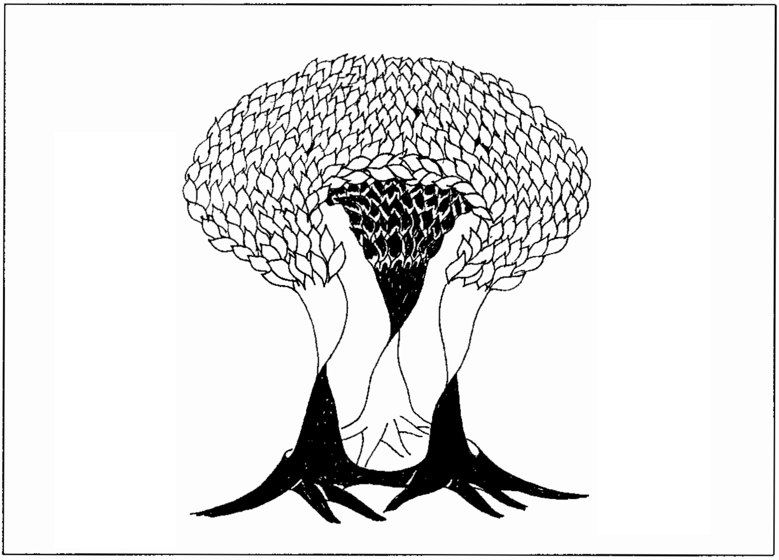
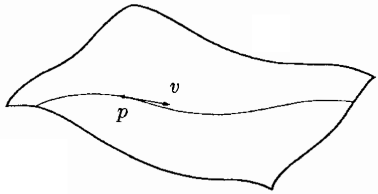
Einleitung



Vom Wesen der Mengentheoretischen Topologie

Es heißt zuweilen, ein Kennzeichen der modernen Wissenschaft sei die große und immer noch zunehmende Spezialisierung; die Wendung "nur noch eine Handvoll Spezialisten ... " hat wohl jeder schon gehört. — Na, ein allgemeiner Ausspruch über ein so komplexes Phänomen wie "die moderne Wissenschaft" hat immer Chancen, auch ein gewisses Quantum Wahrheit mit sich zu führen, aber beim Klischee vom Spezialistentum ist dieses Quantum ziemlich gering. Eher schon kann man nämlich die große und immer noch zunehmende *Verflechtung* früher getrennter Disziplinen ein Merkmal der modernen Wissenschaft nennen. Was heute, sagen wir ein Zahlentheoretiker und ein Differentialgeometer gemeinsam wissen müssen, ist viel mehr, auch verhältnismäßig, als vor fünfzig oder hundert Jahren. Diese Verflechtung wird dadurch bewirkt, daß die wissenschaftliche Entwicklung immer wieder verborgene Analogien ans Licht bringt, deren weitere Ausnutzung einen solchen Denkvorteil bedeutet, daß die darauf gegründete Theorie bald in alle betroffenen Gebiete einwandert und sie verbindet. Eine solche Analogietheorie ist auch die Mengentheoretische Topologie, die alles umfaßt, was sich Allgemeines über Begriffe sagen läßt, die *irgendwie* mit "Nähe", "Nachbarschaft" und "Konvergenz" zu tun haben.

Sätze einer Theorie können Instrumente einer anderen sein. Wenn z.B. ein Differentialgeometer ausnutzt, daß es zu jedem Punkt p in jede Richtung v genau eine maximale Geodätische gibt (und das tut er gewissermaßen täglich), dann bedient er sich



des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Der Nutzen der Mengentheoretischen Topologie im Alltagsgebrauch anderer Gebiete beruht dagegen weniger auf tiefen Sätzen, als vielmehr auf der vereinheitlichenden, vereinfachenden Kraft ihres Begriffssystems und ihrer glücklichen Terminologie. Und diese Kraft hat nach meiner Auffassung eine ganz spezifische Quelle, nämlich: *Die Mengentheoretische Topologie bewirkt bei vielen zunächst ganz abstrakten und unanschaulichen Problemen einen Anschluß an unser räumliches Vorstellungsvermögen.* Viele mengentheoretisch-topologischen Situationen lassen sich im gewöhnlichen Raume ganz adäquat veranschaulichen, auch wenn sie nicht gerade da stattfinden. Unser räumliches Anschauungsvermögen, welches auf diese Weise für das mathematische Denken über abstrakte Dinge nutzbar gemacht wird, ist aber eine von Abstraktion und logischem Denken unabhängige hochentwickelte intellektuelle Fähigkeit; und diese

Verstärkung unserer sonstigen mathematischen Talente ist wohl die tiefere Ursache für die Effektivität und Leichtigkeit der topologischen Methode.

Alter und Herkunft

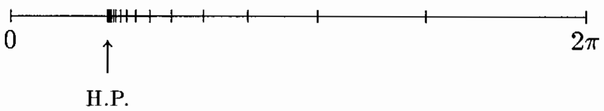
Grundlegende mathematische Begriffe haben fast immer eine lange und verwickelte Entstehungsgeschichte. Zwar kann man auf eine Stelle zeigen und sagen: Hier ist der Begriff zum ersten Male klipp und klar im Sinne des heutigen Gebrauchs definiert, von hier ab "gibt" es ihn – aber dann hatte der Begriff immer schon zahlreiche Vorstufen durchlaufen, war in wichtigen Spezialfällen schon dagewesen, Varianten waren erwogen und wieder verworfen worden usw., und es ist oft schwer und manchmal unmöglich zu sagen, welcher Mathematiker denn nun den entscheidenden Beitrag geleistet hat und als der eigentliche Urheber des Begriffes gelten kann.

In diesem Sinne darf man sagen: Jedenfalls "gibt" es das Begriffssystem der Mengentheoretischen Topologie seit dem Erscheinen von Felix Hausdorffs Buch *Grundzüge der Mengenlehre,* Leipzig 1914, in dessen siebentem Kapitel: "Punktmengen in allgemeinen Räumen" die wichtigsten Grundbegriffe der Mengentheoretischen Topologie definiert sind. Diesem Ziel nahe gekommen war schon 1906 Maurice Fréchet in seiner Arbeit *Sur quelques points du calcul fonctionnel,* Rend. Circ. Mat. Palermo 22. Fréchet führt darin den Begriff des metrischen Raumes ein und versucht auch den Begriff des topologischen Raumes zu fassen (durch eine Axiomatisierung des Konvergenzbegriffes). Fréchet war vor allem an Funktionenräumen interessiert und darf vielleicht als der Begründer der funktionalanalytischen Richtung der Mengentheoretischen Topologie angesehen werden.

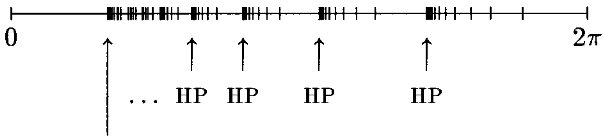
Aber die Wurzeln reichen natürlich tiefer. Die Mengentheoretische Topologie erwuchs, wie so vieles andere, auf dem Boden jener gewaltigen Umwälzung, welche das 19. Jahrhundert in der Auffassung von Geometrie bewirkt hatte. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts herrschte noch die klassische Einstellung, wonach die

