

bekannt, und man gewinnt durch Zerlegung von  $\mathfrak{R}$  im Kräfteplan nach den Richtungen von  $\mathfrak{R}_A$  und  $\mathfrak{C}_1$  die Kräfte  $\mathfrak{R}_A$  und  $\mathfrak{C}_1$ , womit nun auch  $\mathfrak{C}_2 = -\mathfrak{C}_1$  gegeben ist.  $\mathfrak{C}_2$  wird nun nach den Richtungen von  $\mathfrak{R}_B$  und  $\mathfrak{R}_C$  zerlegt und liefert damit die Kräfte  $\mathfrak{R}_B$  und  $\mathfrak{R}_C$ .

### § 9. Über den Schwerpunkt.

**1. Der Schwerpunkt.** In § 3.2 ist von Volumen- oder Massenkräften die Rede gewesen, das spezifische Gewicht  $\gamma$  definiert und das Grundsätzliche zur Gewichts Berechnung eines Körpers gegebener Gestalt gesagt worden. Wir knüpfen an die dortigen Gedankengänge an und betrachten einen starren Körper, der vermöge der Erdanziehung einer eingepprägten Massenkraft unterworfen ist. Die Vektoren der an den Volumenteilchen  $dV$  wirksamen Kräfte  $dG = \gamma dV$  können wegen der zwischen Körper und Erde bestehenden Größenverhältnisse<sup>1</sup> als parallel angesehen werden. Bedeutet also  $e$  den Einheitsvektor dieser Kräfte, so ist (Abb. 9.1)

$$d\mathfrak{G} = |d\mathfrak{G}|e = dG e. \tag{9.1}$$

Nun soll die Gesamtheit der („unendlich kleinen“) Vektoren  $d\mathfrak{G}$  durch einen einzigen Kraftvektor  $\mathfrak{R}$  ersetzt werden; welches ist dieser Vektor, und in welchem Punkte  $S$  greift er an? Da  $\mathfrak{R}$  in bezug auf einen beliebigen Bezugspunkt  $O$  allen  $d\mathfrak{G}$  äquivalent (§ 3.5) sein muß, bestehen die folgenden, die Unveränderlichkeit von Kraft und Moment ausdrückenden Beziehungen<sup>2</sup>:

$$\mathfrak{R} = \int d\mathfrak{G} = \mathfrak{G}, \quad r_S \times \mathfrak{R} = \int r \times d\mathfrak{G} = r_S \times \mathfrak{G}. \tag{9.2}$$

Die erste Gleichung, die wegen (9.1) auch in der Form  $K = G = \int dG$  geschrieben werden kann, ist selbstverständlich; die zweite bestimmt die Lage des Angriffspunktes mit (9.1) in der Form

$$r_S \times G e - \int r \times dG e = (r_S G - \int r dG) \times e = 0$$

oder

$$\left( r_S - \frac{1}{G} \int r dG \right) \times e = 0. \tag{9.3}$$

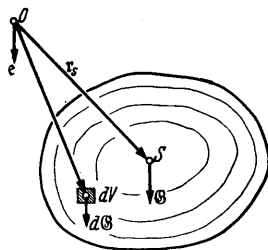


Abb. 9.1.

Durch diese Gleichung ist aber  $r_S$  bis auf einen in Richtung von  $e$  liegenden beliebigen Vektor  $a = a e$  bestimmt; denn ersetzen wir in (9.3)  $r_S$  durch  $r_S + a = r_S + a e$ , so bleibt wegen  $(r_S + a e) \times e = r_S \times e$  die Gleichung bestehen. Diese Feststellung ist aber evident, da sie das von uns in § 3.3 eingeführte Axiom der Linienflüchtigkeit des Kraftvektors am starren Körper ausdrückt! Es ist also einleuchtend, daß wir aus den Forderungen (9.2) nur die Kraft und ihre Wirkungslinie herleiten können. Zu einem eindeutig festgelegten charakteristischen Punkt  $S$  des Körpers gelangt man durch die Forderung, daß (9.3) für alle  $e$

<sup>1</sup> Der Körper ist im Vergleich zur Erde sehr klein.

<sup>2</sup> Der Sinn des Summations- bzw. Integralzeichens  $\int$  ist schon in § 3.2 erläutert worden.

bestehen soll, d. h. für jede beliebige Lage des Körpers, wozu offenbar

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{G} \int \mathbf{r} dG \quad (9.4)$$

notwendig und hinreichend ist. Dadurch ist derjenige Punkt des Körpers festgelegt, durch den die Wirkungslinien der resultierenden Massenkräfte bei beliebiger Lage des Körpers hindurchgehen; man nennt ihn *Schwerpunkt*. Mit  $\mathbf{r}_S = \{x_S; y_S; z_S\}$  und  $\mathbf{r} = \{x; y; z\}$  erhält man die Schwerpunktskoordinaten aus (9.4) zu

$$x_S = \frac{1}{G} \int x dG; \quad y_S = \frac{1}{G} \int y dG; \quad z_S = \frac{1}{G} \int z dG. \quad (9.5)$$

Man nennt  $\int x dG$ ,  $\int y dG$  und  $\int z dG$  die *statischen Momente*, bezogen auf die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse.

Für *homogene Körper* ist  $\gamma$  konstant, so daß man aus (9.4) bzw. (9.5) mit  $dG = \gamma dV$ ,  $G = \gamma V$  die Formeln

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{V} \int \mathbf{r} dV \quad (9.6)$$

$$x_S = \frac{1}{V} \int x dV; \quad y_S = \frac{1}{V} \int y dV; \quad z_S = \frac{1}{V} \int z dV \quad (9.6a)$$

erhält. Für Flächen bzw. Linien — man denke sie sich gleichmäßig mit Masse belegt — hat man entsprechend

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{F} \int \mathbf{r} dF \quad (9.7)$$

bzw.

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{s} \int \mathbf{r} ds, \quad (9.8)$$

wobei  $F$  bzw.  $s$  die Fläche bzw. Bogenlänge bezeichnen sollen.

Die zugehörigen Koordinatenformeln sind

$$x_S = \frac{1}{F} \int x dF; \quad y_S = \frac{1}{F} \int y dF; \quad z_S = \frac{1}{F} \int z dF \quad (9.7a)$$

bzw.

$$x_S = \frac{1}{s} \int x ds; \quad y_S = \frac{1}{s} \int y ds; \quad z_S = \frac{1}{s} \int z ds. \quad (9.8a)$$

**2. Sätze über den Schwerpunkt.** a) Es leuchtet ein, daß der Schwerpunkt im Körper eine bestimmte feste Lage besitzen muß. Sie wird also unabhängig von dem für ihre Berechnung verwendeten Koordinatensystem sein.

*Beweis.* Für die beiden Bezugspunkte  $O$  und  $O'$  (Abb. 9.2) haben wir gemäß (9.4)

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{G} \int \mathbf{r} dG$$

und

$$\mathbf{r}'_S = \frac{1}{G} \int \mathbf{r}' dG = \frac{1}{G} \int (\mathbf{r} - \mathbf{a}) dG = \mathbf{r}_S - \mathbf{a},$$

womit der Beweis erbracht ist.

b) Legen wir den Bezugspunkt  $O$  in den Schwerpunkt, so ist  $\mathbf{r}_S = 0$ , also nach (9.4) ist  $\int \mathbf{r} dG = 0$  und damit nach (9.5)  $\int x dG = 0$ ,

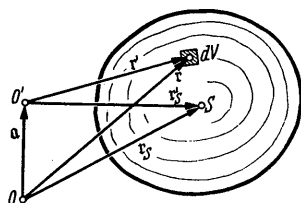


Abb. 9.2.

$\sum y dG = 0$ ,  $\sum z dG = 0$ , d. h., das statische Moment in bezug auf den Schwerpunkt und damit bezogen auf jede durch den Schwerpunkt gehende Achse ist Null.

**3. Der Massenmittelpunkt.** Setzt man weiter voraus, daß der Körper im Verhältnis zur Erde klein ist und nimmt außerdem an, daß die Entfernung zwischen Körper und Erdoberfläche, verglichen mit dem Erdradius, klein ist, so ist, wie die Erfahrung lehrt und das allgemeine Massenanziehungsgesetz<sup>1</sup> bestätigt,

$$dG = \gamma dV = \rho g dV = g dm, \quad (9.9)$$

wobei  $g$  eine an einem bestimmten Ort feste Zahl ist und  $\rho$  die Dichte bedeutet und ähnlich zu (3.1a) durch

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (9.10)$$

definiert ist, wenn mit  $m$  die sog. *schwere Masse*<sup>2</sup> bezeichnet wird. Die Erdanziehungskonstante  $g$ , die aus später ersichtlichen Gründen (siehe § 20.2) auch den Namen *Erdbeschleunigung* führt, ändert sich mit der geographischen Breite des Ortes und hat für die Erdoberfläche einen mittleren Wert von  $g \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

Mit  $G = mg$  und (9.9) ergibt sich dann aus (9.4)

$$r_S = \frac{1}{m} \sum r dm. \quad (9.11)$$

Man nennt nun den durch  $\frac{1}{m} \sum r dm$  festgelegten Punkt den *Massenmittelpunkt*, der also unter den einleitend gemachten Voraussetzungen mit dem Schwerpunkt zusammenfällt.

**4. Beispiele.** Die konkrete Berechnung des Schwerpunktes nach den Formeln (9.6) bis (9.8) erfordert die Durchführung der in diesen Gleichungen angedeuteten *Integrationen*, d. h. das Summieren von kleinen Größen. Das Verfahren im zuerst erwähnten Sinne, also das „*Integrieren*“, wird in den sog. *integrablen Fällen*<sup>3</sup> zu einer handwerksmäßigen Angelegenheit, wenn man den in (1.3) und (1.4) niedergelegten und im Anschluß daran ausgesprochenen Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung beachtet. Bei den in der Praxis vorkommenden Körpern führt die konsequente Durchführung des Summierens, d. h. die exakte oder näherungsweise Bestimmung des Grenzwertes einer Summe (s. § 3.2), auch zum Ziel und hat noch den Vorteil der Anschaulichkeit. Selbstverständlich sind der tiefere Sinn und das Resultat beider Methoden identisch.

In den jetzt folgenden Beispielen für homogene Körper werden wir nach Möglichkeit beide Wege beschreiten.

a) Das Dreieck. Die Seitenmaßzahlen seien  $a$ ,  $b$  und  $c$ , die dadurch gegebene Höhe  $h$  (Abb. 9.3). Nehmen wir eine Ein-

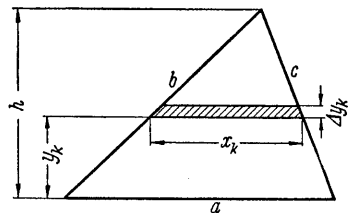


Abb. 9.3.

<sup>1</sup> Siehe § 21.6.

<sup>2</sup> Im Gegensatz zur trägen Masse (§ 20.2).

<sup>3</sup> Das heißt, wenn die Funktion unter dem Integralzeichen die Ableitung einer bekannten (elementaren) Funktion ist.

teilung durch zur Grundlinie parallele und äquidistante Schnitte vor, so haben wir nach (9.7a) für die Schwerpunkthöhe

$$y_s = \frac{1}{F} S y dF = \frac{2}{a h} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k x_k \Delta y_k.$$

Nun ist<sup>1</sup>

$$\Delta y_k = \frac{h}{n}; \quad y_k = k \frac{h}{n}; \quad x_k = a \frac{h - y_k}{h} = a \left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Damit wird

$$y_s = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \left(k h - \frac{h}{n} k^2\right) = 2h \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{n} k^2\right).$$

Benutzen wir die Summenformeln aus § 3.2, so bekommen wir

$$\begin{aligned} y_s &= 2h \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{n}{2} (n+1) - \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\ &= 2h \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \right] = \frac{h}{3}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des bestimmten Integrals kommen wir zu diesem Resultat wie folgt:

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{1}{F} \int_{y=0}^h y x(y) dy = \frac{2}{a h} a \int_{y=0}^h y \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy \\ &= \frac{2}{h} \left( \int_{y=0}^h y dy - \frac{1}{h} \int_{y=0}^h y^2 dy \right) = \frac{2}{h} \left( \frac{h^2}{2} - \frac{1}{h} \frac{h^3}{3} \right) = \frac{h}{3}. \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Da der Schwerpunkt des schraffierten Flächenstückes (Abb. 9.3) bei  $\frac{1}{2} x_k$  (bzw.  $\frac{1}{2} x$ ) liegt, ist offenbar der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

b) Der Schwerpunkt des Vierecks ist mit der vorangehenden Bemerkung grundsätzlich gefunden: Das Viereck wird durch seine zwei Diagonalen in je

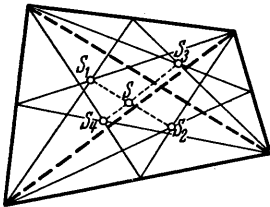


Abb. 9.4.

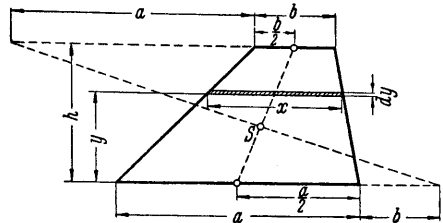


Abb. 9.5.

zwei Dreiecke zerlegt. Verbindet man die zu einer Diagonalen gehörigen Dreiecksschwerpunkte durch eine Gerade, so ist der Schnittpunkt der so erhaltenen zwei Geraden der gesuchte Schwerpunkt des Vierecks (Abb. 9.4).

c) Das Trapez. Nach Abb. 9.5 haben wir zunächst für das schraffierte Flächenelement  $dF = x dy = \left[ \frac{a}{h} (h - y) + b \frac{y}{h} \right] dy$  und somit nach (9.7a)

$$y_s = \frac{2}{(a+b)h} \int_{y=0}^h \left[ a \left(1 - \frac{y}{h}\right) + b \frac{y}{h} \right] y dy = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b}.$$

<sup>1</sup> Man beachte die Ähnlichkeit der Dreiecke.

Da diese Beziehung auch in der Form

$$\frac{y_s}{h - y_s} = \frac{\frac{a}{2} + b}{a + \frac{b}{2}}$$

geschrieben werden kann, ergibt sich die in Abb. 9.5 angegebene Konstruktion des Trapezschwerpunktes.

d) Der Kreiskegel. Wie in § 3.2 teilen wir den Kegel durch äquidistante Schnitte in angenähert zylindrische Scheiben vom Volumen  $\pi r_k^2 \Delta z_k$  (Abb. 9.6). Wegen

$$z_k = k \frac{h}{n}; \quad \Delta z_k = \frac{h}{n}; \quad r_k = a \left(1 - \frac{z_k}{h}\right)$$

erhalten wir für den Schwerpunktsabstand von der Grundfläche

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{1}{V} \int z \, dV \\ &= \frac{3}{a^2 \pi h} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \pi a^2 \left(1 - k \frac{1}{n}\right)^2 k \frac{h}{n} \frac{h}{n} \\ &= 3h \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{2}{n} k^2 + \frac{1}{n^2} k^3\right). \end{aligned}$$

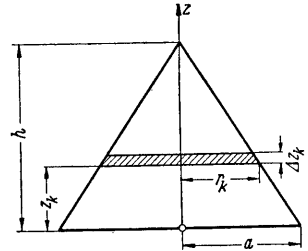


Abb. 9.6.

