} \cos 2w + q^{4\nu-2})].$$

Die Identität (1.21) wird gelegentlich auch wie folgt geschrieben

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} z^\nu = (1 - z^{-1}) \prod_{\nu=1}^{\infty} [(1 - q^\nu)(1 - q^\nu z)(1 - q^\nu z^{-1})]. \tag{1.22}$$

Es entsteht (1.22) aus (1.21), wenn man dort $-qz$ für $z$ einträgt, das entstehende Produkt umordnet und schließlich $q$ statt $q^2$ schreibt.

**1.5.2 Diskussion des Jacobischen Theorems.** Für $z = 1$ entsteht aus (1.22) die Produktdarstellung der klassischen, in $\mathbb{E}$ konvergenten Thetareihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2} = \prod_{\nu=1}^{\infty} [(1+q^{2\nu-1})^2(1-q^{2\nu})]. \tag{1.23}$$

Wir notieren weiter:

*Es seien* $k, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *beide gerade oder ungerade. Dann gilt für alle* $(z,q) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{E}$,

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}\nu(k\nu+l)} z^\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty} [(1-q^{k\nu})(1+q^{k\nu-\frac{1}{2}(k-l)}z)(1+q^{k\nu-\frac{1}{2}(k+l)}z^{-1})]. \tag{1.24}$$

*Beweis.* Sei zunächst $0 < q < 1$. Dann sind $q^{\frac{1}{2}k}, q^{\frac{1}{2}l} \in (0,1)$ eindeutig bestimmt, und (1.21) geht, wenn man $q^{\frac{1}{2}k}$ statt $q$ und $q^{\frac{1}{2}\ell}z$ statt $z$ schreibt, über in (1.24). Diese Gleichung gilt also gewiss für alle $(z,q) \in \mathbb{C}^\times \times (0,1)$. Da nach Voraussetzungen über $k, l$ alle Exponenten in (1.24) ganzzahlig sind (!), so stehen in (1.24) bei festem $z$ links und rechts holomorphe Funktionen in $q \in \mathbb{E}$. Nach dem Identitätssatz folgt die Behauptung. □

Für $k = l = 1$ und $z = 1$ geht (1.24) über in

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} = 2 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} = \prod_{\nu=1}^{\infty} [(1-q^{2\nu})(1+q^{\nu-1})]; \tag{1.25}$$

diese von Euler stammende Identität schreibt Gauss 1808 so ([82, S. 20]):

$$1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \text{ etc. } = \frac{1-qq}{1-q} \cdot \frac{1-q^4}{1-q^3} \cdot \frac{1-q^6}{1-q^5} \cdot \frac{1-q^8}{1-q^7} \tag{1.26}$$

(zum Beweis benutze man Aufgabe 2) aus 1.2.1.

Für $k = 3$, $l = 1$ und $z = -1$ besagt (1.24):

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} [(1-q^{3\nu})(1-q^{3\nu-1})(1-q^{3\nu-2})] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu q^{\frac{1}{2}\nu(3\nu+1)};$$

da hier links jeder Faktor $1 - q^\nu$, $\nu \geq 1$, genau einmal vorkommt, folgt – wie in 1.4.2 angekündigt - der *Pentagonal-Zahlen-Satz*

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1-q^\nu) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu [q^{\frac{1}{2}\nu(3\nu-1)} + q^{\frac{1}{2}\nu(3\nu+1)}], \quad q \in \mathbb{E}; \tag{1.27}$$

oder ausgeschrieben

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3) \cdot \ldots = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \ldots . \square \tag{1.28}$$

Jetzt lässt sich auch grundsätzlich die Potenzreihe von $\prod(1+q^\nu)$ um 0 berechnen. Wegen $\prod(1-q^\nu) \cdot \prod(1+q^\nu) = \prod(1-q^{2\nu})$ erhält man auch mit (1.28):

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+q^\nu) = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\dots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\dots}$$
$$= 1+q+q^2+2q^3+2q^4+3q^5+4q^6+5q^7+\dots\ .$$

Die ersten Koeffizienten rechts hat bereits EULER angegeben ([63, S. 269]), eine einfache explizite Darstellung aller Koeffizienten ist nicht bekannt. – Zahlentheoretische Interpretationen der obigen Formeln sowie weitere Identitäten findet man bei [104].

Wir notieren abschließend noch Jacobis berühmte Formel für den Kubus des EULER-Produktes (vgl. [130, S. 237]) und [133, S. 0]

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^\nu)^3 = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu(2\nu+1)\,q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}; \tag{1.29}$$

zum Beweis differenziert JACOBI die Identität (1.22) des Abschnittes 1.9 nach $z$ und setzt dann $z=1$ (der Leser führe die Einzelheiten aus, in der Reihe fasse man die Summanden mit Index $\nu$ und $-\nu-1$ zusammen). JACOBI schrieb 1848 zur Identität 1.29, vgl. [133, S. 60]: „Dies mag wohl in der Analysis das einzige Beispiel sein, daß eine Potenz einer Reihe, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung [ $=$ quadratische Form $an^2+bn+c$] bilden, wieder eine solche Reihe giebt.“

**1.5.3 Historisches zur Jacobischen Identität.** JACOBI hat 1829 die Tripel-Produkt-Identität in seiner großen Arbeit *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* bewiesen; er schreibt damals, [130, S. 232]:

„Aequationem identicam, quam antecedentibus comprobatum ivimus:

$$(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots \quad ''$$
$$= \frac{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\dots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdot\dots}$$

In einer 1848 veröffentlichten Arbeit hat JACOBI seine Gleichung systematisch ausgewertet, er sagt dort, [132, S. 221]:

„Die sämmtlichen diesen Untersuchungen zum Grunde gelegten Entwicklungen sind particuläre Fälle einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Functionen, welche in der Gleichung

$$\begin{aligned}&(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots\\ &\times(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)(1-q^7z)\dots\\ &\times(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})(1-q^5z^{-1})(1-q^7z^{-1})\dots\\ &=1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\dots\end{aligned}$$

enthalten ist.“

Die Vorarbeiten zur JACOBIschen Formel leistete EULER durch seinen Pentagonal!-Zahlen-Satz. 1848 schreibt JACOBI an den Sekretär der Petersburger Akademie P.H. VON FUSS (1797–1855), vgl. [133, S. 60]: „Ich möchte mir bei dieser Gelegenheit noch erlauben, Ihnen zu sagen, warum ich mich so für diese EULERsche Entdeckung interessiere. Sie ist nämlich der erste Fall gewesen, in welchem Reihen aufgetreten sind, deren Exponenten eine arithmetische Reihe *zweiter* Ordnung bilden, und auf diese Reihen ist durch mich die Theorie der elliptischen Transcendenten gegründet worden. Die EULERsche Formel ist ein specieller Fall einer Formel, welche wohl das wichtigste und fruchtbarste ist, was ich in reiner Mathematik erfunden habe.“

JACOBI wusste nicht, dass lange vor EULER schon Jacob BERNOULLI und LEIBNIZ auf Reihen gestoßen waren, deren Exponenten eine Reihe zweiter Ordnung bilden. Im Jahre 1685 stellte Jacob BERNOULLI im *Journal des Scavans* ein Problem aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dessen Lösung er 1690 in den *Acta Eruditorum* gibt: dabei treten Reihen auf, von denen er ausdrücklich sagt, dass deren Exponenten arithmetische Reihen zweiter Ordnung sind. Kurze Zeit nach BERNOULLI löst auch LEIBNIZ in den *Acta Eruditorum* das Problem, er hält die Frage für besonders interessant, weil sie auf noch nicht näher untersuchte Reihen führe (ad series tamen non satis adhuc examinatas ducit). Wegen weiterer Einzelheiten vgl. den Artikel [59] von G.E. ENESTRÖM.