Geometrie die mathematische Theorie des uns umgebenden wirklichen physikalischen Raumes war; und ihre Axiome galten als evidente Elementartatsachen. Am Ende des Jahrhunderts hatte man sich von dieser engen Auffassung der Geometrie als Raumlehre gelöst, es war klar geworden, daß die Geometrie inskünftig viel weiterreichende Ziele haben werde, um derentwillen sie auch in abstrakten "Räumen", z.B. in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, projektiven Räumen, auf Riemannschen Flächen, in Funktionenräumen usw. müsse betrieben werden. (Bolyai und Lobatschefskij, Riemann, Poincaré "usw.", ich werde nicht so verwegen sein, diese Entwicklung hier schildern zu wollen ...). Zu dem reichen Beispielmaterial und der allgemeinen Bereitschaft, sich mit abstrakten Räumen zu befassen, kam nun aber noch ein für das Entstehen der Mengentheoretischen Topologie entscheidender Beitrag eines Mathematikers hinzu: "Dem Schöpfer der Mengenlehre, *Herrn Georg Cantor*, in dankbarer Verehrung gewidmet" steht auf Hausdorffs Buch. — Ein topologischer Raum ist ein Paar, bestehend aus einer Menge und einer Menge von Teilmengen, derart, daß ... : Es ist ja klar, daß der Begriff nicht in dieser Allgemeinheit hätte gefaßt werden können, wären nicht, was eben Cantor getan hat, die abstrakten Mengen in die Mathematik eingeführt worden. Cantor hat aber lange vor seiner Begründung der transfiniten Mengenlehre noch einen ganz anderen Beitrag zum Werden der Mengentheoretischen Topologie geleistet, und davon möchte ich noch etwas berichten.

Cantor hatte 1870 gezeigt, daß zwei Fourierreihen, die punktweise konvergieren und dieselbe Grenzfunktion haben, auch dieselben Koeffizienten haben müssen. 1871 verbesserte er diesen Satz durch den Nachweis, daß die Übereinstimmung der Koeffizienten auch dann noch folgt, wenn man auf einer endlichen Ausnahmemenge $A \subset [0, 2\pi]$ auf Konvergenz oder Gleichheit des Limes verzichtet. Eine Arbeit von 1872 behandelt nun das Problem, für welche *unendlichen* Ausnahmemengen dieser Eindeutigkeitssatz noch richtig bleibt. – Eine unendliche Teilmenge von $[0, 2\pi]$ muß natürlich mindestens einen Häufungspunkt haben:



Das ist ein sehr "harmloses" Beispiel einer unendlichen Teilmenge von $[0, 2\pi]$. Irgendwie "wilder" wäre schon eine Menge, deren Häufungspunkte sich selbst wieder häufen:



H.P. von Häufungspunkten

Cantor zeigt nun: Bricht die induktiv durch $A^0 := A$ und $A^{n+1} := \{x \in [0, 2\pi] \mid x \text{ Häufungspunkt von } A^n\}$ definierte Folge von Teilmengen von $[0, 2\pi]$ nach endlich vielen Schritten ab, d.h. wird schließlich $A^k = \varnothing$, so *gilt* der Eindeutigkeitssatz für die Ausnahmemenge A noch. Insbesondere sind von Null verschiedene Funktionen, die außerhalb einer solchen Menge verschwinden, nicht durch eine Fourierreihe darstellbar. Dieses Resultat trägt zum besseren Verständnis des merkwürdigen Konvergenzverhaltens von Fourierreihen bei, und das Motiv zu Cantors Untersuchung kommt ganz aus der klassischen Analysis und letzten Endes aus der Physik. Aber dabei wurde Cantor auf eine bis dahin noch nie betrachtete Art von Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ geführt, welche ja besonders bei *spätem* Abbrechen der Folge $A, A^1, A^2, \ldots$ sehr seltsam und exotisch sein mußten. Die Teilmengen von $\mathbb{R}$ rücken hier als selbständige Studienobjekte in den Vordergrund, und zwar unter einem Gesichtspunkt, den wir heute gleich als einen topologischen erkennen. Diesem Weg ist Cantor gefolgt, als er später bei der Untersuchung allgemeiner Punktmengen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ eigentlich die mengentheoretisch-topologische Betrachtungsweise eingeführt hat, worauf dann Hausdorff fußen konnte.

Ich will nicht den Eindruck erwecken, als seien außer Cantor, Fréchet und Hausdorff keine anderen Mathematiker an der Entwicklung und Klärung der Grundbegriffe der Mengentheoretischen Topologie beteiligt gewesen; aber eine genauere Darstellung ginge über die Ziele hinaus, die sich dieses Buch stellen darf. Ich wollte nur mit ein paar raschen, aber anschaulichen Umrißlinien ungefähr den Ort bezeichnen, von dem die nun zu behandelnde Theorie ihren Ausgang genommen hat.