Nach § 3.2 und der durch vollständige Induktion leicht beweisbaren Formel

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2}{4} (n + 1)^2 \quad (9.12)$$

ergibt sich

$$z_s = 3h \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right] = \frac{h}{4}.$$

Mit Hilfe des bestimmten Integrals hat man

$$z_s = \frac{1}{V} \int_{z=0}^h \pi r^2 z \, dz = \frac{3}{a^2 h \pi} \int_{z=0}^h \pi a^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 z \, dz = \frac{h}{4}.$$

### 5. Die Regeln von Guldin (1577—1643). Läßt man eine die Koordinatenachsen und sich selbst nicht schneidende ebene und geschlossene Kurve<sup>1</sup> (Draht) um die Koordinatenachsen rotieren, so beschreibt die Kurve bzw. die von ihr eingeschlossene Fläche einen Rotationskörper, dessen Oberfläche bzw. Volumen mit Hilfe eines bestimmten Integrals berechnet werden kann. Wählen wir die x-Achse als Rotationsachse, so ist die Oberfläche, wenn ds ein Element des Bogens bedeutet (Abb. 9.7),

$$O_x = \int 2\pi y \, ds, \quad (9.13)$$

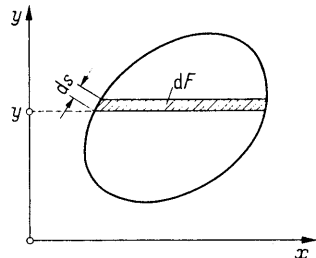


Abb. 9.7.

<sup>1</sup> Teile dieser Kurve können allerdings die Koordinatenachsen bzw. parallele Geraden zu ihnen sein; nur die Rotationsachse darf nicht „durchgeschnitten“ werden!

während das Volumen durch

$$V_x = S 2\pi y dF \quad (9.14)$$

bestimmt ist. Nun bringen die Regeln von GULDIN  $O_x$  bzw.  $V_x$  mit der  $y$ -Koordinate des Schwerpunktes des Bogens  $s$  bzw. der von der Kurve eingeschlossenen Fläche  $F$  in Beziehung.

a) Die erste GULDINSche Regel dient zur Schwerpunktsbestimmung einer ebenen Kurve homogener Massebelegung. Zunächst hat man nach (9.8a)

$$y_s = \frac{1}{s} S y ds,$$

woraus mit (9.13)

$$y_s = \frac{O_x}{2\pi s} \quad (9.15)$$

hervorgeht. Entsprechend ergibt sich in bezug auf die  $x$ -Achse

$$x_s = \frac{O_y}{2\pi s}. \quad (9.15a)$$

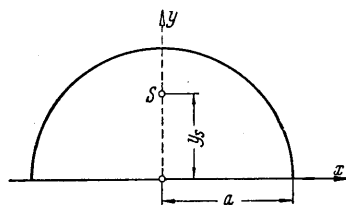


Abb. 9.8.

*Beispiel.* Der Halbkreisbogen vom Radius  $a$  (Abb. 9.8) hat nach (9.15) die Schwerpunkthöhe

$$y_s = \frac{4\pi a^2}{2\pi \pi a} = \frac{2}{\pi} a.$$

b) Die zweite GULDINSche Regel verbindet die Schwerpunktskoordinate einer ebenen Fläche homogener Massebelegung mit dem Volumen des zugehörigen Rotationskörpers. Nach (9.8a) hat man für den Flächenschwerpunkt (Abb. 9.7)

$$y_s^* = \frac{1}{F} S y dF.$$

Die Verbindung dieser Formel mit (9.14) führt zu

$$y_s^* = \frac{V_x}{2\pi F}, \quad (9.16)$$

während sich für die  $x$ -Achse

$$x_s^* = \frac{V_y}{2\pi F} \quad (9.16a)$$

ergibt.

*Beispiel.* Die Schwerpunkthöhe einer Halbkreisfläche (Abb. 9.8) ergibt sich nach (9.16) zu

$$y_s^* = \frac{\pi \frac{4}{3} a^3}{2\pi a^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} a.$$