In seiner *Ars Conjectandi* ist BERNOULLI noch einmal auf das Problem zurückgekommen; in [12] findet man auf S. 142 die Reihe

$$1 - m + m^3 - m^6 + m^{10} - m^{15} + m^{21} - m^{28} + m^{36} - m^{45} + \dots .$$

BERNOULLI sagt, dass er die Reihe nicht summieren kann, dass sich aber leicht „Näherungswerthe in beliebig weit vorgetriebener Genauigkeit berechnen“ lassen (Zitat nach der von R. HAUSSNER besorgten Übersetzung von [12, S. 59]). Für $m = \frac{5}{6}$ gibt BERNOULLI z.B. den Näherungswert $0,52392$ an, der bis auf eine Einheit in der letzten Ziffer genau ist.

GAUSS hat JACOBI wissen lassen, dass er bereits um 1808 dessen Formeln kannte (vgl. den ersten Brief von JACOBI an LEGENDRE, [129, S. 394]). LEGENDRE, ob des Reziprozitätsgesetzes und der Methode der kleinsten Quadrate über GAUSS verbittert, schreibt dazu an JACOBI [129, S. 398]: „Comment se fait-il que M. GAUSS ait osé vous faire dire que la plupart des vos théorèmes lui était connus et qu'il en avait fait la découverte dès 1808? Cet excès d'impudence n'est pas croyable de la part d'un homme qui a assez de mérite personnel pour n'avoir besoin des s'approprier les découvertes des autres … “ .

Doch GAUSS hatte recht: in seinem Nachlass fand sich JACOBIs Fundamentalformel und mehr. GAUSS' Manuskripte wurden 1876 im dritten Band seiner Werke abgedruckt, auf Seite 440 steht (ohne Konvergenzangaben) die Formel

$$\begin{aligned}&(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\dots\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x^3}{y}\right)\left(1+\frac{x^5}{y}\right)\dots\\ &=\frac{1}{[xx]}\left\{1+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^9\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+\dots\right\},\end{aligned}$$

wobei $[xx]$ für $(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots$ steht. Damit hat man in der Tat das Resultat von (1.21) von JACOBI. Der Herausgeber des Bandes, SCHERING, versichert auf Seite 494, dass diese GAUSSschen Untersuchungen *wohl dem Jahre* 1808 *angehören.*

Der im Lob karge KRONECKER hat die Tripel-Produkt-Identität wie folgt gewürdigt, [151, S. 186]: „Hierin besteht die ungeheure Entdeckung *Jacobi's;* die Umwandlung der Reihe in das Produkt war sehr schwierig. *Abel* hat auch das Product, aber nicht die Reihe. Deshalb wollte Dirichlet sie auch als JACOBIsche Reihe bezeichnen.“

Die JACOBIschen Formeln sind nur die Spitze eines Eisberges von faszinierenden Identitäten. Im Jahre 1929 fand G.N. WATSON (vgl. [266, S. 44–45]), die

**Quintupel-Produkt-Identität 1.10.** *Für alle* $(q,z)\in\mathbb{E}\times\mathbb{C}^\times$ *gilt:*

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{3\nu^2-2\nu}(z^{3\nu}+z^{-3\nu}-z^{3\nu-2}-z^{-3\nu+2})\\ &=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu-1}z)(1-q^{2\nu-1}z^{-1})(1-q^{4\nu-4}z^2)(1-q^{4\nu-4}z^{-2}),\end{aligned}$$

aus der durch Spezialisierung viele weitere Formeln entstehen, vgl. hierzu auch [90] und [64]. – Seit einigen Jahren gibt es eine Renaissance der JACOBIschen Formeln in der Theorie der affinen Wurzelsysteme. Dabei wurden Identitäten entdeckt, die in der klassischen Theorie unbekannt waren. Eine Einführung mit vielen Literaturhinweisen gibt E. NEHER in [182].

http://www.springer.com/978-3-540-40432-3

Funktionentheorie 2
Remmert, R.; Schumacher, G.
2007, XVIII, 383 S. 19 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-540-40432-3