HANSER

Mathematik für Wirtschaftsingenieure

Christopher Dietmaier

Lehr- und Übungsbuch

ISBN 3-446-22337-1

Leseprobe

2 Komplexe Zahlen und algebraische Gleichungen

Einführungsbeispiel 2.1 Gitterspektroskopie

Bei der Gitterspektroskopie wird ein optisches Strichgitter mit Licht bestrahlt. Um Spektroskopie betreiben zu können, muss man die Lichtintensitätsverteilung hinter dem Gitter verstehen. Durch die Verwendung von komplexen Zahlen wird die Berechnung dieser Intensitätsverteilung enorm vereinfacht. Dies wird im Abschnitt 2.1.5.2 demonstriert.

Bild 2.1 Lichtintensitätsverteilung bei Beugung am Gitter

Einführungsbeispiel 2.2 Interner Zinssatz

Bei einem der dynamischen Verfahren der Investitionsrechnung erfolgt die Bewertung einer Investition durch Vergleich des internen Zinssatzes mit dem Kalkulationszinssatz. Hat man eine Normalinvestition mit einer einmaligen Zahlung in der Höhe A zu einem bestimmten Zeitpunkt und n Rückflüssen in der Höhe B_i $(i=1,\ldots,n)$ in regelmäßigen (i.d.R. jährlichen) Abständen, so ist der interne Zinssatz z_{int} eine Lösung der folgenden Gleichung:

$$A+\frac{B_1}{1+z}+\frac{B_2}{(1+z)^2}+\ldots+\frac{B_n}{(1+z)^n}=0 \text{ mit } A<0 \text{ und } B_i>0 \text{ für } i=1,\ldots,n$$

Mit $q=\dfrac{1}{1+z}$ lautet diese Gleichung

$$A+B_1q+B_2q^2+\ldots+B_nq^n=0$$

Dies ist eine algebraische Gleichung vom Grad n. Die Berechnung des internen Zinssatzes bedeutet die Lösung einer algebraischen Gleichung.

2.1 Komplexe Zahlen

2.1.1 Einführung

Bei dem im Abschnitt 1.4.1 skizzierten Weg von den natürlichen zu den reellen Zahlen trat bei den natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen das Problem auf, dass bestimmte Gleichungen, bei denen Zahlen mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ verknüpft werden, nicht lösbar sind. Dieses Problem hat man auch bei den reellen Zahlen. So gibt es z.B. keine reelle Zahl x, welche eine der folgenden Gleichungen löst:

- $x^2 = -1$
- $x^2 + 2x + 2 = 0$
- $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$

Veranschaulicht man reelle Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden, so gibt es keinen Punkt auf der Geraden mit der Eigenschaft, dass die entsprechende reelle Zahl eine dieser Gleichungen löst. Will man trotzdem „Zahlen“ haben, die diese Gleichungen lösen, so muss man – anschaulich ausgedrückt – die reelle Zahlengerade „verlassen“ und sich in die „Zahlenebene“ begeben.

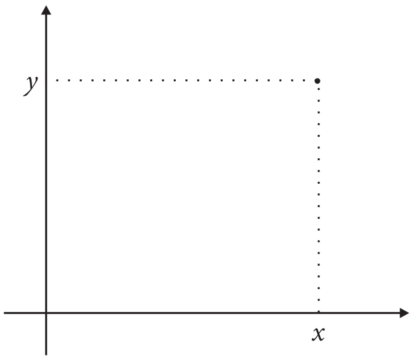

Bild 2.2

Die „neuen Zahlen“ entsprechen Punkten in der Ebene. Sie heißen ***komplexe Zahlen***. Jedem Punkt in der Ebene entspricht genau eine komplexe Zahl z und umgekehrt. Komplexe Zahlen bestehen damit aus reellen Zahlenpaaren (x, y). Jede reelle Zahl x soll nach wie vor dem zugehörigen Punkt auf der reellen Zahlengeraden entsprechen. Damit ist eine reelle Zahl x eine komplexe Zahl $(x,0)$. Die Zahlen $(0, y)$ heißen ***imaginäre Zahlen***. Die imaginäre Zahl $(0,1)$ heißt ***imaginäre Einheit*** und wird mit i bezeichnet.

$$\mathrm{i} = (0,1)$$

Da in der Elektrotechnik mit dem Buchstaben i auch der elektrische Strom bezeichnet wird, verwendet man für die imaginäre Einheit auch den Buchstaben j. Es sollen nun zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ so definiert werden, dass für reelle Zahlen $(x,0)$ die bekannten Eigenschaften dieser Verknüpfungen erhalten bleiben und es eine Lösung der Gleichung $z^2 = -1$ gibt, d.h. eine Zahl z mit der Eigenschaft

$$z \cdot z = (-1,0)$$

Dies ist der Fall für die folgenden Definitionen der zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Damit gilt z.B.

$$(x_1,0) + (x_2,0) = (x_1 + x_2,0)$$
$$(x_1,0) \cdot (x_2,0) = (x_1 \cdot x_2,0)$$
$$(0,1) \cdot (0,1) = \mathrm{i}^2 = (-1,0)$$
$$z = (x, y) = (x,0) + (0,1)(y,0)$$

Daraus folgt, dass sich jede komplexe Zahl z folgendermaßen darstellen lässt:

$$z = x + \mathrm{i}y$$

wobei x und y jeweils reelle Zahlen sind. Aus der Definition der beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ folgt, dass man mit komplexen Zahlen in dieser Darstellung mit den gleichen Rechenregeln wie bei reellen Zahlen und der Zusatzregel $\mathrm{i}^2 = -1$ rechnen kann. Oft führt man die komplexen Zahlen in dieser Form ein und postuliert dabei eine Zahl i mit der Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$.

Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, x, y \in \mathbb{R} \wedge \mathrm{i}^2 = -1\} \tag{2.1}$$

Die Zahl x heißt ***Realteil***, die Zahl y heißt ***Imaginärteil*** der komplexen Zahl z. In dieser Darstellung der komplexen Zahlen ist die Addition und Multiplikation folgendermaßen gegeben:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Mit diesen Verknüpfungen besitzt nun z.B. auch die Gleichung $z^2 + 2z + 2 = 0$ komplexe Lösungen. Man kann leicht überprüfen, dass die Zahl $z = -1 + \mathrm{i}$ eine Lösung ist:

$$z^2 + 2z + 2 = (-1+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i}) + 2(-1+\mathrm{i}) + 2 = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - 2 + 2\mathrm{i} + 2 = 0$$

Wegen $\mathrm{i}^2 = -1$ schreibt man auch $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Wurzeln aus negativen Zahlen wurden rein formal bereits im 16. Jahrhundert von Cardano (1501 – 1576) bei der Lösung algebraischer Gleichungen verwendet. Das Symbol i wurde 1777 von Euler eingeführt.

2.1.2 Grundbegriffe

Jede komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ lässt sich als Punkt in der Ebene mit den Koordinaten x und y in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen oder als Pfeil vom Ursprung des Koordinatensystems zu diesem Punkt. Diese Ebene wird ***Gaußsche Zahlenebene*** oder ***komplexe Zahlenebene*** genannt. Einige wichtige Grundbegriffe werden in der folgenden Tabelle definiert und in Bild 2.3 dargestellt.

Tabelle 2.1 Grundbegriffe

Begriff	Symbol	Bedeutung
Komplexe Zahl z	z	$z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R} \wedge \mathrm{i}^2 = -1$
Realteil von z	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Re}(z) = x$
Imaginärteil von z	$\mathrm{Im}(z)$	$\mathrm{Im}(z) = y$
Konjugiert komplexe Zahl	z^*	$z^* = x - \mathrm{i}y$
Betrag von z	$\lvert z \rvert = r$	$\lvert z \rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Argument von z	$\arg(z) = \varphi$	φ = Winkel zwischen Realteilachse und Pfeil z

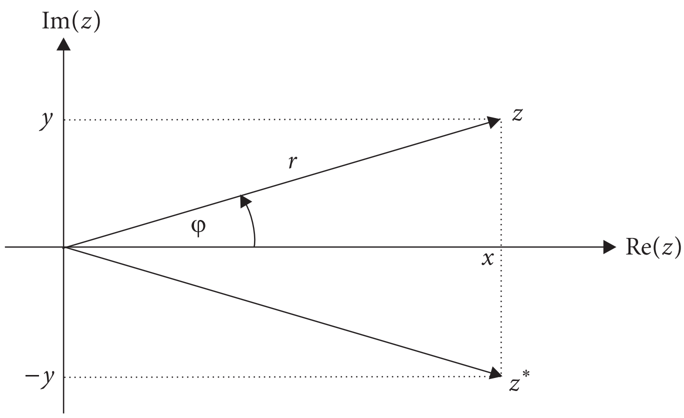

Bild 2.3

2.1.3 Rechenoperationen

Die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen wurden bereits definiert.

Rechenoperation	Definition
Addition	$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$ $= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ (2.2)
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$ $= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (2.3)

Für beide Rechenoperationen gibt es ein neutrales Element:

Rechenoperation	Neutrales Element	Eigenschaft
Addition	$0 + i0 = 0$	$z + 0 = 0 + z = z$
Multiplikation	$1 + i0 = 1$	$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

Bei der Addition existiert für alle $z = x + iy$ ein inverses Element $-z = -x - iy$. Bei der Multiplikation muss das zu einer Zahl $z = x + iy$ inverse Element $z^{-1} = a + ib$ folgende Gleichung erfüllen:

$$z \cdot z^{-1} = (x + iy) \cdot (a + ib) = 1 + i0 = 1$$

Daraus folgt das Gleichungssystem

$$xa - yb = 1$$
$$xb + ya = 0$$

mit der Lösung

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad b = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Damit hat man folgende inverse Elemente:

Rechenoperation	Inverses Element zu $z = x + iy$	Eigenschaft
Addition	$-z = -x - iy$	$z + (-z) = (-z) + z = 0$
Multiplikation	$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{z^*}{\lvert z \rvert^2}$	$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$ für $z \neq 0$

Die Rechenoperationen Subtraktion und Division werden mit Hilfe dieser inversen Elemente definiert: